Σημειώσεις στις ακολουθίες

2.1 Η έννοια της ακολουθίας

Ας ρίξουμε μια ματιά στην επόμενη παράθεση αριθμών:

7, 11, 15, 19, 23, 27, 31, ……..

Όπως καταλαβαίνει κανείς, υπάρχουν **άπειροι** αριθμοί που διαδέχονται ο ένας τον άλλο, με κάποια λογική σειρά. Συγκεκριμένα, κάθε αριθμός προκύπτει απ' τον προηγούμενό του αν προσθέσουμε σ' αυτόν το 4. Έτσι ο όγδοος αριθμός, ο οποίος δεν αναγράφεται είναι το 35, ο ένατος το 39 κ.ο.κ.

Στο επόμενο παράδειγμα θεωρούμε τους πρώτους αριθμούς, δηλαδή τους θετικούς ακεραίους που διαιρούνται μόνον από τον εαυτό τους και τη μονάδα[1]:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, ...

Κατ' αρχάς υπάρχουν **άπειροι πρώτοι αριθμοί**; Η απάντηση είναι **ναι** και η απόδειξή της είναι γνωστή από την αρχαιότητα και οφείλεται στον **Ευκλείδη**.

Αν και στα προηγούμενα παραδείγματα χρησιμοποιήσαμε μόνον ακέραιους αριθμούς, καταλαβαίνει κανείς πως αυτό δεν είναι ο κανόνας. Έτσι, μπορούμε να θεωρήσουμε την άπειρη διαδοχή αριθμών: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$

Τί είναι λοιπόν μια **ακολουθία**; Μια ακολουθία είναι μια **άπειρη διαδοχή αριθμών[2]**. Κάθε αριθμός λέγεται **όρος της ακολουθίας**. Οι τελείες στο τέλος της γραφής, π.χ. της

7, 11, 15, 19, 23, 27, 31, ……..

δηλώνουν πως ακολουθούν και άλλοι (**άπειροι**) όροι και συνεπώς, η διαδικασία αυτή **δεν έχει τέλος**.

Όταν σ' ένα μαθηματικό πρόβλημα είμαστε υποχρεωμένοι να αναφερθούμε σε μια συγκεκριμένη ακολουθία πολλές φορές, ο συμβολισμός με αναγραφή ορισμένων αρχικών όρων είναι εξαιρετικά δύσχρηστος. Γιατί δεν είναι πάντοτε εύκολο να βρεί κανείς τον επόμενο όρο, αφού δεν υπάρχει πάντα κάποιος καλά καθορισμένος κανόνας για την εύρεσή του. Έτσι υιοθετούμε ακριβέστερους και συντομότερους συμβολισμούς.

Μια ακολουθία θα συμβολίζεται με κάποιο γράμμα του ελληνικού ή λατινικού αλφαβήτου, π.χ. ***α*, *β*, *c*, *ω*** κτλ. Είναι σαφές ότι αν σε ένα πρόβλημα έχουμε να αντιμετωπίσουμε

---

[1] Ο αριθμός 1, παρ' όλο που έχει αυτή την ιδιότητα, δεν θεωρείται πρώτος.

[2] Είναι προφανές πως αυτός δεν είναι αυστηρός ορισμός της ακολουθίας.

περισσότερες από μία ακολουθίες, τότε χρησιμοποιούμε **διαφορετικό σύμβολο** για κάθε μια απ' αυτές.

Κάθε όρος της ακολουθίας ορίζεται από δύο πράγματα: Την ακολουθία στην οποία ανήκει και τη θέση που καταλαμβάνει στην ακολουθία αυτή.

Έτσι, αν ονομάσουμε $\boldsymbol{\alpha}$ την ακολουθία 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$,…., ο πρώτος όρος (το 1) θα συμβολίζεται με $\boldsymbol{\alpha_1}$, ο δεύτερος (το $\frac{1}{2}$) με $\boldsymbol{\alpha_2}$, ο τρίτος (το $\frac{1}{3}$) με $\boldsymbol{\alpha_3}$ κ.ο.κ. Ο αριθμός που δηλώνει τη θέση του όρου μέσα σε μια ακολουθία λέγεται **δείκτης**.

Συνήθως δεν ενδιαφερόμαστε για κάποιον συγκεκριμένο όρο, αλλά για τον **οποιονδήποτε** όρο μιας ακολουθίας. Έτσι υιοθετούμε ένα σύμβολο (συνήθως το $\boldsymbol{n}$) για να παραστήσουμε τον **γενικό δείκτη**. **Ο γενικός** ή ***n*-στός** όρος της ακολουθίας *α* είναι ο $\boldsymbol{\alpha_n}$.

Στο προηγούμενο παράδειγμα έχουμε $\boldsymbol{\alpha_n = \frac{1}{n}}$. Αυτός είναι ο **γενικός τύπος** της ακολουθίας, δηλαδή μια σχέση που μας παρέχει άμεσα τον *n*-στό όρο α_n συναρτήσει του δείκτη *n*. Στην περίπτωση αυτή γράφουμε: η ακολουθία $\boldsymbol{\alpha_n, n = 1,2,\ldots}$ (π.χ. η ακολουθία $\frac{1}{n},\ n=1,2,\ldots$) ή η ακολουθία $\boldsymbol{(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}}$ ή πιο απλά, η ακολουθία $\boldsymbol{(\alpha_n)}$.

Ας συμπληρώσουμε την ορολογία που θα χρησιμοποιήσουμε στις ακολουθίες: Ο **επόμενος** του α_n όρος είναι προφανώς ο όρος που βρίσκεται στην επόμενη θέση, δηλαδή ο $\boldsymbol{\alpha_{n+1}}$. Αν τώρα $n > 1$, τότε ο **προηγούμενος** του α_n είναι ο όρος $\boldsymbol{\alpha_{n-1}}$.

Στην ακολουθία

1, 4, 13, 40, 121, 364, ...,

κάθε όρος προκύπτει από τον προηγούμενο αν τον πολλαπλασιάσουμε επί 3 και στη συνέχεια προσθέσουμε το 1. Αυτό συμβολικά μεταφράζεται στη σχέση $\boldsymbol{\alpha_{n+1} = 3\alpha_n + 1}$. Έτσι, αν γνωρίζουμε τον αρχικό όρο α_1 (που στην περίπτωσή μας είναι ο 1) βρίσκουμε τον επόμενο όρο από τη σχέση $\alpha_2 = 3\alpha_1 + 1 = 3\cdot 1 + 1 = 4$ και τον $\alpha_3 = 3\alpha_2 + 1 = 3\cdot 4 + 1 = 13$ κ.ο.κ. Λέμε ότι η ακολουθία ορίζεται με βάση την **αρχική συνθήκη** $\alpha_1 = 1$ και την **αναδρομική σχέση** $\alpha_{n+1} = 3\alpha_n + 1$. Αν αλλάξουμε την αρχική συνθήκη και θέσουμε π.χ. $\alpha_1 = -4$, τότε διατηρώντας την ίδια αναδρομική σχέση $\alpha_{n+1} = 3\alpha_n + 1$, θα πάρουμε μια άλλη ακολουθία: –4, –11, –32, –95,……

2.2 Όριο ακολουθίας

Θεωρούμε την ακολουθία με γενικό τύπο: $a_n = \dfrac{2n^3 + 4(-1)^n n + 3}{n^3 - n + 1}$. Παρακάτω δίνουμε έναν πίνακα με τους αρχικούς όρους της ακολουθίας αυτής (με ακρίβεια 6 δεκαδικών):

$α_1$	*1*	$α_{11}$	*1,984103*
$α_2$	*3,857143*	$α_{12}$	*2,042516*
$α_3$	*1,8*	$α_{13}$	*1,988558*
$α_4$	*2,409836*	$α_{14}$	*2,031124*
$α_5$	*1,92562*	$α_{15}$	*1,991372*
$α_6$	*2,175355*	$α_{16}$	*2,023769*
$α_7$	*1,961424*	$α_{17}$	*1,993261*
$α_8$	*2,09703*	$α_{18}$	*2,018745*
$α_9$	*1,976422*	$α_{19}$	*1,994591*
$α_{10}$	*2,061554*	$α_{20}$	*2,015161*

Παρατηρούμε ότι οι όροι της ακολουθίας αυτής πλησιάζουν ολοένα και περισσότερο προς τον αριθμό 2. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η ακολουθία ***συγκλίνει στο 2*** ή ότι ***το όριό της είναι ο αριθμός 2***. (Ισοδύναμες εκφράσεις: η ακολουθία «τείνει» στο 2 ή «προσεγγίζει» το 2).
Ας δούμε ένα άλλο παράδειγμα: $b_1 = 2$ και $b_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(b_n + \dfrac{2}{b_n}\right)$. Με ένα απλό πρόγραμμα μπορούμε να βρούμε αρκετούς όρους της ακολουθίας (b_n).

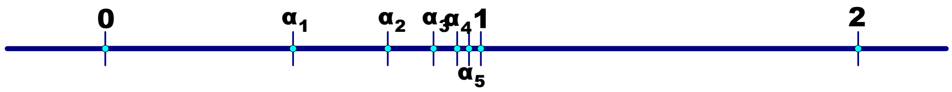
b_1	2
b_2	***1****,5*
b_3	***1,41****666666666666666666666666667*
b_4	***1,41421****5686274509803921568627451*
b_5	***1,41421356237****46899106262955788901*
b_6	***1,414213562373095048801688****96235025*
b_7	***1,4142135623730950488016887242097***
b_8	***1,4142135623730950488016887242097***

«Φαίνεται» ότι η ακολουθία (b_n) προσεγγίζει ταχύτατα κάποιον αριθμό, αφού τα αρχικά ψηφία των όρων της σταθεροποιούνται πολύ γρήγορα. Δεν γνωρίζουμε όμως ποιος είναι αυτός ο αριθμός και **γιατί συμβαίνει αυτό**. Με την αριθμομηχανή του υπολογιστή μας βρίσκουμε ότι $\sqrt{2} =$ **1,4142135623730950488016887242097**...... Υπάρχουν λοιπόν κάτι παραπάνω από **βάσιμες υπόνοιες** ότι ο αριθμός αυτός πρέπει να είναι ο $\boldsymbol{\sqrt{2}}$ **!!**
Και πάλι όμως δεν είμαστε σε θέση να εξηγήσουμε γιατί συμβαίνει αυτό. Επειδή μάλιστα φράσεις όπως «*φαίνεται*», «*βάσιμες υπόνοιες*» και άλλα γκρίζα και σκοτεινά δεν έχουν θέση στα μαθηματικά, θα προσπαθήσουμε να ξεκαθαρίσουμε το τοπίο.

