



ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΑΣΚΗΣΗ

Γραφικές παραστάσεις, κλίση καμπύλης Μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων

1. Σκοπός

Πρόκειται για θεωρητική άσκηση που σκοπό έχει την περιληπτική αναφορά σε θεματολογίες που αφορούν την δημιουργία γραφικών παραστάσεων καθώς και προσεγγίσεις αυτών με μαθηματικές συναρτήσεις (Μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων). Είναι άσκηση εισαγωγικού χαρακτήρα της οποίας η κατανόηση θα βοηθήσει σημαντικά στην σωστή διεξαγωγή των εργαστηριακών ασκήσεων που ακολουθούν.

2. Θεωρία

Στα φυσικά φαινόμενα υπάρχει μια θεωρητική ή ακόμη και εμπειρική σχέση η οποία συνδέει το αποτέλεσμα μιας μέτρησης π.χ. το φυσικό μέγεθος y με μια ή και περισσότερες αιτίες π.χ. τα μεγέθη x_1, x_2, \dots, x_n δηλαδή υπάρχει η σχέση : $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Στην προηγούμενη σχέση τα μεγέθη x_1, x_2, \dots, x_n ονομάζονται ανεξάρτητες μεταβλητές ενώ το μέγεθος y εξαρτημένη μεταβλητή. Είναι προφανές ότι το μέγεθος y μεταβάλλεται κάθε φορά ανάλογα με τις τιμές των επί μέρους ανεξάρτητων μεταβλητών του x_i από $i = 1$ έως n .

Συνήθως σε μια πειραματική μέτρηση ο παρατηρητής ελέγχει μια μόνο ανεξάρτητη μεταβλητή (έστω την $x = x_k$) ενώ τις υπόλοιπες μεταβλητές τις θεωρεί ως σταθερές. Στην περίπτωση αυτή η εξάρτηση της μεταβλητής y από την ανεξάρτητη μεταβλητή x_k δίνεται από την σχέση : $y = f(x)$ με $x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n$ σταθερές.

Εάν τώρα είναι γνωστή η σχέση που συνδέει τα μεγέθη y και x_k (ή x) τότε προσδιορίζονται θεωρητικά όλοι εκείνοι οι κανόνες και οι νόμοι που χαρακτηρίζουν το φυσικό φαινόμενο από το οποίο προκύπτει η σχέση : $y = f(x)$. Αντίθετα εάν δεν είναι γνωστή η αναλυτική αυτή σχέση ενώ είναι δυνατόν να μετρηθούν τα μεγέθη x και y τότε με την απεικόνιση των ζευγών (x, y) σε κάποιο σύστημα συντεταγμένων μπορεί να προσδιοριστεί αφ' ενός η άγνωστη (τις περισσότερες φορές) σχέση : $y = f(x)$ αφ' ετέρου οι νόμοι που προσδιορίζουν το προς μελέτη φυσικό αυτό φαινόμενο (διαδικασία δημιουργίας μαθηματικού μοντέλου). Η απεικόνιση αυτή χαρακτηρίζει τη γραφική παράσταση της συναρτήσεως $y = f(x)$. Είναι φανερό λοιπόν ότι η γραφική παράσταση αποτελεί κάθε φορά την οπτική παρουσίαση του τρόπου εξάρτησης ενός αποτελέσματος από την αντίστοιχη του αιτία, στο μελετούμενο φυσικό φαινόμενο.

Αρκετές φορές τα πειραματικά δεδομένα πρέπει να απεικονίζονται υπό μορφή γραφικών παραστάσεων σε ορθογώνιο σύστημα αξόνων καρτεσιανών συντεταγμένων. Με τις γραφικές παραστάσεις επιτυγχάνονται κυρίως τα εξής :

- Δημιουργία ενιαίας εικόνας για την συνολική πορεία της συμπεριφοράς του φαινομένου και της αλληλεξάρτησης των μεταβλητών του.

- Γίνεται άμεση εκτίμηση της κλίμακας των αριθμητικών τιμών για τα μεγέθη που συμμετέχουν και τέλος
- Διερευνάται η ύπαρξη κάποιας ένδειξης για τη μαθηματική σχέση που μπορεί να συνδέει τις μεταβλητές αυτές.

