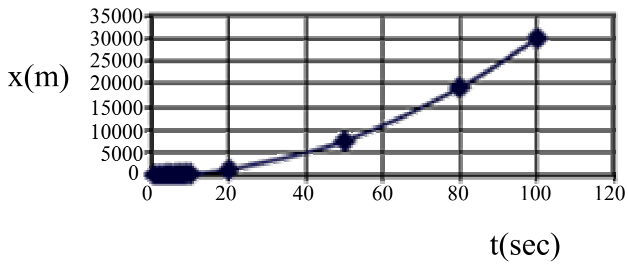
ΘΕ3 Χάραξη γραφικών παραστάσεων σε χαρτί log log

1. Γενικά

Αν και σε αρκετές περιπτώσεις, η σχέση που συνδέει δυο μεγέθη μεταξύ τους είναι γραμμική (δηλαδή η γραφική απεικόνιση της συνάρτησης είναι ευθεία γραμμή) τις

t (s)	x (m)
1	3
2	12
3	27
4	48
5	75
6	108
7	147
8	192
9	243
10	300
20	1200
50	7500
80	19200
100	30000

Πίνακας 1



Σχήμα 1. *Γραφική απεικόνιση της συνάρτησης $x = f(t)$*

περισσότερες φορές είναι μη γραμμική (καμπύλη). Σχέσεις της μορφής $y(x) = k\,x^n$ απαντώνται πολύ συχνά. Ας θεωρήσουμε, για παράδειγμα, τις τιμές του Πίνακα (1). Η γραφική απεικόνιση της συνάρτησης x = f(t), όπως φαίνεται στο Σχήμα (1), είναι μια καμπύλη που όμως δεν μας παρέχει αρκετές πληροφορίες για το είδος της συνάρτησης. Ακόμη και αν έχουμε βάσιμες υπόνοιες ότι οι τιμές υπακούουν σε μια σχέση της μορφής $x = k\,t^n$, πως θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε τις σταθερές k και n; Το πρόβλημα επιλύεται ως εξής:

Λογαριθμίζουμε και τις δυο πλευρές της συνάρτησης $x = k\,t^n$. Προς τούτο έχουμε

$$\log(x) = \log(k\,t^n) \tag{1}$$

και κάνοντας χρήση των παρακάτω βασικών ιδιοτήτων των λογαρίθμων

$$\begin{aligned} \log(AB) &= \log(A) + \log(B) \\ \log A^n &= n \log A \end{aligned} \tag{2}$$

η σχέση (1) γίνεται

$$\log(x) = n\log t + \log k \qquad (3)$$

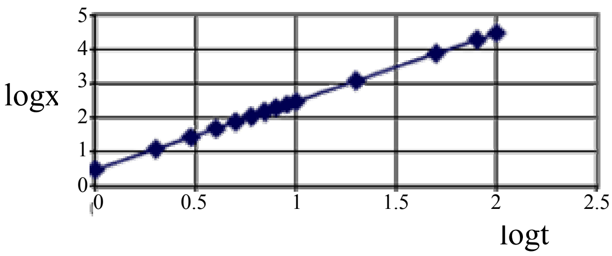
Η σχέση (3) όμως είναι της μορφής:

$$y = \alpha x + \beta \text{ (ευθεία γραμμή)} \qquad (4)$$

Αυτό σημαίνει ότι μπορούμε να βρούμε το λογάριθμο για κάθε τιμή του Πίνακα (1) και να χαράξουμε τη γραφική logx = f(logt) σε κανονικό χαρτί μιλιμετρέ.

2. Απεικόνιση σε χαρτί μιλιμετρέ

Όπως φαίνεται στο Σχήμα (2) η απεικόνιση logx = f(logt) είναι μια ευθεία γραμμή της οποίας η κλίση είναι n και η τεταγμένη επί την αρχή (εκεί δηλαδή που η ευθεία



Σχήμα 2. *Γραφική απεικόνιση της συνάρτησης logx = f(logt) σε χαρτί μιλιμετρέ*

log t	log x
0	0.477121
0.30103	1.079181
0.477121	1.431364
0.60206	1.681241
0.69897	1.875061
0.778151	2.033424
0.845098	2.167317
0.90309	2.283301
0.954243	2.385606
1	2.477121
1.30103	3.079181
1.69897	3.875061
1.90309	4.283301
2	4.477121