Χρειαζόμαστε έναν ακριβή ορισμό του τι σημαίνει «όριο ακολουθίας» για να μπορούμε να δουλέψουμε με ασφάλεια.

Μια πρώτη απόπειρα θα ήταν να πούμε ότι ένας αριθμός a είναι όριο μιας ακολουθίας (a_n) όταν η απόσταση $|a_n - a|$ των όρων της ακολουθίας (a_n) από το a **συνεχώς μικραίνει**. Αλλά τι πάει να πει «συνεχώς μικραίνει»; Ίσως ότι η απόσταση $|a_{n+1} - a|$ του επόμενου όρου a_{n+1} από το a είναι μικρότερη από την απόσταση $|a_n - a|$ του a_n από το a. Δηλαδή, $|a_{n+1} - a| < |a_n - a|$.

Ένας τέτοιος «ορισμός» θα ήταν ατυχής για πολλούς λόγους: **Θα απέκλειε τις σταθερές ακολουθίες**, επειδή η απόσταση των όρων μιας τέτοιας ακολουθίας από το προφανές όριο είναι σταθερή (ίση με μηδέν). **Θα επέτρεπε την ύπαρξη πολλών ορίων** σε μια ακολουθία, κάτι που η διαίσθησή μας δεν το επιτρέπει. Ας δούμε το παρακάτω σχήμα:



Στο σχήμα αυτό παριστάνονται ορισμένοι από τους όρους της ακολουθίας $a_n = 1 - \frac{1}{2^n}$, $n = 1, 2, \ldots$ Είναι σαφές (σύμφωνα με το σχήμα) ότι η ακολουθία τείνει στο 1. Η απόσταση $|a_n - 1|$ συνεχώς μικραίνει, **αλλά και η απόσταση $|a_n - 2|$ των όρων της ακολουθίας από το 2 επίσης μικραίνει!!** (και από κάθε αριθμό που βρίσκεται δεξιότερα του 1). Αλλά το 2 δεν μπορεί να είναι όριο!

Γιατί άραγε το 2 δεν μπορεί να είναι όριο της παραπάνω ακολουθίας; Γιατί, μπορεί μεν η απόσταση $|a_n - 2|$ να μικραίνει, **ποτέ όμως δεν γίνεται μικρότερη του 1** (ή π.χ. του 0,5).

Τίθεται λοιπόν το ρώτημα: ***πόσο μικρή*** *απαιτείται να γίνει η απόσταση $|a_n - a|$ των όρων της ακολουθίας από το υποψήφιο όριο a;* Η απάντηση είναι άμεση: **όσο θέλουμε!** Τί εννοούμε με αυτό; Εννοούμε ότι όσο **μικρή και αν απαιτήσουμε να γίνει η απόσταση** $|a_n - a|$, λόγου χάρη, μικρότερη από $\varepsilon = 0{,}0000000000001$ (ή καλύτερα 10^{-13}, ένα ασύλληπτα μικρό νούμερο), **θα υπάρχει όρος a_n** της ακολουθίας που να απέχει από το a απόσταση **μικρότερη** και από αυτόν τον τόσο μικρό αριθμό ε.

Άραγε μας αρκεί να βρούμε έναν μόνον τέτοιο όρο; Αν οι **επόμενοι** όροι δεν απέχουν από το a το πολύ το ίδιο μικρή απόσταση, θα είμαστε ικανοποιημένοι; Ας δούμε το εξής παράδειγμα: Η ακολουθία $(-1)^n$, $n = 1, 2, \ldots$ παίρνει τις τιμές -1 (για τα μονά n) και 1 (για τα ζυγά n). Μπορούμε να βρούμε όρους της ακολουθίας που να απέχουν από το 1 πολύ μικρή απόσταση, για την ακρίβεια **να ταυτίζονται** με το 1. Αλλά τι να το κάνουμε όταν, π.χ. ο επόμενος του a_2 (ή του a_4 ή του a_6) εκτινάσσεται σε απόσταση από το 1 ίση με 2;

Θα απαιτήσουμε λοιπόν από το υποψήφιο όριο:
Όσο μικρή *απόσταση* $\varepsilon > 0$ *(μεγάλη προσέγγιση) και αν θεωρήσουμε, θα υπάρχει όρος* a_{n_0} *της ακολουθίας* (a_n) *ο οποίος, τόσο αυτός* ***όσο και οι επόμενοι απ' αυτόν όροι****, να απέχουν από το α απόσταση μικρότερη από ε.*

2.2.1 Ορισμός

Θεωρούμε μια ακολουθία (a_n). *Έστω α ένας πραγματικός αριθμός.*

Θα λέμε ότι η ακολουθία (a_n) ***τείνει*** *ή* ***συγκλίνει*** *στο α, όταν για κάθε* $\varepsilon > 0$ *(οσοδήποτε μικρό) υπάρχει θετικός ακέραιος* n_0, *τέτοιος ώστε* $|a_n - a| < \varepsilon$, *για όλους τους θετικούς ακεραίους* $n \geq n_0$.

Αυτό το γεγονός το παριστάνουμε συμβολικά ως εξής: $a_n \to a$.

Είναι μοναδικό το όριο;

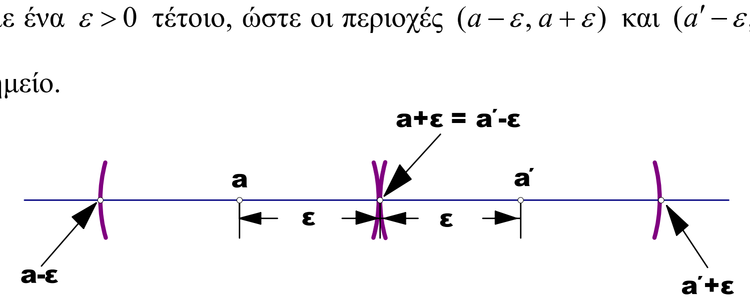
Η διαίσθησή μας λέει ότι το όριο, αν αυτό υπάρχει, πρέπει να είναι μοναδικό. Ίσως αυτό να φαίνεται προφανές, αλλά όσο προφανές και αν φαίνεται, θα πρέπει να απορρέει από τον ορισμό που μόλις τώρα δώσαμε. Αυτό θα ενισχύσει την πεποίθησή μας ότι η επιλογή του συγκεκριμένου ορισμού ήταν επιτυχής.

Στόχος μας λοιπόν είναι να αποδείξουμε την επόμενη πρόταση:

2.2.2 Πρόταση (Μοναδικότητα του ορίου)

Έστω ότι $a_n \to a$ *και* $a_n \to a'$. *Τότε* $a = a'$.

Απόδειξη: Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $a < a'$. Θα καταλήξουμε σε άτοπο. Για το λόγο αυτό, θεωρούμε ένα $\varepsilon > 0$ τέτοιο, ώστε οι περιοχές $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ και $(a'-\varepsilon, a'+\varepsilon)$ να μην έχουν κοινό σημείο.



Εύκολα μπορεί να δείξει κανείς ότι ο μεγαλύτερος τέτοιος ε, όπως φαίνεται στο σχήμα, είναι ίσος με $\frac{a'-a}{2}$. (Το μισό της απόστασης του a από το a').

Εφόσον $a_n \to a$, από τον ορισμό του ορίου, υπάρχει n_0 με $|a_n - a| < \varepsilon$, για κάθε $n \geq n_0$. Ομοίως, υπάρχει n_0' με $|a_n - a'| < \varepsilon$, για κάθε $n \geq n_0'$.

Έστω $m = \max\{n_0, n_0'\}$ (= ο μεγαλύτερος από τους n_0 και n_0'). Τότε, κάθε όρος a_n της ακολουθίας, ο οποίος έπεται του a_m (δηλαδή $n \geq m$), θα έπεται και του a_{n_0} (δηλαδή $n \geq n_0$), και του $a_{n_0'}$ (δηλαδή $n \geq n_0'$). Επομένως θα αληθεύουν ταυτόχρονα οι σχέσεις:

$$|a_n - a| < \varepsilon \text{ και } |a_n - a'| < \varepsilon,$$

δηλαδή $a_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ και $a_n \in (a'-\varepsilon, a'+\varepsilon)$. Αλλά τα διαστήματα $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ και $(a'-\varepsilon, a'+\varepsilon)$ δεν έχουν κανένα κοινό σημείο. Έτσι πετυχαίνουμε λογική αντίφαση.

Με αλγεβρικό τρόπο θα μπορούσε κανείς να πει ότι

$2\varepsilon = a' - a = |a' - a| = |(a_n - a) - (a_n - a')| \leq |a_n - a'| + |a_n - a| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$, δηλαδή $2\varepsilon < 2\varepsilon$, άτοπο. ■

2.2.3 Παρατήρηση

Η προηγούμενη πρόταση μας επιτρέπει να μιλάμε για **το όριο** μιας ακολουθίας και όχι απλά για **ένα όριο** αυτής. Το όριο (αν ασφαλώς υπάρχει) μιας ακολουθίας (a_n) συμβολίζεται με $\mathbf{lim}\boldsymbol{a_n}$.

2.2.3 Παραδείγματα (απλοί υπολογισμοί ορίων)

1. Ας θεωρήσουμε την ακολουθία με γενικό τύπο $\alpha_n = \frac{1}{n}$. Θα αποδείξουμε ότι $\lim \alpha_n = 0$.

Απόδειξη: Σύμφωνα με τον ορισμό που δώσαμε, αρκεί να αποδείξουμε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει θετικός ακέραιος n_0 με την ιδιότητα $|\alpha_n - 0| = \alpha_n = \frac{1}{n} < \varepsilon$ για κάθε $n \geq n_0$.