2. Μέθοδος

2.1 Η Τεχνική της Δημιουργίας των Γραφικών Παραστάσεων

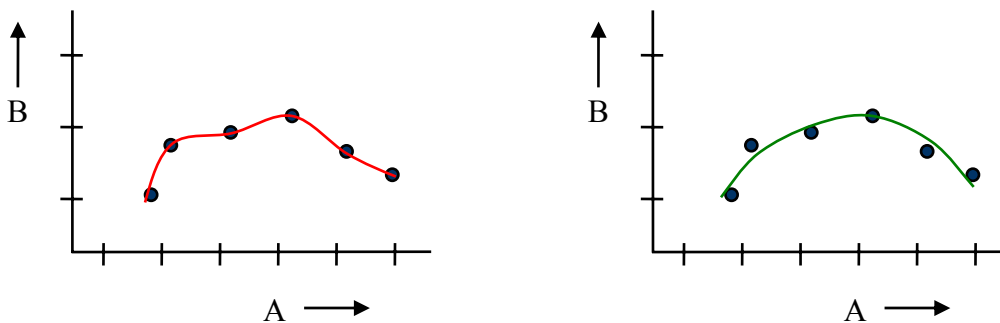
Το πρώτο πράγμα στη δημιουργία μιας γραφικής παράστασης – σε χιλιοστομετρικό χαρτί – είναι η κατάλληλη επιλογή της κλίμακας και για τους δυο άξονες. Σημειώνεται ότι δεν είναι αναγκαίο η κλίμακα αυτή να είναι η ίδια για τον οριζόντιο και τον κατακόρυφο άξονα. Απεναντίας πολύ σπάνια είναι η περίπτωση όπου η ίδια κλίμακα και στους δυο άξονες δημιουργεί μια ικανοποιητική γραφική παράσταση. Ουσιαστικό κριτήριο για την επιλογή της κλίμακας σε κάθε άξονα είναι αφ' ενός μεν η συνολική διάσταση που επιθυμούμε να έχει το χιλιοστομετρικό χαρτί (π.χ. 14 x 10 cm) και αφ' ετέρου η μεταβολή του μεγέθους που απεικονίζεται στον συγκεκριμένο άξονα. Θα πρέπει η κλίμακα που επιλέγεται για κάθε υποδιαίρεση του χιλιοστομετρικού χαρτιού να είναι ίση ή ακέραιο πολλαπλάσιο των αριθμών 2, 5 ή και 10. Έτσι γίνεται περισσότερο εύκολος ο προσδιορισμός σημείων που αντιστοιχούν σε ενδιάμεσες τιμές όχι μόνο κατά την δημιουργία της γραφικής παράστασης αλλά και κατά το στάδιο της μετέπειτα αξιοποίησής της. Κάθε ζεύγος των μεγεθών (x, y) αποτυπώνεται στο επίπεδο σε σημείο στο κέντρο ενός μικρού κύκλου (ή τετραγώνου) ή και από μια τομή δυο μικρών ευθύγραμμων τμημάτων.

Θα πρέπει ακόμη και οι δυο άξονες να συμβολίζονται με το φυσικό μέγεθος που απεικονίζουν όπως επίσης και με την αντίστοιχη μονάδα μέτρησης. Τέλος, η κάθε γραφική παράσταση θα πρέπει να συμβολίζεται αξιοποιώντας τα διεθνώς καθιερωμένα σύμβολα των φυσικών μεγεθών και για τους δυο άξονες π.χ. $v = f(t)$ ή $s = f(t)$.

2.2 Χάραξη της Πειραματικής Καμπύλης

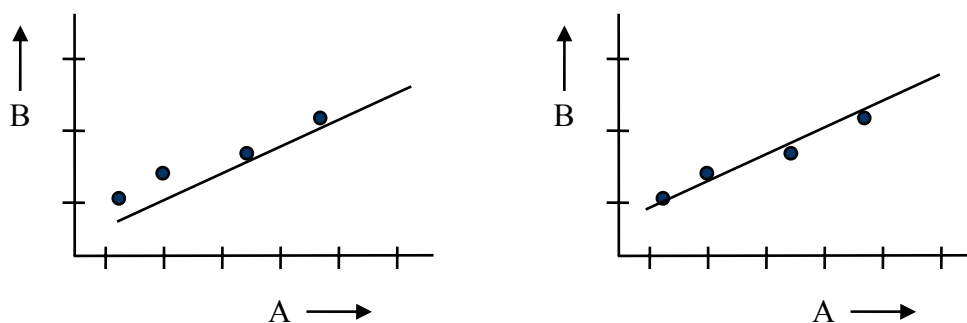
Με δεδομένη την διασπορά των πειραματικών σημείων στη γραφική παράσταση η πειραματική καμπύλη που τελικά θα χαραχθεί οφείλει να είναι όσο το δυνατόν πιο ομαλή. Σε περιπτώσεις όπου δεν επιδιώκεται απόλυτη μαθηματική ακρίβεια, η εκτίμηση για την καλύτερη καμπύλη καθορίζεται προσεγγιστικά με το μάτι έτσι ώστε τα πειραματικά σημεία να κατανέμονται ισόρροπα γύρω από την χαραχθείσα ομαλή καμπύλη. Δηλαδή, το ίδιο περίπου πλήθος πειραματικών σημείων θα πρέπει να βρίσκονται αριστερά ή και δεξιά της συγκεκριμένης πειραματικής καμπύλης. Εάν τα πειραματικά σημεία φαίνεται να ανήκουν σε ευθεία γραμμή χαράσσουμε ευθεία με τον χάρακα, ενώ εάν η κατανομή τους συμφωνεί με κάποια μορφή καμπύλης, τότε χαράσσουμε την καμπύλη αυτή με καμπυλόγραμμο ή και με ελεύθερο χέρι.