Πίνακας 2

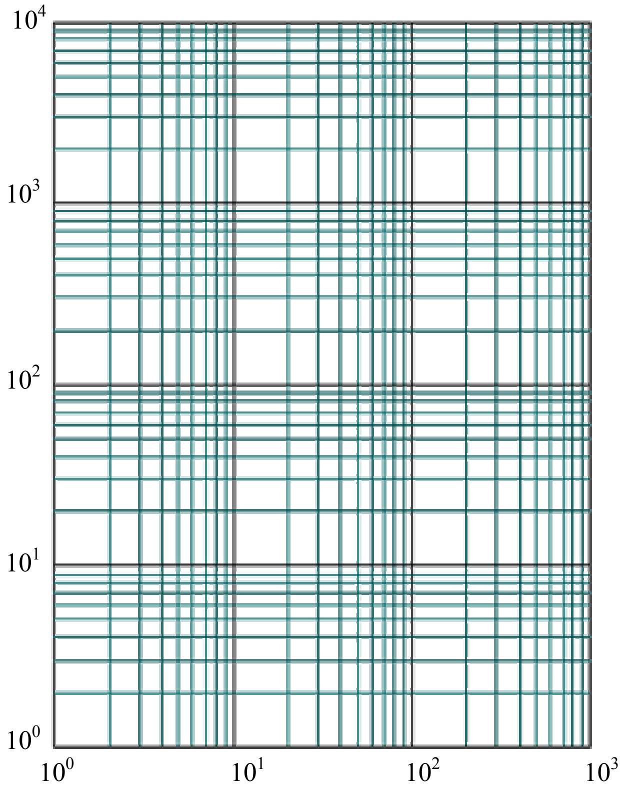
τέμνει τον κατακόρυφο άξονα) είναι logk . Υπολογίζοντας, κατά τα γνωστά, την κλίση της ευθείας έχουμε n = 2. Για να υπολογίσουμε τη σταθερά k εργαζόμαστε ως εξής:

Θέτουμε logt = 0 και η σχέση (3) γίνεται logx = 0 + logk και επομένως logx = logk. Στο Σχήμα (2) προσδιορίζουμε το σημείο όπου η ευθεία τέμνει τον κατακόρυφο άξονα logx. Αυτό είναι το 0.477121. Έτσι logx = 0. 477121 = logk $\Rightarrow$ k = $10^{0.477121}$ = 3 $\Rightarrow$ k = 3.

Γνωρίζοντας, επομένως, τις σταθερές n και k, μπορούμε να διαμορφώσουμε τη γενική μας σχέση $x = k t^n$ ως $x = 3t^2$.

3. Απεικόνιση σε χαρτί log – log

Από τα παραπάνω γίνεται κατανοητό ότι αν το πλήθος των τιμών είναι αρκετά μεγάλο, η διαδικασία υπολογισμού των λογαρίθμων τους και στη συνέχεια η απεικόνιση της συνάρτησης logy = f(logx) σε κανονικό χαρτί μιλιμετρέ είναι αρκετά χρονοβόρα. Ευτυχώς όμως η διαδικασία αυτή απλοποιείται με τη χρήση ειδικά βαθμολογημένου χαρτιού που καλείται λογαριθμικό (log-log) ή ημιλογαριθμικό (semi-log), ανάλογα αν και οι δυο άξονες έχουν χαραχθεί λογαριθμικά ή μόνο ο ένας. Στη δεύτερη περίπτωση ο άξονας που δεν χαράσσεται λογαριθμικά, φέρει υποδιαιρέσεις όπως σε ένα απλό μιλιμετρέ χαρτί. Στην ουσία ένα χαρτί log-log γραμμικοποιεί εκθετικές σχέσεις ή σχέσεις της μορφής $y = kx^n$, όπου εύκολα πια μπορούμε να προσδιορίσουμε τις σταθερές n και k.