Η σχέση $\frac{1}{n} < \varepsilon$ είναι ισοδύναμη με την $\frac{1}{\varepsilon} < n$. Θεωρούμε τον ελάχιστο θετικό ακέραιο n με αυτή την ιδιότητα. Όπως γνωρίζουμε, αυτός είναι ο $\left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$, όπου $\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$ είναι το ακέραιο μέρος του αριθμού $\frac{1}{\varepsilon}$. (Για παράδειγμα, αν $\varepsilon = 0{,}000003 = 3 \cdot 10^{-6}$, τότε $\frac{1}{\varepsilon} = \frac{10^6}{3} =$

$=333333{,}333....$, οπότε $\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]=333333$ και επομένως $\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1=333334$). Θέτουμε λοιπόν $n_0=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1$. Τότε $\frac{1}{\varepsilon}<n_0$ και επομένως, αν $n\geq n_0$, θα ισχύει $\frac{1}{\varepsilon}<n\Rightarrow\frac{1}{n}<\varepsilon$. Άρα $|a_n|=\frac{1}{n}<\varepsilon$.

Πράγματι λοιπόν, έχουμε $\lim a_n=0$.

Σημείωση: Μια ακολουθία με όριο το μηδέν λέγεται **μηδενική**. Άρα η ακολουθία του παραδείγματος 1 είναι μηδενική.

2. Ας θεωρήσουμε τις ακολουθίες με γενικούς τύπους $\beta_n=\frac{3}{2^n}$ και $\gamma_n=\frac{1}{\sqrt{n}}$. Θα αποδείξουμε ότι οι ακολουθίες (β_n) και (γ_n) είναι μηδενικές.

Απόδειξη: α) Η ακολουθία (β_n): Αρχικά, θα αποδείξουμε ότι $2^n>3n$ για κάθε $n\geq 4$.

Για $n=4$ έχουμε $2^n=2^4=16$ και $3n=3\cdot 4=12$. Άρα η πρόταση ισχύει για $n=4$.

Έστω ότι $2^k>3k$. Τότε $2^{k+1}=2^k+2^k>3k+3k\geq 3k+3=3(k+1)$ και άρα η πρόταση ισχύει για κάθε $n\geq 4$.

Επομένως $\beta_n=\frac{3}{2^n}<\frac{3}{3n}=\frac{1}{n}$, για κάθε $n\geq 4$. Έστω λοιπόν $\varepsilon>0$. Από το προηγούμενο παράδειγμα προκύπτει ότι υπάρχει n_0 με την ιδιότητα $\frac{1}{n}<\varepsilon$ για κάθε $n\geq n_0$. Αν λοιπόν $n_0'=\max\{n_0,4\}$, τότε θα έχουμε $\beta_n=\frac{3}{2^n}<\frac{1}{n}<\varepsilon$ για κάθε $n\geq n_0'$.

β) Η ακολουθία (γ_n): Έστω $\varepsilon>0$. Η σχέση $|\gamma_n|=\frac{1}{\sqrt{n}}<\varepsilon$ είναι ισοδύναμη με τη σχέση $\frac{1}{\varepsilon^2}<n$. Θέτουμε $n_0=\left[\frac{1}{\varepsilon^2}\right]+1$ και τελειώσαμε.

3. Ας θεωρήσουμε την ακολουθία με γενικό τύπο $\delta_n=\frac{3n-2}{2n+1}$. Τότε $\lim\delta_n=\frac{3}{2}$.

Απόδειξη: Κατ' αρχάς έχουμε: $\left|\delta_n-\frac{3}{2}\right|=\left|\frac{3n-2}{2n+1}-\frac{3}{2}\right|=\left|\frac{-7}{2(2n+1)}\right|=\frac{7}{2(2n+1)}<\frac{7}{2n+1}<\frac{7}{2n}<\frac{7}{n}$. Έστω $\varepsilon>0$. Τότε και $\varepsilon'=\frac{\varepsilon}{7}>0$. Άρα υπάρχει n_0 με την ιδιότητα $\frac{1}{n}<\varepsilon'$ για κάθε $n\geq n_0$. Επομένως $\left|\delta_n-\frac{3}{2}\right|<\frac{7}{n}<7\varepsilon'=\varepsilon$, για κάθε $n\geq n_0$.

Σημείωση: Αν στο προηγούμενο παράδειγμα παίρναμε ε αντί $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{7}$, θα καταλήγαμε σε μια σχέση της μορφής $\left|\delta_n - \frac{3}{2}\right| < 7\varepsilon$. Αυτό όμως που έπρεπε να αποδείξουμε (σύμφωνα με τον ορισμό) ήταν $\left|\delta_n - \frac{3}{2}\right| < \varepsilon$.

4. Ας θεωρήσουμε την ακολουθία με γενικό τύπο $d_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$. Τότε $\lim d_n = 0$. Θα δείξουμε ότι η ακολουθία αυτή είναι μηδενική.

Απόδειξη: Παρατηρούμε ότι $d_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \dfrac{\left(\sqrt{n+1}\right)^2 - \left(\sqrt{n}\right)^2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \dfrac{n+1-n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} =$

$= \dfrac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} < \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ και προφανώς $d_n > 0$. (Γιατί $\sqrt{n+1} > \sqrt{n}$).

Έστω $\varepsilon > 0$. Επειδή $\lim \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$, (βλέπε παράδειγμα 2.2.3.2 (β)) υπάρχει n_0 με την ιδιότητα $\frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon$, για κάθε $n \geq n_0$. Άρα και $|d_n| = d_n < \frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon$, για κάθε $n \geq n_0$.

5. Η ακολουθία $\alpha_n = (-1)^n$, $n = 1, 2, \ldots$ που θεωρήσαμε στη σελίδα ... δεν συγκλίνει.

Απόδειξη: Πράγματι, αν η (α_n) συνέκλινε σ' έναν πραγματικό αριθμό α, τότε για $\varepsilon = \frac{1}{2}$, θα υπήρχε n_0 με την ιδιότητα $\left|\alpha_n - \alpha\right| = \left|(-1)^n - \alpha\right| < \frac{1}{2}$ για κάθε $n \geq n_0$. Αλλά αν $n \geq n_0$, τότε θα έχουμε $n+1 > n_0$. Θα ισχύουν λοιπόν οι σχέσεις: $\left|(-1)^n - \alpha\right| < \frac{1}{2}$ και $\left|(-1)^{n+1} - \alpha\right| < \frac{1}{2}$.

Επομένως $\left|(-1)^n - (-1)^{n+1}\right| = \left|(-1)^n - \alpha + \alpha - (-1)^{n+1}\right| \leq |(-1)^n - \alpha| + |(-1)^{n+1} - \alpha| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$.

Αλλά, $\left|(-1)^n - (-1)^{n+1}\right| = \left|(-1)^n(1 - (-1))\right| = 2|(-1)^n| = 2$. Συνεπώς $2 < 1$, άτοπο.

Άλυτες ασκήσεις

1. Να αποδείξετε με τη βοήθεια του ορισμού του ορίου ότι οι παρακάτω ακολουθίες είναι μηδενικές:

i) $\left(\frac{1}{n^2 - n + 1}\right)$, **ii)** $\left(\frac{1}{2n!}\right)$, **iii)** $\left(\frac{3}{\sqrt{2n^2 + n - 1}}\right)$, **iv)** $\lim\left(\sqrt{4n^2 + 2} - 2n\right)$

2. Να βρείτε με τη βοήθεια του ορισμού του ορίου τα όρια:

i) $\lim \frac{-n+3}{3n-1}$, **ii)** $\lim \frac{6n^2 - 3n + 1}{3n^2 + 2n - 4}$.

3. Να αποδείξετε ότι η ακολουθία $\left((-2)^n\right)$ δεν συγκλίνει.

2.3 Φραγμένες ακολουθίες

2.3.1 Ορισμός

i) *Μια ακολουθία* (α_n) *λέγεται* ***άνω φραγμένη*** *αν υπάρχει κάποιος πραγματικός αριθμός s με την ιδιότητα* $\alpha_n \leq s$, *για κάθε* $n = 1, 2, \ldots$ *Ο αριθμός s λέγεται* ***άνω φράγμα*** *της ακολουθίας* (α_n).

ii) *Μια ακολουθία* (α_n) *λέγεται* ***κάτω φραγμένη*** *αν υπάρχει κάποιος πραγματικός αριθμός t με την ιδιότητα* $t \leq \alpha_n$, *για κάθε* $n = 1, 2, \ldots$ *Ο αριθμός t λέγεται* ***κάτω φράγμα*** *της ακολουθίας* (α_n).

iii) *Μια ακολουθία* (α_n) *λέγεται* ***φραγμένη*** *αν είναι άνω και κάτω φραγμένη, δηλαδή υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί t και s με την ιδιότητα* $t \leq \alpha_n \leq s$, *για κάθε* $n = 1, 2, \ldots$

2.3.2 Παρατήρηση

Το άνω φράγμα, αν υπάρχει δεν είναι μοναδικό. Αν ο *s* είναι ένα άνω φράγμα, τότε και κάθε αριθμός μεγαλύτερος του *s* είναι επίσης ένα άνω φράγμα της ακολουθίας (α_n).

Ομοίως, το κάτω φράγμα μιας κάτω φραγμένης ακολουθίας δεν είναι μοναδικό.

2.3.3 Παραδείγματα

1. Η ακολουθία $\alpha_n = 1 - \frac{1}{2^n}$, $n = 1, 2, \ldots$ είναι άνω φραγμένη και ένα άνω φράγμα είναι ο αριθμός 1. Είναι δε και κάτω φραγμένη και ένα κάτω φράγμα είναι το $\frac{1}{2}$. Επομένως η (α_n) είναι φραγμένη.

2. Η ακολουθία $b_n = \cos n$, $n = 1, 2, \ldots$ είναι φραγμένη γιατί $-1 \leq \cos n \leq 1$ για κάθε $n = 1, 2, \ldots$.

3. Η ακολουθία $c_n = 2^n$, $n = 1, 2, \ldots$ είναι κάτω φραγμένη (π.χ. από το 2). Δεν είναι όμως άνω φραγμένη, καθώς το 2^n μπορεί να πάρει οσοδήποτε μεγάλες τιμές.