Κατά την σχεδίαση δεν θα πρέπει να ενώσουμε στην τύχη ή και διαδοχικά όλα τα πειραματικά σημεία. Καμπύλες όπως του σχήματος που ακολουθεί δεν δίνουν σωστή πληροφορία για τα μεταβαλλόμενα μεγέθη, ενώ η ομαλοποιημένη καμπύλη του δίπλα ακριβώς σχήματος, αν και δεν διέρχεται από όλα τα πειραματικά σημεία, εν τούτοις θεωρείται ότι περιγράφει ικανοποιητικότερα το φαινόμενο.



Αξίζει να σημειωθεί ότι τα προηγούμενα σχήματα αντιστοιχούν στην ίδια ακριβώς χωρική κατανομή πειραματικών σημείων με διαφορετική όμως χάραξη της αντίστοιχης πειραματικής καμπύλης.

Όμοια το αριστερά σχήμα που ακολουθεί χαρακτηρίστηκε λάθος διότι η « προτεινόμενη » πειραματική ευθεία «υποχρεώθηκε» να περάσει από την αρχή των αξόνων



χωρίς αυτό να είναι υποχρεωτικά αναγκαίο.

2.3 Υπολογισμός της Κλίσης σε Γραφική Παράσταση

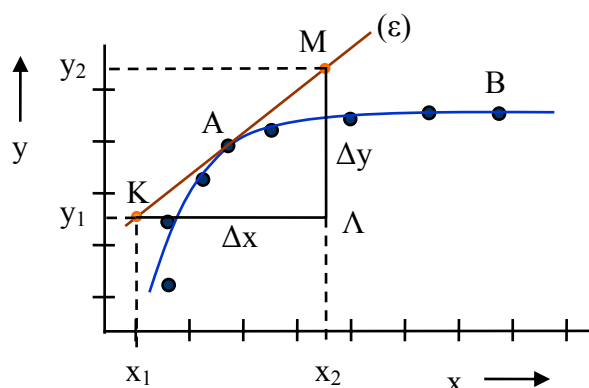
Η κλίση αποτελεί ένα ιδιαίτερα σημαντικό φυσικό μέγεθος το οποίο προκύπτει από την γραφική παράσταση των μεταβλητών παραμέτρων ενός φυσικού φαινομένου. Από πλευρά ορισμού η κλίση εκφράζει τον τρόπο μεταβολής της εξαρτημένης μεταβλητής y σε μια δεδομένη μεταβολή της ανεξάρτητης μεταβλητής x και αναφέρεται σε συγκεκριμένο σημείο μικρής περιοχής της καμπύλης κάθε γραφικής παράστασης.

Η κλίση m λοιπόν μιας πειραματικής καμπύλης σε ένα σημείο $A (x_0, y_0)$ ορίζεται ως το πηλίκο :

$$m = \Delta y / \Delta x = (y_2 - y_1) / (x_2 - x_1)$$

Θα πρέπει να σημειωθεί ότι η ευθεία (ε) είναι η εφαπτομένη ευθεία της πειραματικής καμπύλης στο σημείο $A (x_0, y_0)$ και με την χάραξή της δημιουργείται το ορθογώνιο τρίγωνο ΚΛΜ. Το ορθογώνιο τρίγωνο ΚΛΜ έχει ως υποτείνουσα την εφαπτομένη ευθεία (ε) ενώ το σημείο A βρίσκεται περί το μέσον της υποτείνουσας ΚΜ. Οι όροι του κλάσματος $(y_2 - y_1)$ και $(x_2 - x_1)$ δεν αφορούν τα «γεωμετρικά μήκη» των πλευρών του ορθογωνίου τριγώνου αλλά είναι οι διαφορές των συντεταγμένων στους δυο

άξονες. Η κλίση λοιπόν είναι το πηλίκο της κατακόρυφης μεταβολής Δy προς την αντίστοιχη οριζόντια Δx και μάλιστα η τιμή της είναι ανεξάρτητη της επιλογής των κορυφών K και M του ορθογώνιου τριγώνου ΚΛΜ.