Σχήμα 3. *Χαρτί log-log 3x4 κύκλων*

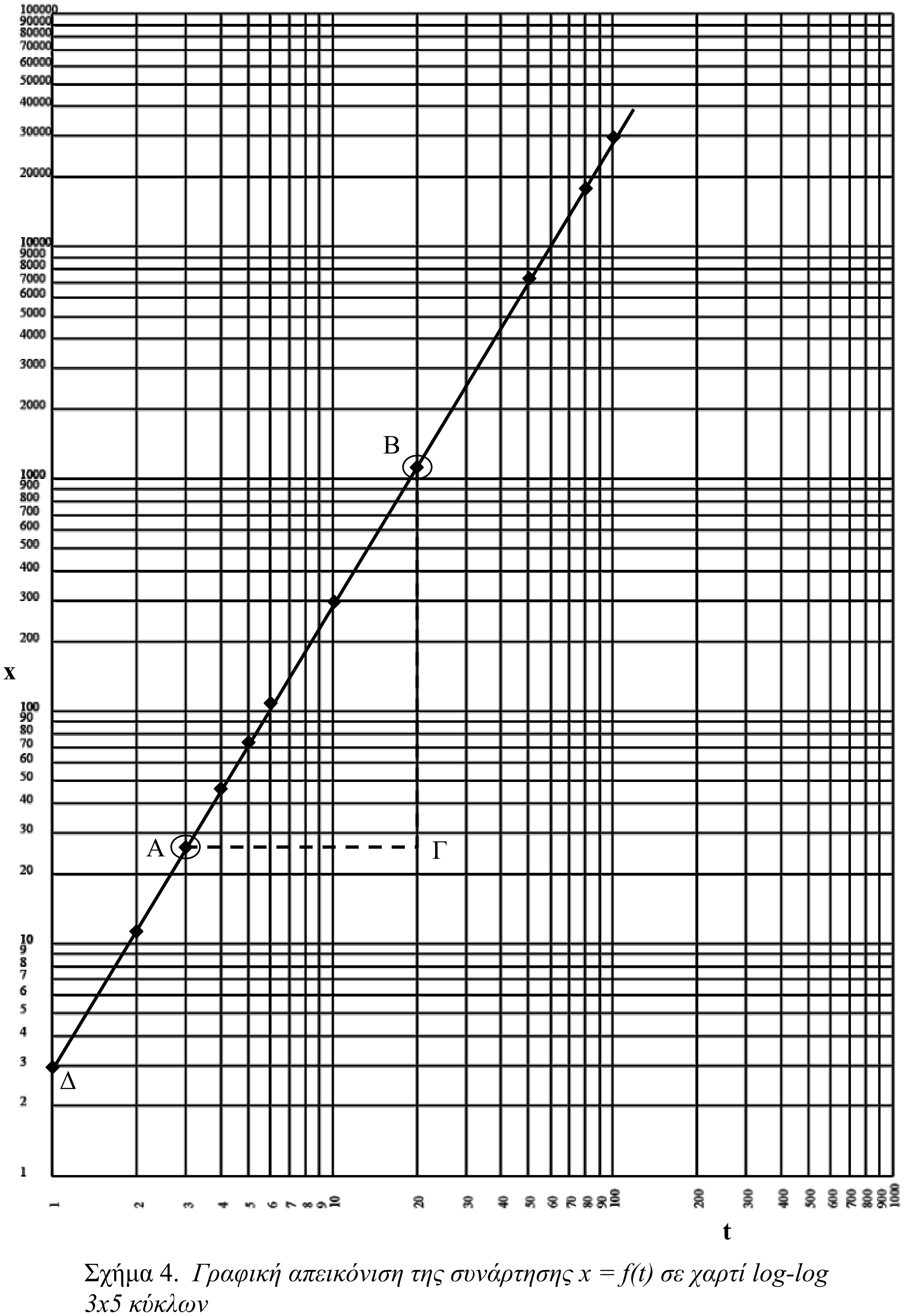
Στο Σχήμα (3) παρουσιάζεται μια τυπική μορφή χαρτιού log-log. Παρατηρήστε ότι και οι δυο άξονες φέρουν λογαριθμικές κλίμακες που αποτελούνται από τμήματα δέκα υποδιαιρέσεων, που καλούνται κύκλοι. Κάθε κύκλος αυξάνει, σε σχέση με τον προηγούμενό του, κατά ένα συντελεστή 10. Έτσι αν οι υποδιαιρέσεις (οι οποίες είναι τοποθετημένες σε αναλογία με το λογάριθμο της τιμής που εκφράζουν) του πρώτου, για παράδειγμα, κύκλου είναι 1, 2, 3, ……. 10, του δεύτερου θα είναι 10, 20, 30, ….. 100, του τρίτου 100, 200, 300, …1000 κ.ο.κ (θα μπορούσαμε επίσης να είχαμε 0.1-1, 1-10, 10-100 κ.ο.κ). Επομένως, κάθε τιμή που τοποθετείται επάνω στους άξονες είναι λογαριθμισμένη και το μήκος (απόσταση από την αρχή του άξονα) που εκφράζει είναι ο λογάριθμός της επί κάποια σταθερά. Αυτό σημαίνει ότι στους άξονες τοποθετούμε κατευθείαν τις τιμές και όχι το λογάριθμό τους.