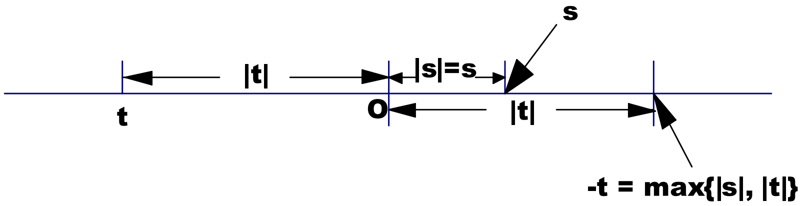
2.3.4 Ορισμός

Μια ακολουθία (α_n) *λέγεται* ***απολύτως φραγμένη*** *αν υπάρχει πραγματικός (μη αρνητικός) αριθμός l με την ιδιότητα* $|\alpha_n| \leq l$, *για κάθε* $n = 1, 2, \ldots$

2.3.5 Πρόταση

Μια ακολουθία είναι φραγμένη αν και μόνον αν είναι απολύτως φραγμένη.

Απόδειξη: Επειδή $|\alpha_n| \le l \Leftrightarrow -l \le \alpha_n \le l$, μια απολύτως φραγμένη ακολουθία είναι φραγμένη.



Απομένει να δείξουμε ότι μια φραγμένη ακολουθία είναι και απολύτως φραγμένη.
Έστω $t \le \alpha_n \le s$, για κάθε $n = 1, 2, \dots$ Θέτουμε $l = \max\{|s|, |t|\}$. Τότε $l \ge |t| \ge -t$ και συνεπώς $-l \le t \le \alpha_n$. Επίσης, $l \ge |s| \ge s \ge \alpha_n$. Άρα $-l \le \alpha_n \le l \Leftrightarrow |\alpha_n| \le l$.■

Η επόμενη πρόταση συνδέει την έννοια της συγκλίνουσας ακολουθίας με αυτήν της φραγμένης.

2.3.6 Πρόταση

Μια ακολουθία που συγκλίνει σ' έναν πραγματικό αριθμό είναι φραγμένη.

Απόδειξη: Υποθέτουμε ότι $\alpha_n \to \alpha$. Ας θεωρήσουμε ένα $\varepsilon > 0$ (π.χ. $\varepsilon = 1$). Τότε υπάρχει n_0 με την ιδιότητα $|\alpha_n - \alpha| < \varepsilon$, για κάθε $n \ge n_0$. Επομένως $-\varepsilon < \alpha_n - \alpha < \varepsilon \Leftrightarrow$ $-\varepsilon + \alpha < \alpha_n < \varepsilon + \alpha$, για κάθε $n \ge n_0$.
Έστω $l = \max\{|\alpha_1|, \dots, |\alpha_{n_0 - 1}|, |\alpha - \varepsilon|, |\alpha + \varepsilon|\}$.

Αν $1 \le n \le n_0 - 1$, τότε $|\alpha_n| \le l$.

Έστω τώρα $n \ge n_0$. Τότε, η σχέση $l \ge |\alpha - \varepsilon| \ge -\alpha + \varepsilon$ (από τον ορισμό του *l*) συνεπάγεται ότι $-l \le -\varepsilon + \alpha$. Αλλά γνωρίζουμε ότι $-\varepsilon + \alpha < \alpha_n$, για κάθε $n \ge n_0$. Επομένως $-l < \alpha_n$. Ομοίως, έχουμε $l \ge |\alpha + \varepsilon| \ge \alpha + \varepsilon > \alpha_n$, δηλαδή $\alpha_n < l$. Επομένως $-l \le \alpha_n \le l \Leftrightarrow |\alpha_n| \le l$.■

2.3.7 Παρατήρηση

Το αντίστροφο της πρότασης 2.3.6 δεν ισχύει. Για παράδειγμα, η ακολουθία $\alpha_n = (-1)^n$, $n = 1, 2, \dots$ είναι φραγμένη (εφόσον $|\alpha_n| = 1$) αλλά, όπως είδαμε στο παράδειγμα 2.2.3.5 δεν συγκλίνει.

2.3.8 Παραδείγματα

1. Να αποδειχθεί ότι οι ακολουθίες με γενικούς τύπους

$$\textbf{i)}\ \alpha_n = \frac{3n^2+n+2}{n^2-n+1} \quad \text{και} \quad \textbf{ii)}\ \beta_n = 1+\left(-\tfrac{1}{2}\right)+\left(-\tfrac{1}{2}\right)^2+\cdots+\left(-\tfrac{1}{2}\right)^{n-1}$$

είναι φραγμένες.

Απόδειξη: i) Έχουμε $n^2-n+1=n(n-1)+1\geq 1>0$, για κάθε $n=1,2,\ldots$. Επομένως $\alpha_n=\dfrac{3n^2+n+2}{n^2-n+1}$, για κάθε $n=1,2,\ldots$. Η (α_n) είναι λοιπόν κάτω φραγμένη. Θα δείξουμε ότι είναι και άνω φραγμένη: Αν $0\leq \alpha_n=\dfrac{3n^2+n+2}{n^2-n+1}\leq\sigma$, για κάποιον αριθμό *σ*, τότε $3n^2+n+2\leq\sigma(n^2-n+1)\Leftrightarrow(\sigma-3)n^2-(\sigma+1)n+\sigma-2\geq 0$. Για $n=1$ παίρνουμε $\sigma\geq 6$. Θέτουμε $\sigma=6$. Θα αποδείξουμε ότι $\alpha_n=\dfrac{3n^2+n+2}{n^2-n+1}\leq 6$. Έχουμε $\dfrac{3n^2+n+2}{n^2-n+1}\leq 6\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 3n^2+n+2\leq 6(n^2-n+1)\Leftrightarrow 3n^2-7n+4\geq 0$. Τώρα, το τριώνυμο $3x^2-7x+4$ έχει ρίζες το 1 και το $\dfrac{4}{3}<2$. Επομένως, για $n\geq 2$ θα έχουμε $3n^2-7n+4>0$, ενώ για $n=1$ έχουμε $3n^2-7n+4=0$.

ii) Ξέρουμε ότι $\beta_n=1+\left(-\tfrac{1}{2}\right)+\left(-\tfrac{1}{2}\right)^2+\cdots+\left(-\tfrac{1}{2}\right)^{n-1}=\dfrac{1-\left(-\tfrac{1}{2}\right)^n}{1-\left(-\tfrac{1}{2}\right)}=\dfrac{2}{3}\left[1-\left(-\tfrac{1}{2}\right)^n\right]$.

Επομένως $|\beta_n|=\dfrac{2}{3}\left|1-\left(-\tfrac{1}{2}\right)^n\right|\leq\dfrac{2}{3}\left[1+\left|-\tfrac{1}{2}\right|^n\right]=\dfrac{2}{3}\left[1+\dfrac{1}{2^n}\right]<\dfrac{2}{3}(1+1)=\dfrac{4}{3}$.

2. Δίνονται οι αναδρομικές ακολουθίες:

$$\textbf{i)}\ \alpha_{n+1}=\frac{2\alpha_n+3}{3\alpha_n+2} \text{ και } \alpha_1=\frac{1}{2}. \qquad \textbf{ii)}\ \alpha_{n+1}=\sqrt{2+\alpha_n} \text{ και } \alpha_1=\frac{3}{2}.$$

Να δειχθεί ότι αυτές είναι φραγμένες.

Απόδειξη: i) Κατ' αρχάς $\alpha_n>0$, για κάθε $n=1,2,\ldots$ Ακόμη, $\alpha_1=\dfrac{1}{2}<\dfrac{3}{2}$. Έστω $\alpha_n<\dfrac{3}{2}$. Τότε $0<\alpha_{n+1}=\dfrac{2\alpha_n+3}{3\alpha_n+2}=\dfrac{\tfrac{2}{3}\cdot 3\alpha_n+\tfrac{2}{3}\cdot 2+3-\tfrac{4}{3}}{3\alpha_n+2}=\dfrac{2}{3}+\dfrac{5}{3}\cdot\dfrac{1}{3\alpha_n+2}\underset{\alpha_n>0}{<}\dfrac{2}{3}+\dfrac{5}{3}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}$. Επομένως $\alpha_n<\dfrac{3}{2}$, για κάθε $n=1,2,\ldots$.

ii) Έστω ότι $\alpha_n<\sigma$. Για να είναι το *σ* ένα άνω φράγμα θα πρέπει και $\alpha_{n+1}=\sqrt{2+\alpha_n}<\sigma$. Εφόσον $\sqrt{2+\alpha_n}<\sqrt{2+\sigma}$, αρκεί να έχουμε: $\sqrt{2+\sigma}\leq\sigma\Rightarrow\sigma^2-\sigma-2\geq 0\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow(\sigma-2)(\sigma+1)\geq 0\Leftrightarrow -1\leq\sigma\leq 2$.

Θέτουμε λοιπόν $\sigma = 2$. Παρατηρούμε ότι: $\alpha_1 = \dfrac{3}{2} < 2 = \sigma$. Αν τώρα $\alpha_n < 2$, τότε $\alpha_{n+1} = \sqrt{2+\alpha_n} < \sqrt{2+2} = 2$. Άρα $\alpha_n < 2$, για κάθε $n = 1, 2, \ldots$

Άλυτες ασκήσεις

1. Δίνονται οι ακολουθίες $\alpha_n = \dfrac{3n^2+2n-1}{2n^2-n+2}$ και $\beta_n = 2 - \dfrac{2}{3} + \dfrac{2}{9} - \cdots + (-1)^n \dfrac{2}{3^n}$, $n = 1, 2, \ldots$ Να δείξετε ότι είναι φραγμένες.

2. Δίνονται οι ακολουθίες που ορίζονται από τις σχέσεις: **i)** $\alpha_{n+1} = \dfrac{5\alpha_n + 1}{2\alpha_n + 5}$, $\alpha_1 = 1$ και **ii)** $\beta_{n+1} = \sqrt{1+2\beta_n}$, $\beta_1 = 2$. Να δείξετε ότι είναι φραγμένες.

2.4 Κανόνες υπολογισμού ορίων ακολουθιών

Το να υπολογίζει κανείς όρια ακολουθιών με βάση τον ορισμό του ορίου, είναι συνήθως μια αρκετά επίπονη διαδικασία. Στην παράγραφο αυτή θα γνωρίσουμε κάποιους βασικούς κανόνες, οι οποίοι απλουστεύουν τα πράγματα.