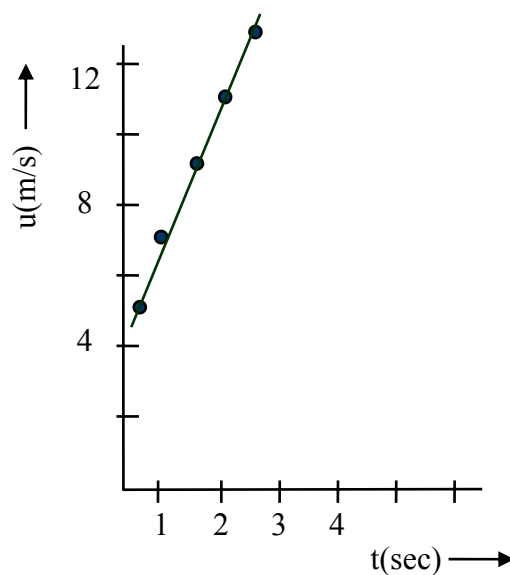
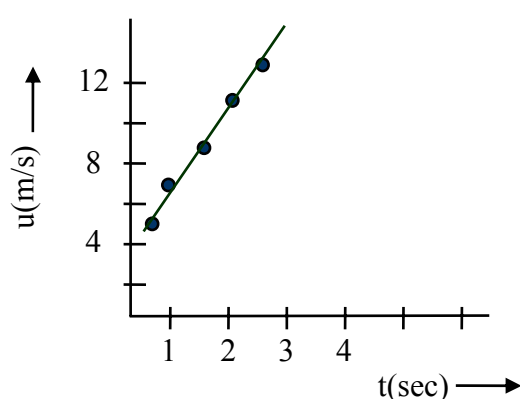
Σημειώνεται ότι η τιμή της κλίσης για την συγκεκριμένη καμπύλη δεν είναι σταθερή αλλά εξαρτάται κάθε φορά από την επιλογή της περιοχής του σημείου A. Δηλαδή, η κλίση της ίδιας καμπύλης σε άλλο σημείο θα είναι διαφορετική. Για παράδειγμα στο προηγούμενο σχήμα η κλίση της καμπύλης στη περιοχή του σημείου B είναι μηδέν. Βέβαια σε περίπτωση όπου η πειραματική καμπύλη ταυτίζεται με ευθεία – και η γραφική αναπαράσταση γίνεται σε χιλιοστομετρικό χαρτί – τότε η κλίση παραμένει σταθερή για οποιοδήποτε σημείο της πειραματικής αυτής ευθείας.

Στις γραφικές παραστάσεις που συνοδεύουν μια πειραματική διαδικασία οι όροι Δy και Δx αντιπροσωπεύουν φυσικά μεγέθη με συγκεκριμένες μονάδες μέτρησης. Έτσι η κλίση της καμπύλης δεν μπορεί να είναι καθαρός αριθμός αλλά διαθέτει μονάδες που προέρχονται απλά από το πηλίκο των επί μέρους μονάδων στους δυο άξονες. Για παράδειγμα σε προβλήματα κινηματικής η κλίση της καμπύλης ταχύτητα – χρόνου : $v = f(t)$ έχει μονάδες m/s^2 , πρόκειται δηλαδή για το γνωστό φυσικό μέγεθος της επιτάχυνσης $\gamma (= \Delta v / \Delta t)$. Γίνεται λοιπόν κατανοητό ότι εν προκειμένω η κλίση δεν μπορεί να ταυτίζεται με την εφαπτομένη μιας γωνίας. Η ταύτιση αυτή συμβαίνει μόνο στη (πολύ σπάνια) περίπτωση που και οι δυο άξονες αντιστοιχούν στα ίδια ακριβώς φυσικά μεγέθη και μάλιστα οι άξονες αυτοί έχουν μοιραστεί με την ίδια κλίμακα.

Για επιπλέον επιβεβαίωση των ανωτέρω θα πρέπει να αναφερθεί ότι η κλίση είναι ανεξάρτητη από την επιλογή της κλίμακας των επί μέρους αξόνων για την χάραξη της καμπύλης. Στην συνέχεια παρουσιάζεται ένας πίνακας πέντε (5) μετρήσεων χρόνου – ταχύτητας που αντιστοιχεί σε ένα τυπικό πρόβλημα κινηματικής. Στα σχήματα που ακολουθούν γίνεται η ταυτόχρονη γραφική παράσταση $v = f(t)$ του προηγούμενου πίνακα με διαφορετική όμως επιλογή της κλίμακας του κατακόρυφου άξονα της ταχύτητας.