Τα γενικής χρήσης χαρτιά log-log που κυκλοφορούν στο εμπόριο φέρουν διαφορετική βαθμολογία αξόνων, ανάλογα με τον κατασκευαστή (μερικά βαθμολογούν την αρχή κάθε κύκλου με 1, μερικά με 10 κ.λπ) και μένει στο χρήστη να τους επαναβαθμολογήσει σύμφωνα με τις ανάγκες του. Επίσης είναι διαθέσιμα σε μεγάλη ποικιλία, σε ότι αφορά τον αριθμό των κύκλων (δηλ. 1x1, 2x3, 4x4, 5x5 κ.λπ). Αν οι τιμές που θα απεικονίσουμε εκτείνονται έως κάποια υποδιαίρεση του 10, όπως για παράδειγμα 0.1 – 1 ή 1 – 10, τότε 1x1 κύκλων χαρτί είναι κατάλληλο. Αν οι τιμές εκτείνονται σε μια κλίμακα που πλησιάζει το 100, τότε θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε χαρτί 2x2 κύκλων κ.ο.κ.

Αν χρησιμοποιήσουμε τώρα τις αρχικές τιμές του Πίνακα 1 σε χαρτί log-log βλέπουμε ότι η απεικόνισή τους (Σχήμα 4) είναι μια ευθεία γραμμή της μορφής logx = nlogt + logk ή $x = kt^n$, με κλίση n και τεταγμένη επί την αρχή logk. Θα πρέπει να προσέξουμε ιδιαίτερα όταν υπολογίζουμε την κλίση, δεδομένου ότι κάθε τιμή που εμφανίζεται στο διάγραμμα είναι ο λογάριθμος αυτής της τιμής.

3.1 Υπολογισμός της κλίσης n

Παίρνουμε, κατά τα γνωστά, δυο σημεία επάνω στην ευθεία γραμμή και φέρουμε το



Σχήμα 4. *Γραφική απεικόνιση της συνάρτησης x = f(t) σε χαρτί log-log 3x5 κύκλων*

ορθογώνιο τρίγωνο. Για τον υπολογισμό της κλίσης μπορούμε να εργασθούμε με δυο τρόπους:

1^{ος} τρόπος

Απ' ευθείας υπολογισμός των λογαρίθμων στη σχέση:

$$n = \frac{\log x_2 - \log x_1}{\log t_2 - \log t_1} = \frac{\log(1200) - \log(27)}{\log(20) - \log(3)} \tag{4}$$

Από την σχέση (4) έχουμε:

$$n = \frac{\log\left(\frac{1200}{27}\right)}{\log\left(\frac{20}{3}\right)} = 2 \Rightarrow n = 2$$

2^{ος} τρόπος

Μετρώντας με ένα χάρακα επάνω στο διάγραμμα τα τμήματα (ΓΒ) και (ΑΓ), καθώς και το μήκος ενός κύκλου κατά την κατακόρυφη και κατά την οριζόντια διεύθυνση και χρησιμοποιώντας τη σχέση:

$$n = \frac{\frac{(\Gamma B)}{L_{\kappa\alpha\tau}}}{\frac{(A\Gamma)}{L_{o\rho\iota\zeta}}} \tag{5}$$

(όπου $L_{\kappa\alpha\tau}$ και $L_{o\rho\iota\zeta}$ το μήκος ενός κύκλου κατά την κατακόρυφη και οριζόντια διεύθυνση αντίστοιχα)

μπορούμε να υπολογίσουμε την κλίση n χωρίς τη χρήση λογαρίθμων.

Αν οι κύκλοι είναι όμοιοι, δηλ. αν $L_{\kappa\alpha\tau} = L_{o\rho\iota\zeta}$, τότε η σχέση (5) απλοποιείται στην:

$$n = \frac{(\Gamma B)}{(A\Gamma)} \tag{6}$$

3.2 Υπολογισμός της σταθεράς k

Αν στη σχέση logx = nlogt + logk θέσουμε όπου nlogt = 0 θα έχουμε logx = logk. Υπενθυμίζουμε ότι logt = 0 όταν t = 1. Έτσι παρατηρούμε που τέμνει η ευθεία τον άξονα x, όταν t = 1 (όχι όταν t = 0).

Στο διάγραμμα του Σχήματος (4) η ευθεία τέμνει τον άξονα x στο σημείο Δ και επομένως η τεταγμένη επί την αρχή είναι log3 (υπενθυμίζουμε ότι ο άξονας x είναι λογαριθμικός). Έτσι η σχέση logx = logk γίνεται log3 = logk και επομένως k = 3.

Θέτοντας στη σχέση $x = kt^n$ όπου $n = 2$ και $k = 3$, έχουμε τελικά $x = 3t^2$.
Οι μονάδες του k προσδιορίζονται από τη σχέση $x = kt^n$, αν επιλύσουμε ως προς k, δηλ. $k = x/t^n$ (m/sec^n) και επειδή $n = 2$, k (m/sec^2).