2.4.1 Πρόταση

i) *Αν* $\alpha_n = \alpha \in \mathbb{R}$ *για κάθε* $n = 1, 2, \ldots$, *τότε* $\lim \alpha_n = \alpha$.

ii) *Αν* $\lim \alpha_n = \alpha$ *και* $\lim \beta_n = \beta$, *τότε* $\lim(\alpha_n + \beta_n) = \alpha + \beta$.

iii) *Αν* $\lim \alpha_n = \alpha$ *τότε* $\lim |\alpha_n| = |\alpha|$.

iv) *Αν* $\lim \alpha_n = \alpha$ *και* $\lambda \in \mathbb{R}$, *τότε* $\lim(\lambda \alpha_n) = \lambda \alpha$.

Απόδειξη: i) Η απόδειξη είναι άμεση, αφού $|\alpha_n - \alpha| = 0 < \varepsilon$ για κάθε $n = 1, 2, \ldots$

ii) Παρατηρούμε ότι $|(\alpha_n + \beta_n) - (\alpha + \beta)| = |(\alpha_n - \alpha) + (\beta_n - \beta)| \le |\alpha_n - \alpha| + |\beta_n - \beta|$.

Έστω $\varepsilon > 0$. Θα πρέπει να επιλέξουμε το *n*, ώστε $|\alpha_n - \alpha| + |\beta_n - \beta| < \varepsilon$, για κάθε αρκούντως μεγάλο *n*. Αν καθένας από τους όρους $|\alpha_n - \alpha|$ και $||\beta_n - \beta|$ είναι μικρότερος του $\varepsilon / 2$, τότε θα έχουμε επιτύχει το επιθυμητό αποτέλεσμα. Γι' αυτό, θέτουμε $\varepsilon' = \varepsilon / 2 > 0$.

Εφόσον $\lim \alpha_n = \alpha$, υπάρχει θετικός ακέραιος n_0 με $|\alpha_n - \alpha| < \varepsilon'$, για κάθε $n \ge n_0$.

Ομοίως υπάρχει θετικός ακέραιος n_0' με $|\beta_n - \beta| < \varepsilon'$ για κάθε $n \ge n_0'$.

Αν $n_0'' = \max\{n_0, n_0'\}$, τότε για κάθε $n \geq n_0''$, θα ισχύουν ταυτόχρονα οι σχέσεις $|\alpha_n - \alpha| < \varepsilon'$ και $|\beta_n - \beta| < \varepsilon'$. Με πρόσθεση κατά μέλη παίρνουμε $|\alpha_n - \alpha| + |\beta_n - \beta| < \varepsilon' + \varepsilon' = \varepsilon$, για κάθε $n \geq n_0''$.

iii) Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε υπάρχει θετικός ακέραιος n_0 με $|\alpha_n - \alpha| < \varepsilon$ για κάθε $n \geq n_0$. Από τη σχέση $\left||\alpha_n| - |\alpha|\right| \leq |\alpha_n - \alpha|$ προκύπτει ότι $\left||\alpha_n| - |\alpha|\right| < \varepsilon$ για κάθε $n \geq n_0$.

iv) Αν $\lambda = 0$ τότε $\lim(\lambda\alpha_n) = \lim 0 = 0 = \lambda\alpha$.

Αν $\lambda \neq 0$, θεωρούμε $\varepsilon > 0$. Τότε $\varepsilon' = \dfrac{\varepsilon}{|\lambda|} > 0$ και υπάρχει θετικός ακέραιος n_0 με $|\alpha_n - \alpha| < \varepsilon'$, για κάθε $n \geq n_0$. Επομένως $|\lambda\alpha_n - \lambda\alpha| = |\lambda||\alpha_n - \alpha| < |\lambda|\varepsilon' = \varepsilon$, για κάθε $n \geq n_0$.■

2.4.3 Λήμμα

Αν η ακολουθία (α_n) είναι φραγμένη και η ακολουθία (β_n) είναι μηδενική, τότε η ακολουθία $(\alpha_n\beta_n)$ είναι μηδενική.

Απόδειξη: Εφόσον η (α_n) είναι φραγμένη, υπάρχει $l > 0$ με $|\alpha_n| \leq l$ για κάθε $n = 1, 2, \ldots$ Θεωρούμε ένα $\varepsilon > 0$. Τότε $\varepsilon' = \dfrac{\varepsilon}{l} > 0$. Επειδή η (β_n) είναι μηδενική, υπάρχει n_0, τέτοιο ώστε $|\beta_n| < \varepsilon'$, για κάθε $n \geq n_0$. Επομένως $|\alpha_n\beta_n| = |\alpha_n||\beta_n| < l\varepsilon' = \varepsilon$, για κάθε $n \geq n_0$.■

2.4.4 Πρόταση

i) *Αν $\lim\alpha_n = \alpha$ και $\lim\beta_n = \beta$, τότε $\lim(\alpha_n\beta_n) = \alpha\beta$.*

ii) *Αν $\lim\alpha_n = \alpha$ και $\lim\beta_n = \beta$, με $\beta_n \neq 0$ και $\beta \neq 0$, τότε $\lim\left(\dfrac{\alpha_n}{\beta_n}\right) = \dfrac{\alpha}{\beta}$.*

iii) *Αν $\lim\alpha_n = \alpha$, με $\alpha_n \geq 0$, για κάθε $n = 1, 2, \ldots$ και $\alpha \geq 0$, τότε $\lim\sqrt{\alpha_n} = \sqrt{\alpha}$.*

*Γενικότερα, αν k είναι ένας **σταθερός** θετικός ακέραιος, τότε $\lim\sqrt[k]{\alpha_n} = \sqrt[k]{\alpha}$.*

Απόδειξη: i) Η (α_n) είναι συγκλίνουσα και άρα φραγμένη (πρόταση 2.3.6).

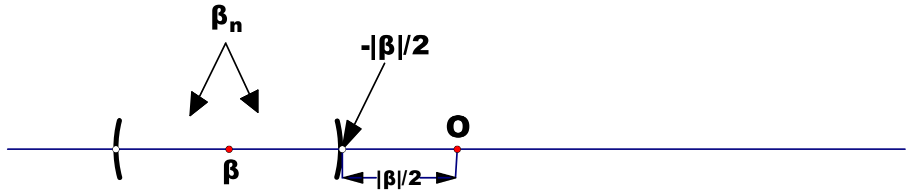
Εφόσον $\beta_n \to \beta$, η $(\beta_n - \beta)$ είναι μηδενική.

Από το λήμμα 2.4.3 συμπεραίνουμε ότι $\lim[\alpha_n(\beta_n - \beta)] = 0$.

Επίσης, $\lim[(\alpha_n - \alpha)\beta] = \beta\lim[\alpha_n - \alpha] = 0$ (πρόταση 2.4.1.vi).

Επομένως $\lim(\alpha_n\beta_n - \alpha\beta) = \lim[\alpha_n(\beta_n - \beta)] + \lim[(\alpha_n - \alpha)\beta] = 0 + 0 = 0$ και άρα $\lim(\alpha_n\beta_n) = \alpha\beta$.

*[ii) Παρατηρούμε ότι $\left|\frac{\alpha_n}{\beta_n}-\frac{\alpha}{\beta}\right|=\frac{|\beta\alpha_n-\alpha\beta_n|}{|\beta_n||\beta|}$. Το όριο του αριθμητή είναι $|\beta\alpha-\alpha\beta|=0$ ((ii) και (iv) της πρότασης 2.4.1) και συνεπώς, ο αριθμητής μπορεί να γίνει όσο θέλουμε μικρός. Η ύπαρξη όμως του $|\beta_n|$ στον παρανομαστή δημιουργεί δυσκολίες καθώς, για να είναι το κλάσμα μικρότερο του ε, θα πρέπει το $|\beta_n|$ να είναι **μεγαλύτερο** από κάποιον αριθμό. Ας δούμε το επόμενο σχήμα:



Εφόσον $\lim\beta_n=\beta$, οι όροι της ακολουθίας (β_n) συσσωρεύονται σε ένα ανοικτό διάστημα που δεν περιέχει το μηδέν. Μια ικανή απόσταση από το μηδέν είναι ο αριθμός $\frac{|\beta|}{2}>0$.
Εφόσον λοιπόν $\lim\beta_n=\beta$, υπάρχει n_0, τέτοιο ώστε $|\beta_n-\beta|<|\beta|/2$, για κάθε $n\geq n_0$. Αλλά $|\beta|-|\beta_n|\leq\big||\beta|-|\beta_n|\big|\leq|\beta-\beta_n|$ και επομένως $|\beta|-|\beta_n|<|\beta|/2\Leftrightarrow|\beta|/2<|\beta_n|$, για κάθε $n\geq n_0$. Τώρα συνυπολογίζουμε και το γεγονός ότι $\beta\alpha_n-\alpha\beta_n\to 0$. Υπάρχει λοιπόν n_0', τέτοιο ώστε $|\beta\alpha_n-\alpha\beta_n|<|\beta|^2\,\varepsilon/2$. (Η χρήση του συντελεστή $|\beta|^2/2$ δικαιολογείται στη συνέχεια).
Αν λοιπόν $n\geq n_0''$, όπου $n_0''=\max\{n_0,n_0'\}$, τότε $\left|\frac{\alpha_n}{\beta_n}-\frac{\alpha}{\beta}\right|=\frac{|\beta\alpha_n-\alpha\beta_n|}{|\beta_n||\beta|}<\frac{|\beta|^2\,\varepsilon/2}{\frac{|\beta|}{2}|\beta|}=\varepsilon$ και τελειώσαμε.

iii) Εδώ διακρίνουμε δύο περιπτώσεις: **α)** $\alpha=0$: Έστω $\varepsilon>0$. Εφόσον, $\alpha_n\to 0$, υπάρχει n_0 με $0\leq\alpha_n<\varepsilon^k\Leftrightarrow\sqrt[k]{\alpha_n}<\varepsilon$, για κάθε $n\geq n_0$. Άρα $\lim\sqrt[k]{\alpha_n}=0$.