Πίνακας Μετρήσεων

α.α.	t (sec)	v (m / sec)
1	0.5	5
2	1.0	7
3	1.5	9
4	2.0	11
5	2.5	13



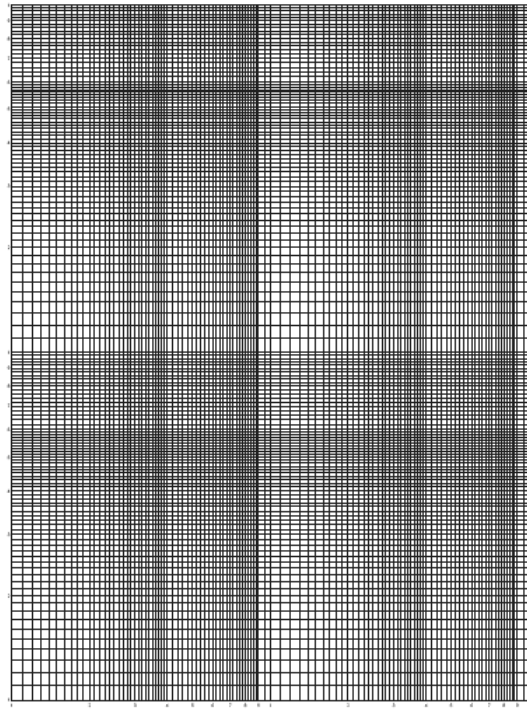
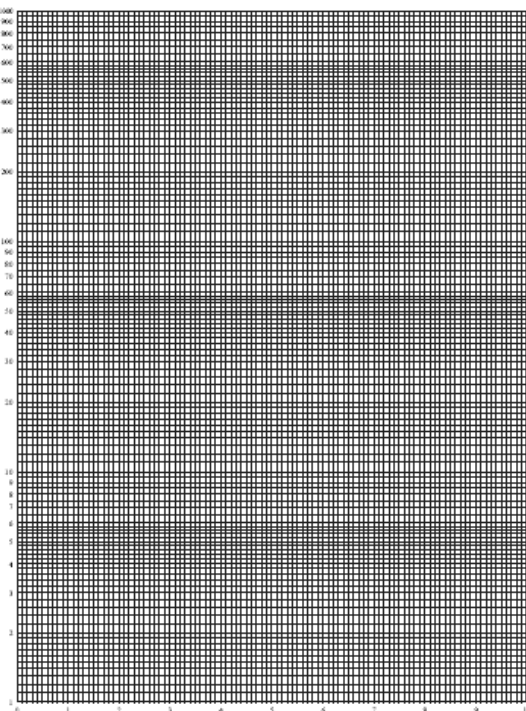
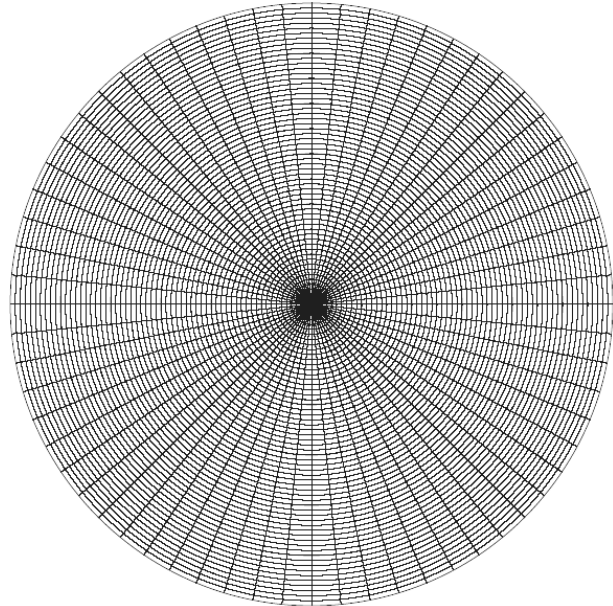
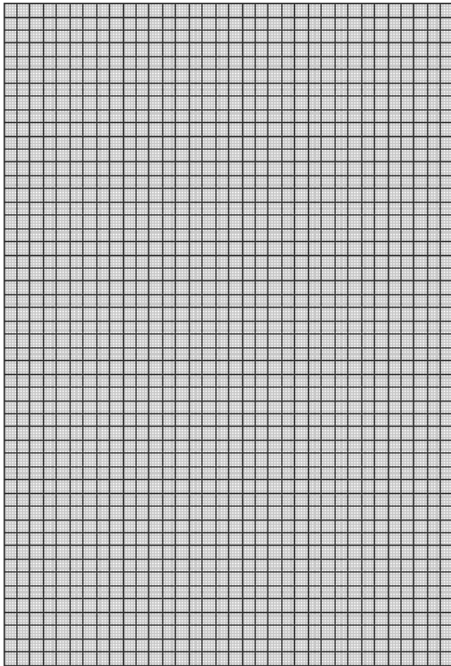
Εύκολα λοιπόν διαπιστώνει κανείς ότι αν και οι δυο προκύπτουσες πειραματικές ευθείες δεν είναι παράλληλες (διαφορετική «γεωμετρική» κλίση), εν τούτοις η κλίση που κάθε φορά ανεξάρτητα υπολογίζεται είναι η ίδια και ίση με 4 m/s^2 . Πρόκειται δηλαδή για την απεικόνιση της περιγραφής μιας ευθύγραμμης κίνησης ομαλά επιταχυνόμενης. Παρατηρείται επίσης ότι οι προεκτάσεις των πειραματικών ευθειών – και στις δυο περιπτώσεις- διέρχονται από το ίδιο σημείο των 3 m/s^2 στον κατακόρυφο άξονα, πρόκειται για τιμή που αντιστοιχεί στην αρχική ταχύτητα ($t = 0 \text{ sec}$) του κινητού για το συγκεκριμένο πρόβλημα.

2.4 Κατηγορίες γραφικών παραστάσεων

Προφανώς γραφικές παραστάσεις δεν γίνονται μόνο σε χιλιοστομετρικά χαρτιά. Υπάρχουν χαρτιά ειδικής χρήσης με μη γραμμική χάραξη των αξόνων των συντεταγμένων τους. Τέτοια χαρτιά είναι τα ημιλογαριθμικά, τα (πλήρη) λογαριθμικά, τα πολικά κ.α. Η δημιουργία γραφικών παραστάσεων σε τέτοιου είδους χαρτιά με ιδιαίτερη χάραξη πραγματοποιείται σε σχετικά μικρό αριθμό πειραματικών μετρήσεων. Τα χαρτιά λογαριθμικής χάραξης αξιοποιούνται ιδιαίτερα στις περιπτώσεις όπου οι τιμές των πειραματικών δεδομένων εκτείνονται σε ένα πολύ μεγάλο εύρος (για παράδειγμα δυο, τριών ή και τεσσάρων τάξεων μεγέθους). Η απεικόνιση των συγκεκριμένων τι-

μών σε συνηθισμένο χιλιοστομετρικό χαρτί θα είχε δυσμενείς επιπτώσεις στην ευκρίνεια του διαγράμματος αλλά και στην ακρίβεια της γραφικής παράστασης.