β) $\alpha>0$: Χρησιμοποιούμε την ταυτότητα:

$$x^k-y^k=(x-y)(x^{k-1}+x^{k-2}y+x^{k-3}y^2+\cdots+xy^{k-2}+y^{k-1}).$$

Αν θέσουμε $x=\sqrt[k]{\alpha_n}$ και $y=\sqrt[k]{\alpha}$, θα πάρουμε:

$$\alpha_n-\alpha=(\sqrt[k]{\alpha_n}-\sqrt[k]{\alpha})(\sqrt[k]{\alpha_n^{k-1}}+\sqrt[k]{\alpha_n^{k-2}\alpha}+\sqrt[k]{\alpha_n^{k-3}\alpha^2}+\cdots+\sqrt[k]{\alpha_n\alpha^{k-2}}+\sqrt[k]{\alpha^{k-1}}).$$

Εφόσον $\lim\alpha_n=\alpha$, θα υπάρχει n_0, τέτοιο ώστε $|\alpha_n-\alpha|<\frac{\alpha}{2}$, για κάθε $n\geq n_0$. Από τη σχέση αυτή παίρνουμε, όπως στο όριο πηλίκου, $\alpha_n>\frac{\alpha}{2}$, για κάθε $n\geq n_0$.

Αν λοιπόν *i* είναι ένας ακέραιος από 0 έως $k-1$, τότε θα έχουμε:

$$\sqrt[k]{\alpha_n^{k-1-i}\alpha^i} \underset{\alpha_n > \frac{\alpha}{2}}{>} \sqrt[k]{\frac{\alpha^{k-1-i}}{2^{k-1-i}}\alpha^i} = \frac{\sqrt[k]{\alpha^{k-1}}}{\sqrt[k]{2^{k-1-i}}} \underset{\substack{\text{μεγαλώνουμε} \\ \text{τον παρονομαστή}}}{\geq} \frac{\sqrt[k]{\alpha^{k-1}}}{\sqrt[k]{2^k}} = \frac{\sqrt[k]{\alpha^{k-1}}}{2}, \text{ για κάθε } n \geq n_0 .$$

Επομένως, $\sqrt[k]{\alpha_n^{k-1}} + \sqrt[k]{\alpha_n^{k-2}\alpha} + \sqrt[k]{\alpha_n^{k-3}\alpha^2} + \cdots + \sqrt[k]{\alpha_n\alpha^{k-2}} + \sqrt[k]{\alpha^{k-1}} \geq \frac{k}{2}\sqrt[k]{\alpha^{k-1}}$, απ' όπου

$|\alpha_n - \alpha| = |\sqrt[k]{\alpha_n} - \sqrt[k]{\alpha}||\sqrt[k]{\alpha_n^{k-1}} + \sqrt[k]{\alpha_n^{k-2}\alpha} + \sqrt[k]{\alpha_n^{k-2}\alpha^2} + \cdots + \sqrt[k]{\alpha^{k-1}}| \geq \frac{k}{2}|\sqrt[k]{\alpha_n} - \sqrt[k]{\alpha}|\sqrt[k]{\alpha^{k-1}}$ και

επομένως $|\sqrt[k]{\alpha_n} - \sqrt[k]{\alpha}| \leq \frac{2|\alpha_n - \alpha|}{k\sqrt[k]{\alpha^{k-1}}}$, για κάθε $n \geq n_0$. Σχεδόν τελειώσαμε!

Έστω τώρα $\varepsilon > 0$. Υπάρχει n_0', τέτοιο ώστε $|\alpha_n - \alpha| < \frac{1}{2}\varepsilon k\sqrt[k]{\alpha^{k-1}}$, για κάθε $n \geq n_0'$. Θέτουμε $n_0'' = \max\{n_0, n_0'\}$. Τότε, για κάθε $n \geq n_0''$ θα έχουμε:

$$|\sqrt[k]{\alpha_n} - \sqrt[k]{\alpha}| \underset{n \geq n_0}{\leq} \frac{2|\alpha_n - \alpha|}{k\sqrt[k]{\alpha^{k-1}}} \underset{n \geq n_0'}{<} \frac{2 \cdot \frac{1}{2}k\varepsilon\sqrt[k]{\alpha^{k-1}}}{k\sqrt[k]{\alpha^{k-1}}} = \varepsilon . \blacksquare]$$

Η συνθήκη $\alpha \geq 0$ στο iii) της πρότασης 2.4.4 είναι περιττή, όπως προκύπτει από την επόμενη πρόταση:

2.4.5 Πρόταση

Υποθέτουμε ότι $\alpha_n \geq \beta_n$, για κάθε $n \geq m$, όπου m σταθερός θετικός ακέραιος. Αν $\lim\alpha_n = \alpha$ και $\lim\beta_n = \beta$, τότε $\alpha \geq \beta$.

Απόδειξη: Υποθέτουμε ότι $\alpha < \beta$. Θέτουμε $\varepsilon = \frac{\beta - \alpha}{2} > 0$ (δείτε την απόδειξη της πρότασης 2.2.2). Εφόσον $\lim\alpha_n = \alpha$, υπάρχει ένας n_0, τέτοιος ώστε $|\alpha_n - \alpha| < \varepsilon$, για κάθε $n \geq n_0$. Παρόμοια, υπάρχει ένας n_0' τέτοιος ώστε $|\beta_n - \beta| < \varepsilon$ για κάθε $n \geq n_0'$. Θέτουμε $n_0'' = \max\{n_0, n_0', m\}$. Τότε, για κάθε $n \geq n_0''$, θα συναληθεύουν οι σχέσεις: $|\alpha_n - \alpha| < \varepsilon$, $|\beta_n - \beta| < \varepsilon$ και $\alpha_n \geq \beta_n$.

Αλλά, από τις σχέσεις $|\alpha_n - \alpha| < \varepsilon$ και $|\beta_n - \beta| < \varepsilon$ προκύπτουν αντίστοιχα οι σχέσεις $\alpha_n < \alpha + \varepsilon$ και $-\varepsilon + \beta < \beta_n$. Επομένως $\beta_n - \alpha_n > \beta - \varepsilon - \alpha - \varepsilon = \beta - \alpha - 2\varepsilon = 0$. Άρα $\beta_n > \alpha_n$, το οποίο όμως είναι άτοπο γιατί ξέρουμε ότι $\alpha_n \geq \beta_n$, για κάθε $n \geq m$. ■

Αν θέσουμε $\beta_n = 0$ στην πρόταση 2.4.5, θα πάρουμε $\lim\alpha_n \geq 0$. Η συνθήκη λοιπόν $\alpha \geq 0$ στο iii) της πρότασης 2.4.4 είναι περιττή.

Η επόμενη πρόταση μας επιτρέπει να συμπεράνουμε τη σύγκλιση μιας ακολουθίας, όταν αυτή εγκλωβίζεται μεταξύ δύο ισοσυγκλινουσών ακολουθιών.

2.4.6 Πρόταση (Κριτήριο παρεμβολής)

Έστω ότι $\alpha_n \le \gamma_n \le \beta_n$ *για κάθε* $n \ge m$*, όπου m σταθερός θετικός ακέραιος. Υποθέτουμε επίσης ότι* $\alpha_n \to \alpha$ *και* $\beta_n \to \alpha$*. Τότε,* $\gamma_n \to \alpha$*.*

Απόδειξη: Έστω $\varepsilon > 0$. Εφόσον $\lim \alpha_n = \alpha$, υπάρχει ένας n_0, τέτοιος ώστε $|\alpha_n - \alpha| < \varepsilon$ για κάθε $n \ge n_0$. Άρα, αν $n \ge \max\{n_0, m\}$, τότε $\gamma_n - \alpha \ge \alpha_n - \alpha \ge -|\alpha_n - \alpha| > -\varepsilon$.

Εφόσον $\lim \beta_n = \alpha$, υπάρχει ένας n_0', τέτοιος ώστε $|\beta_n - \alpha| < \varepsilon$ για κάθε $n \ge n_0'$. Άρα $\gamma_n - \alpha \le \beta_n - \alpha \le |\beta_n - \alpha| < \varepsilon$, για κάθε $n \ge \max\{n_0', m\}$.

Αν τώρα $n_0'' = \max\{n_0, n_0', m\}$ και $n \ge n_0''$, τότε θα ισχύουν ταυτόχρονα οι σχέσεις $\gamma_n - \alpha > -\varepsilon$ και $\gamma_n - \alpha < \varepsilon$, δηλαδή $-\varepsilon < \gamma_n - \alpha < \varepsilon \Leftrightarrow |\gamma_n - \alpha| < \varepsilon$.■

2.4.7 Παραδείγματα

1. Να υπολογιστεί το $\lim \frac{1}{n^k}$, όπου *k* θετικός ακέραιος.

Λύση: Έχουμε $0 < \frac{1}{n^k} \le \frac{1}{n}$. Γνωρίζουμε όμως από το παράδειγμα 2.2.3.1 ότι $\lim \frac{1}{n} = 0$. Σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής, θα έχουμε $\lim \frac{1}{n^k} = 0$.

2. Να υπολογιστεί το $\lim \frac{\cos n}{n}$.

Λύση: Έχουμε $|\cos n| \le 1$, για κάθε $n = 1, 2, \ldots$, δηλαδή η ακολουθία $(\cos n)$ είναι φραγμένη. Επειδή η ακολουθία $\left(\frac{1}{n}\right)$ είναι μηδενική, έπεται ότι και η ακολουθία $\left(\frac{\cos n}{n}\right)$ είναι μηδενική (λήμμα 2.4.3), δηλαδή, $\lim \frac{\cos n}{n} = 0$.

3. Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια:

i) $\lim \frac{-7n+4}{3n+1}$, **ii)** $\lim \frac{3n^2-5n+7}{4n^2+2n-1}$, **iii)** $\lim \frac{6n^3+11n^2-10}{2n^3+n+3}$,

iv) $\lim \left(\frac{3n-2}{n}\right)^2$, **v)** $\lim \frac{1+2+\cdots+n}{n^2+1}$, **vi)** $\lim \frac{(-1)^n n}{2n^2-1}$,

vii) $\lim \frac{\cos n + 3\sin 4n}{2\sqrt{n}-1}$, **viii)** $\lim \sqrt{\frac{4n^2+n-1}{9n^2-n+2}}$, **ix)** $\lim \sqrt[3]{\frac{27n-1}{8n+3}}$,

x) $\lim \left(\sqrt{n^2+n-1} - \sqrt{n^2+1}\right)$, **xi)** $\lim \left[\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)\right]$ **xii)** $\lim \left[\sqrt{n + \frac{1}{2}}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})\right]$,

xiii) $\lim \left(\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}\right)$

Λύση: i) Για να υπολογίσουμε το όριο $\lim \frac{-7n+4}{3n+1}$ θα πρέπει να εφαρμόσουμε τον κανόνα του πηλίκου. Επειδή όμως οι ακολουθίες $(-7n+4)$ και $(3n+1)$ δεν συγκλίνουν, (απειρίζονται αρνητικά και θετικά αντίστοιχα) χρειάζεται μια μικρή τροποποίηση στο κλάσμα. Έχουμε λοιπόν: $\lim\frac{-7n+4}{3n+1}=\lim\frac{n\left(-7+\frac{4}{n}\right)}{n\left(3+\frac{1}{n}\right)}=\lim\frac{-7+\frac{4}{n}}{3+\frac{1}{n}}$.

Επειδή $\lim\frac{4}{n}=\lim\frac{1}{n}=0$, (είναι $\lim\frac{4}{n}=0$ γιατί $\lim\frac{1}{n}=0$, σύμφωνα με το (iv) της πρότασης 2.4.1) $\lim\frac{-7n+4}{3n+1}=\frac{\lim\left(-7+\frac{4}{n}\right)}{\lim\left(3+\frac{1}{n}\right)}=\frac{-7+\lim\frac{4}{n}}{3+\lim\frac{1}{n}}=\frac{-7+0}{3+0}=-\frac{7}{3}$.

ii) Την ίδια μέθοδο ακολουθούμε και εδώ:

$$\lim\frac{3n^2-5n+7}{4n^2+2n-1}=\lim\frac{n^2\left(3-\frac{5}{n}+\frac{7}{n^2}\right)}{n^2\left(4+\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}\right)}=\lim\frac{3-\frac{5}{n}+\frac{7}{n^2}}{4+\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}}=\frac{3-\lim\frac{5}{n}+\lim\frac{7}{n^2}}{4+\lim\frac{2}{n}-\lim\frac{1}{n^2}}=$$

$=\frac{3-0+0}{4+0-0}=\frac{3}{4}$, γιατί $\lim\frac{1}{n^k}$ (παράδειγμα 2.4.7.1).

iii) $\lim\frac{6n^3+11n^2-10}{2n^3+n+3}=\lim\frac{6+\frac{11}{n}-\frac{10}{n^3}}{2+\frac{1}{n^2}+\frac{3}{n^3}}=\frac{6+\lim\frac{11}{n}-\lim\frac{10}{n^3}}{2+\lim\frac{1}{n^2}+\lim\frac{3}{n^3}}=\frac{6}{2}=3$.

iv) $\lim\left(\frac{3n-2}{n}\right)^2=\left(\lim\frac{3n-2}{n}\right)^2=\left(3-\lim\frac{2}{n}\right)^2=3^2=9$.

v) Γνωρίζουμε ότι $1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$. Επομένως, $\lim\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+1}=\lim\frac{n(n+1)}{2(n^2+1)}=$

$$=\frac{1}{2}\lim\frac{n^2+n}{n^2+1}=\frac{1}{2}\lim\frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n^2}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1+0}{1+0}=\frac{1}{2}.$$

Σημείωση: Όπως είδαμε στα παραδείγματα (i)-(v), το όριο ρητής παράστασης του *n*, όπου ο βαθμός του αριθμητή και του παρονομαστή είναι ίσοι, είναι ίσο με το πηλίκο των συντελεστών των μεγιστοβάθμιων όρων.

vi) $\lim\frac{(-1)^n n}{2n^2-1}=\lim\frac{\frac{(-1)^n}{n}}{2-\frac{1}{n^2}}$. Επειδή η ακολουθία $(-1)^n$, $n=1,2,\ldots$ είναι φραγμένη και η $\frac{1}{n}$, $n=1,2,\ldots$ μηδενική, θα έχουμε $\lim\frac{(-1)^n}{n}=0$ (λήμμα 2.4.3). Επομένως

$$\lim\frac{(-1)^n n}{2n^2-1}=\frac{\lim\frac{(-1)^n}{n}}{2-\lim\frac{1}{n^2}}=\frac{0}{2-0}=0.$$

vii) $\lim\dfrac{\cos n+3\sin 4n}{2\sqrt{n}-1}=\lim\dfrac{\dfrac{\cos n}{\sqrt{n}}+3\dfrac{\sin 4n}{\sqrt{n}}}{2-\dfrac{1}{\sqrt{n}}}=\dfrac{\lim\dfrac{\cos n}{\sqrt{n}}+3\lim\dfrac{\sin 4n}{\sqrt{n}}}{2-\lim\dfrac{1}{\sqrt{n}}}$. Επειδή οι ακολουθίες $(\cos n)$ και $(\sin 4n)$ είναι φραγμένες και η $\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$ μηδενική, θα έχουμε $\lim\dfrac{\cos n}{\sqrt{n}}=\lim\dfrac{\sin 4n}{\sqrt{n}}=0$. Επομένως $\lim\dfrac{\cos n+3\sin 4n}{2\sqrt{n}-1}=\dfrac{0+3\cdot 0}{2-0}=0$.

Σημείωση: Αν στο παραπάνω κλάσμα διαιρούσαμε αριθμητή και παρονομαστή με το n αντί του $\sqrt{n}$, τότε, παίρνοντας το όριό τους, και οι δύο όροι του κλάσματος θα μηδενίζονταν, με αποτέλεσμα να πάρουμε κλάσμα της μορφής $\dfrac{0}{0}$ που δεν ορίζεται (απροσδιοριστία).

viii) $\lim\sqrt{\dfrac{4n^2+n-1}{9n^2-n+2}}=\sqrt{\lim\dfrac{4n^2+n-1}{9n^2-n+2}}$ (πρόταση 2.2.4 (iii)). Τώρα, $\lim\dfrac{4n^2+n-1}{9n^2-n+2}=\dfrac{4}{9}$, σύμφωνα με τη σημείωση μετά το παράδειγμα (v). Άρα $\lim\sqrt{\dfrac{4n^2+n-1}{9n^2-n+2}}=\sqrt{\dfrac{4}{9}}=\dfrac{2}{3}$.

ix) $\lim\sqrt[3]{\dfrac{27n-1}{8n+3}}=\sqrt[3]{\lim\dfrac{27n-1}{8n+3}}=\sqrt[3]{\dfrac{27}{8}}=\dfrac{3}{2}$.

x) Εδώ εφαρμόζουμε το τέχνασμα του πολλαπλασιασμού με τη συζυγή παράσταση:

$$\lim\left(\sqrt{n^2+n-1}-\sqrt{n^2+1}\right)=\lim\frac{\left(\sqrt{n^2+n-1}-\sqrt{n^2+1}\right)\left(\sqrt{n^2+n-1}+\sqrt{n^2+1}\right)}{\sqrt{n^2+n-1}+\sqrt{n^2+1}}=$$

$$=\lim\frac{\left(\sqrt{n^2+n-1}\right)^2-\left(\sqrt{n^2+1}\right)^2}{\sqrt{n^2+n-1}+\sqrt{n^2+1}}=\lim\frac{(n^2+n-1)-(n^2+1)}{\sqrt{n^2+n-1}+\sqrt{n^2+1}}=\lim\frac{n-2}{\sqrt{n^2+n-1}+\sqrt{n^2+1}}$$

$$=\lim\frac{n\left(1-\frac{2}{n}\right)}{n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}\right)}=\lim\frac{1-\frac{2}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}=\frac{1-\lim\frac{2}{n}}{\lim\sqrt{1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}+\lim\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}$$

$$=\frac{1-0}{\sqrt{\lim\left(1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)}+\sqrt{\lim\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}}=\frac{1}{\sqrt{1+\lim\frac{1}{n}-\lim\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1+\lim\frac{1}{n^2}}}=\frac{1}{\sqrt{1+0-0}+\sqrt{1+0}}$$

$$=\frac{1}{2}$$

xi) $\lim\left[\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\right]=\lim\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)=\lim\dfrac{\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)\left(\sqrt{n^2+n}+n\right)}{\sqrt{n^2+n}+n}=$

$$=\lim\frac{\left(\sqrt{n^2+n}\right)^2-n^2}{\sqrt{n^2+n}+n}=\lim\frac{n^2+n-n^2}{\sqrt{n^2+n}+n}=\lim\frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n}=\lim\frac{n}{n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)}=$$

$$= \lim \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} = \frac{1}{\sqrt{1+\lim\frac{1}{n}}+1} = \frac{1}{\sqrt{1+0}+1} = \frac{1}{2}$$

xii) $\sqrt{n+\frac{1}{2}}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) = \sqrt{n+\frac{1}{2}}\,\frac{(\sqrt{n+1})^2-(\sqrt{n})^2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \sqrt{n+\frac{1}{2}}\,\frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n+\frac{1}{2}}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$.

Διαιρούμε αριθμητή και παρονομαστή με $\sqrt{n}$ και παίρνουμε $\frac{\sqrt{1+\frac{1}{2n}}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} \to \frac{\sqrt{1+0}}{\sqrt{1+0}+1} = \frac{1}{2}$.

xiii) Εδώ χρησιμοποιούμε την ταυτότητα: $x-y=\frac{x^3-y^3}{x^2+xy+y^2}$, όπου $x=\sqrt[3]{n+1}$ και $y=\sqrt[3]{n}$.