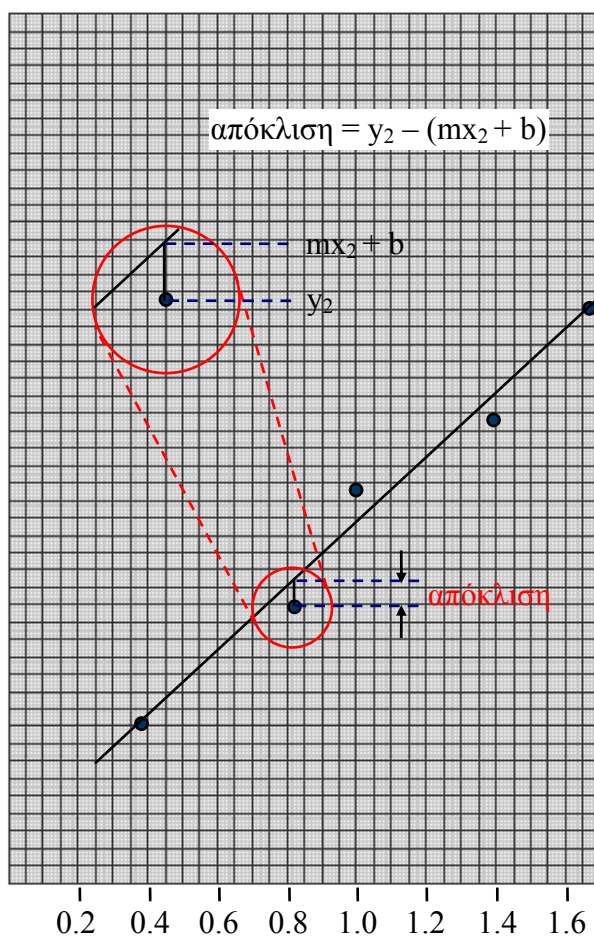
Στην συνέχεια παρουσιάζονται ενδεικτικά τα χαρτιά της σχεδίασης που συνήθως χρησιμοποιούνται σε εργαστηριακές ασκήσεις Φυσικής. Συγκεκριμένα παρουσιάζονται κατά σειρά : χιλιοστομετρικό, πολικό, ημιλογαριθμικό και πλήρες λογαριθμικό χαρτί.



Το χαρτί με γραμμική χάραξη στους άξονες των συντεταγμένων είναι ιδιαίτερα χρήσιμο για γραφικές παραστάσεις γραμμικών ή ακόμη και μη γραμμικών συναρτήσεων χωρίς κανένα μαθηματικό μετασχηματισμό. Στο ημιλογαριθμικό χαρτί ο οριζόντιος άξονας έχει γραμμική χάραξη ενώ ο κατακόρυφος είναι χαραγμένος λογαριθμικά. Σε αυτό το χαρτί γίνονται γραφικές παραστάσεις της γενικής μορφής : $y = a b^x$ οι οποίες – αν και είναι καμπύλες σε γραμμική αναπαράσταση – εδώ «μετατρέπονται» σε ευθείες. Ημιλογαριθμικά χαρτιά υπάρχουν στο εμπόριο σε ποικιλίες ενός, δυο, τριών ή και ακόμη περισσότερων κύκλων. Το πλήρες λογαριθμικό χαρτί έχει και τους δυο άξονες χαραγμένους λογαριθμικά, είναι πολύ χρήσιμο για γραφικές παραστάσεις τις μορφής : $y = a x^b$ (πρόκειται για καμπύλες) τις οποίες και πάλι «μετατρέπει» απεικονιστικά σε ευθείες.

3. Μέθοδος των ελάχιστων τετραγώνων (Least squares method)

Πρόκειται για την μέθοδο που εφαρμόζει την γενική μαθηματική αρχή των ελαχίστων τετραγώνων του Legendre. Η μέθοδος αυτή εφαρμόζεται στην περίπτωση όπου χρειάζεται να σχεδιαστεί η καλλίτερη δυνατή ευθεία που διέρχεται από συγκεκριμένη κατανομή πειραματικών σημείων. Στο σχήμα που ακολουθεί παρουσιάζεται η περίπτωση ευθείας με χαρακτηριστική εξίσωση : $y = mx + b$ και η οποία προσδιορίζεται από τις συγκεκριμένες θέσεις των πειραματικών σημείων. Η ευθεία αυτή είναι έτσι ιδανικά χαραγμένη ώστε το άθροισμα των τετραγώνων των αποκλίσεων των πειραματικών τιμών από αυτή να είναι το ελάχιστο δυνατό.



Ο προσδιορισμός των άγνωστων παραμέτρων m και b της ζητούμενης ευθείας γίνεται αποκλειστικά και μόνο από τις τιμές x_i και y_i των πειραματικών μετρήσεων. Με σκοπό τον αναλυτικό προσδιορισμό θα πρέπει πρώτα να δημιουργηθεί ο πίνακας των πέντε (5) στηλών που ακολουθεί. Η τελευταία γραμμή του συγκεκριμένου πίνακα αντιστοιχεί στο άθροισμα του περιεχομένου της υπερκείμενης στήλης.

Πίνακας υπολογισμών

i	x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	$x_i y_i$
1					
2					
3					
4					
5					
	Σx_i	Σy_i	Σx_i^2	Σy_i^2	$\Sigma x_i y_i$

Σύμφωνα με την μέθοδο των ελάχιστων τετραγώνων αποδεικνύεται ότι οι άγνωστοι παράμετροι m και b δίνονται από τις σχέσεις :

$$m = (\Sigma x_i y_i - N x y) / (\Sigma x_i^2 - N x^2) \text{ και}$$

$$b = (y \Sigma x_i^2 - x \Sigma x_i y_i) / (\Sigma x_i^2 - N x^2)$$

$$\text{με } x = (\Sigma x_i) / N \text{ και } y = (\Sigma y_i) / N.$$

Τα αντίστοιχα σφάλματα δm και δb των παραμέτρων m και b υπολογίζονται από τις σχέσεις :

$$\delta m^2 = (S_x S_y - S_{xy}^2) / (N - 2) S_x^2 \text{ και}$$

$$\delta b^2 = [(S_x S_y - S_{xy}^2) (S_x + N x^2)] / N (N - 2) S_x^2 \text{ όπου :}$$

$$S_x = \Sigma x_i^2 - N x^2, S_y = \Sigma y_i^2 - N y^2 \text{ και } S_{xy} = \Sigma x_i y_i - N x y.$$

4. Υπολογιστική διαδικασία

Προκειμένου να γίνουν περισσότερο κατανοητές οι έννοιες που διαπραγματεύεται η συγκεκριμένη θεωρητική άσκηση προτείνεται η πραγματοποίηση μερικών (ή και όλων) από τις παρακάτω υπολογιστικές διαδικασίες. Πρόκειται για ανεξάρτητες περιπτώσεις με «έτοιμες» πειραματικές μετρήσεις στις οποίες θα χρειαστεί να γίνουν οι γραφικές τους παραστάσεις, ο υπολογισμός της κλίσης σε κάποιες καμπύλες κ.τ.λ.

1. Οι πειραματικές τιμές που προέκυψαν για μια μεταβλητή τάση V , σε σχέση με τον χρόνο t , δίνονται από τον πίνακα που ακολουθεί. Να γίνει η γραφική παράσταση $V = f(t)$ και να βρεθεί η κλίση m της καμπύλης στο σημείο που αντιστοιχεί σε τιμή τάσης $V_0/4$ όπου V_0 η τιμή της τάσης την χρονική στιγμή $t = 0$.

t (sec)	V (Volts)
0	200.0
30	74.0
60	26.7
90	10.5
120	3.8
150	1.5
180	0.5

2. Κινητό εκτελεί ευθύγραμμη κίνηση και το διανυόμενο διάστημα S σε σχέση με τον αντίστοιχο χρόνο t δίνεται από τον πίνακα μετρήσεων που ακολουθεί. Να γίνουν τα διαγράμματα $S = f(t)$, $v = f(t)$ και $\gamma = f(t)$. Σημειώνεται ότι η ταχύτητα v καθώς και η επιτάχυνση γ ικανοποιούν (από ορισμού) τις σχέσεις : $v = \Delta S / \Delta t$ και $\gamma = \Delta v / \Delta t$. Τι ακριβώς κίνηση εκτελεί το συγκεκριμένο κινητό ; Μπορείτε να την χαρακτηρίσετε ;

t (sec)	S (m)
0	0
1	3
2	8
3	15
4	24
5	35
6	48
7	63
8	80
9	99

3. Σύστημα δυο μεταβλητών πυκνωτών συνδέεται σε σειρά έτσι ώστε η συνολική χωρητικότητα του συστήματος να διατηρείται σταθερή. Στο πίνακα που ακολουθεί δίδονται τα διάφορα ζευγάρια τιμών για τις χωρητικότητες c_1 και c_2 . Να συμπληρωθούν οι στήλες του συγκεκριμένου πίνακα, να γίνει η γραφική παράσταση $1/c_2 = f(1/c_1)$ και να υπολογιστεί ΓΡΑΦΙΚΑ η άγνωστη συνολική χωρητικότητα $c_{ολ}$. Σημειώνεται ότι η σύνδεση δυο πυκνωτών σε σειρά ικανοποιεί την σχέση :

$$1/c_{ολ} = 1/c_1 + 1/c_2$$

Επιβεβαιώνεται η προηγούμενη σχέση υπολογισμού της $c_{ολ}$ από την γραφική παράσταση $1 / c_2 = f(1 / c_1)$;

c_1 (μF)	c_2 (μF)	$1 / c_1$ (μF) ⁻¹	$1 / c_2$ (μF) ⁻¹
32	115		
41	66		
55	46		
70	39		
93	34		

4. Σε άσκηση υπολογισμού της επιτάχυνσης βαρύτητας g με μαθηματικό εκκρεμές δημιουργήθηκε ο πίνακας μετρήσεων που ακολουθεί. Να συμπληρωθεί ο πίνακας μετρήσεων - υπολογισμών και να γίνει η γραφική παράσταση $T^2 = f(l)$. Πόση είναι η επιτάχυνση βαρύτητας στον τόπο που έγινε το πείραμα ; Σημειώνεται ότι τα l , T συμβολίζουν το μήκος και την περίοδο του εκκρεμούς αντίστοιχα. Τα μεγέθη αυτά ικανοποιούν τη μαθηματική σχέση : $T^2 = (4\pi^2 l) / g$.

l (m)	T (sec)	T^2 (sec ²)
0.2	0.89	
0.4	1.26	
0.6	1.55	
0.8	1.79	
1.0	2.00	

5. Να γίνουν οι γραφικές παραστάσεις της συνάρτησης $y = (0.5) 2^x$ (με τη μεταβλητή x να μεταβάλλεται στο διάστημα $0 < x < 8$) σε χιλιοστομετρικό αλλά και ημιλογαριθμικό χαρτί τριών κύκλων. Τι παρατηρείτε ; Γιατί διαφέρουν οι καμπύλες στις δυο παραστάσεις ; Να υπολογίσετε (γραφικά) και στις δυο προηγούμενες περιπτώσεις την κλίση στα σημεία $x = 2$ και $x = 5$. Τι ακριβώς παρατηρείτε ; Γνωρίζοντας ότι η κλίση ταυτίζεται με την μαθηματική παράγωγο (dy / dx) μπορείτε να υπολογίσετε θεωρητικά την τιμή της κλίσης στις δυο προηγούμενες περιοχές των σημείων 2 και 5 ;
6. Ο πίνακας που ακολουθεί παρουσιάζει τις τιμές του δείκτη διάθλασης n γυαλιού για διάφορα μήκη κύματος (στο κενό) λ προσπίπτοντος σε αυτό φωτός. Να γίνει προσεκτικά η γραφική παράσταση $n = f(\lambda)$, να υπολογιστεί γραφικά η κλίση της καμπύλης στις περιοχές των 400 και 700 nm αντίστοιχα. Σε ποια περιοχή του ορατού φάσματος (από τις δυο προηγούμενες) ο δείκτης διάθλασης μεταβάλλεται πιο γρήγορα ;

λ (nm)	n
400	1.80

500	1.75
600	1.72
700	1.71
800	1.70

7. Η γραφική παράσταση του σχήματος που προηγήθηκε στη Μέθοδο των Ελαχίστων τετραγώνων προήλθε από μια κατανομή πέντε (5) πειραματικών σημείων που χαρακτηρίζονται από τις συντεταγμένες (x, y) του πίνακα που ακολουθεί. Να συμπληρωθεί ο προηγούμενος πίνακας μετρήσεων - υπολογισμών και αφού αξιολογηθούν οι σχέσεις για τις παραμέτρους m και b να αποδειχθεί ότι η ζητούμενη πειραματική ευθεία είναι η : $y = 2.117 x + 0.206$.

i	x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	$x_i y_i$
1	0.38	1.1			
2	0.83	1.8			
3	1.08	2.6			
4	1.38	3.0			
5	1.75	4.0			
	Σx_i	Σy_i	Σx_i^2	Σy_i^2	$\Sigma x_i y_i$

5. Θεματολογικές ερωτήσεις κατανόησης

1. Ποια είναι η κλίση μιας ευθείας που όλα της τα πειραματικά σημεία κατανέμονται οριζόντια στην γραφική της παράσταση ;
2. «Οι κατακόρυφες ευθείες σε γραφικές παραστάσεις δεν έχουν κλίση» να δικαιολογήσετε τον προηγούμενο ισχυρισμό.
3. Να αποδειχθεί ότι σε δυο ευθείες κάθετες μεταξύ τους το γινόμενο των κλίσεων τους ισούται με -1, δηλαδή ισχύει : $m_1 m_2 = -1$.
4. Να αποδειχθεί ότι η ευθεία που διέρχεται από το σημείο A (x_0, y_0) και έχει κλίση m ικανοποιεί την εξίσωση : $y = m (x - x_0) + y_0$.
5. « Το πρόβλημα εύρεσης της εφαπτομένης σε μια καμπύλη είναι το γενικότερο αλλά και χρησιμότερο πρόβλημα που θέλω όσο τίποτε άλλο να λύσω». Πρόκειται για μια δήλωση – επιθυμία του φημισμένου μαθηματικού Rene Descartes. Περιγράφει την σημαντική δυσκολία που υπάρχει στην ακριβή χάραξη της εφαπτομένης σε μια τυχαία καμπύλη. Θεωρείτε υπερβολική μια τέτοια διατύπωση ή όχι ; δικαιολογήστε τους όποιους ισχυρισμούς σας.

6. Απαραίτητες Γνώσεις

Συναρτήσεις, όρια και συνέχεια συναρτήσεων, παράγωγος συνάρτησης, λογάριθμος.