Έχουμε: $\lim\left(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}\right) = \lim \frac{\left(\sqrt[3]{n+1}\right)^3-\left(\sqrt[3]{n}\right)^3}{\left(\sqrt[3]{n+1}\right)^2+\sqrt[3]{n+1}\sqrt[3]{n}+\left(\sqrt[3]{n}\right)^2} =$

$$= \lim \frac{(n+1)-n}{\left(\sqrt[3]{n+1}\right)^2+\sqrt[3]{n^2+n}+\left(\sqrt[3]{n}\right)^2} = \lim \frac{1}{\left(\sqrt[3]{n+1}\right)^2+\sqrt[3]{n^2+n}+\left(\sqrt[3]{n}\right)^2} =$$

$$= \lim \frac{\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}}{\left(\frac{\sqrt[3]{n+1}}{\sqrt[3]{n}}\right)^2+\frac{\sqrt[3]{n^2+n}}{\sqrt[3]{n^2}}+1} = \lim \frac{\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right)^2}{\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{n}}\right)^2+\sqrt[3]{1+\frac{1}{n}}+1} =$$

$$= \frac{\lim\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right)^2}{\lim\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{n}}\right)^2+\lim\sqrt[3]{1+\frac{1}{n}}+1} = \frac{0^2}{\left(\sqrt[3]{1+0}\right)^2+\sqrt[3]{1+0}+1} = 0.$$

4. Να δειχθεί ότι:

$$\lim\left[\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right]=1.$$

Απόδειξη:

Έχουμε: $\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \geq \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}}_{n \text{ φορές}} = \frac{n}{\sqrt{n^2+n}}$.

Επίσης, $\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leq \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}}_{n \text{ φορές}} = \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$.

Παρατηρούμε ότι $\lim\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = \lim\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} = 1$ και $\lim\frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = \lim\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} = 1$.

Με βάση λοιπόν το κριτήριο παρεμβολής παίρνουμε:

$$\lim\left[\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right]=1.$$

Άλυτες ασκήσεις

1. Να υπολογίσετε τα επόμενα όρια:

i) $\lim\frac{-3n^3+2n^2-1}{n^3+n+1}$, **ii)** $\lim\left(3+\frac{2}{3^n}\right)$, **iii)** $\lim\frac{3}{\sqrt{n^2+n}}$ **iv)** $\lim\left|\frac{-2n+1}{4n+4}\right|$

v). $\lim\left(\sqrt{n^2+2n-1}-\sqrt{n^2+2n}\right)$ και **vi)** $\lim\left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{1}{(2n)^2}\right)$.

2. Να υπολογίσετε τα επόμενα όρια:

i) $\lim\frac{3n+5}{6n-2}$,

ii) $\lim\frac{\sqrt{2}\cdot n^2+n-2}{2n^2-n+1}$,

iii) $\lim\left(\frac{n^2+n-1}{2n^2+5}\right)^2$

iv) $\lim\frac{3n^4-4n^3+n^2+9}{5n^4+n^3+2n+1}$

v) $\lim\frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^3+n^2+1}$,

vi) $\lim\frac{-3\sqrt{n}+4}{2\sqrt{n+1}}$,

vii) $\lim\left(\frac{2n+5}{-n+2}\right)^3$,

viii) $\lim\frac{(-1)^n n^2}{4n^3-1}$

ix) $\lim\frac{\sin(3n)-\cos(2n)}{6n^3-\sqrt{n}}$

x) $\lim\sqrt{\frac{16n^2+5}{9n^2-3n+2}}$

xi) $\lim\sqrt[3]{\frac{125n^3+n}{27n^3-6n+2}}$

xii) $\lim\sqrt[5]{\frac{32n^3+3n^2-2n-1}{243n^3-7n^2+5}}$

xiii) $\lim\left[\sqrt{2n+1}\left(\sqrt{n+3}-\sqrt{n}\right)\right]$,

xiv) $\lim\left[\sqrt{n^2+1}\left(\sqrt{n^2+3n+1}-\sqrt{n^2+3n}\right)\right]$

xv) $\lim\left[\sqrt[4]{n^2+1}-\sqrt{n}\right]$

3. Να βρεθεί το όριο: $\lim\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{(n+1)^2}+\frac{3}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{n+1}{(2n)^2}\right)$.

4. Να βρεθεί το όριο: $\lim\left(\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+2}+\frac{n}{n^2+3}+\cdots+\frac{n}{n^2+n}\right)$.

2.5 Ειδικές μορφές ορίων

Η ανισότητα του Bernoulli (παράδειγμα 1.8.1.5), παίζει σημαντικό ρόλο στον υπολογισμό ορίων ειδικής μορφής.

2.5.1 Πρόταση

Υποθέτουμε ότι ο θ είναι ένας πραγματικός αριθμός με $\theta > -1$. Τότε, για κάθε $n = 1, 2, \ldots$ ισχύει: $(1+\theta)^n \geq 1 + n\theta$.

2.5.2 Πρόταση

Έστω x ένας πραγματικός αριθμός με $|x| < 1$. *Τότε* $\lim(x^n) = 0$.

Απόδειξη: Αν $x = 0$, τότε $x^n = 0$, για κάθε $n = 1, 2, \ldots$ Άρα $\lim(x^n) = 0$.

Έστω $|x| > 0$. Εφόσον $|x| < 1$ θα έχουμε $\dfrac{1}{|x|} > 1$. Επομένως ο αριθμός $\theta = \dfrac{1}{|x|} - 1$ είναι θετικός.

Έχουμε: $\dfrac{1}{|x|^n} = (1+\theta)^n \geq 1 + n\theta > n\theta$, σύμφωνα με την ανισότητα του Bernoulli. Άρα $0 < |x^n| < \dfrac{1}{\theta} \cdot \dfrac{1}{n}$. Αλλά $\lim\left(\dfrac{1}{\theta} \cdot \dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{\theta} \lim \dfrac{1}{n} = 0$. Με βάση το κριτήριο παρεμβολής, παίρνουμε $\lim |x^n| = 0$. Αυτό, απ' τον ορισμό του ορίου είναι ισοδύναμο με το ότι $\lim(x^n) = 0$.■

2.5.3 Παραδείγματα

1. Να υπολογιστούν τα όρια: **i)** $\lim\left(-\dfrac{3}{4^n} + \dfrac{n^2 - n}{n^2 + n + 1}\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n\right)$ και **ii)** $\lim\left(\dfrac{2^n + (-5)^{n-1}}{7^{n+1} + (-1)^n}\right)$.

Λύση: i) $\lim\left(-\dfrac{3}{4^n} + \dfrac{n^2 - n}{n^2 + n + 1}\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n\right) = -\lim \dfrac{3}{4^n} + \lim \dfrac{1 - \dfrac{1}{n}}{1 + \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^n}} \lim\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n =$

$= -0 + \dfrac{1-0}{1+0+0} \cdot 0 = 0$.

ii) Διαιρούμε αριθμητή και παρονομαστή με τη δύναμη με τη μεγαλύτερη βάση. Έχουμε:

$$\lim\left(\frac{2^n + (-5)^{n-1}}{7^{n+1} + (-1)^n}\right) = \lim\left(\frac{\left(\dfrac{2}{7}\right)^n - \dfrac{1}{5}\left(-\dfrac{5}{7}\right)^n}{7 + \left(-\dfrac{1}{7}\right)^n}\right) = \frac{\lim\left(-\dfrac{2}{7}\right)^n - \dfrac{1}{5}\lim\left(-\dfrac{5}{7}\right)^n}{7 + \lim\left(-\dfrac{1}{7}\right)^n} = \frac{0-0}{7+0} = 0.$$

2. Θεωρούμε την ακολουθία (a_n), που ορίζεται από την αναδρομική σχέση $a_{n+1} = -\dfrac{1}{3}a_n + 2$ και την αρχική συνθήκη $a_1 = 1$. Να βρεθεί το όριό της.

Λύση: Θέτουμε στο *n* διαδοχικά τις τιμές 1, 2, 3, ..., *n* και παίρνουμε τις επόμενες σχέσεις:

$$\begin{cases} a_2 = -\frac{1}{3}a_1 + 2 \\ a_3 = -\frac{1}{3}a_2 + 2 \\ \vdots \\ a_{n-1} = -\frac{1}{3}a_{n-2} + 2 \\ a_n = -\frac{1}{3}a_{n-1} + 2 \\ a_{n+1} = -\frac{1}{3}a_n + 2 \end{cases}$$

Πολλαπλασιάζουμε την προτελευταία σχέση με $-\frac{1}{3}$, την αμέσως προηγούμενη με $\left(-\frac{1}{3}\right)^2$, την προηγούμενη απ' αυτή με $\left(-\frac{1}{3}\right)^3$ κτλ, για να καταλήξουμε στη δεύτερη σχέση που θα την πολλαπλασιάσουμε με $\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-2}$ και την πρώτη με $\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$. (Ο κανόνας είναι: ο εκθέτης του $-\frac{1}{3}$ συν τον δείκτη του όρου στο δεξί μέλος της αντίστοιχης σχέσης να ισούται με *n*). Παίρνουμε έτσι τις σχέσεις:

$$\begin{cases} \cancel{\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} a_2} = \left(-\frac{1}{3}\right)^n a_1 + 2\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} \\ \cancel{\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-2} a_3} = \cancel{\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} a_2} + 2\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-2} \\ \vdots \\ \cancel{\left(-\frac{1}{3}\right)^{2} a_{n-1}} = \cancel{\left(-\frac{1}{3}\right)^{3} a_{n-2}} + 2\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^{2} \\ \cancel{-\frac{1}{3}a_n} = \cancel{\left(-\frac{1}{3}\right)^{2} a_{n-1}} + 2\cdot\left(-\frac{1}{3}\right) \\ a_{n+1} = \cancel{-\frac{1}{3}a_n} + 2 \end{cases}$$

Προσθέτοντας κατά μέλη και διαγράφοντας τους κοινούς όρους, παίρνουμε

$$a_{n+1} = \left(-\tfrac{1}{3}\right)^n a_1 + 2 + 2\left(-\tfrac{1}{3}\right) + 2\left(-\tfrac{1}{3}\right)^2 + \cdots + 2\left(-\tfrac{1}{3}\right)^{n-2} + 2\left(-\tfrac{1}{3}\right)^{n-1} =$$

$$= \left(-\tfrac{1}{3}\right)^n + 2\left(1 - \tfrac{1}{3} + \left(-\tfrac{1}{3}\right)^2 + \cdots + \left(-\tfrac{1}{3}\right)^{n-2} + \left(-\tfrac{1}{3}\right)^{n-1}\right) = \left(-\tfrac{1}{3}\right)^n + 2\cdot\frac{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^n}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)}$$

Θέτοντας $n-1$ αντί *n*, παίρνουμε $a_n = \left(-\tfrac{1}{3}\right)^{n-1} + 2\cdot\dfrac{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)} = \left(-\tfrac{1}{3}\right)^{n-1} + \dfrac{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}}{3}$.

Επομένως, $\lim a_n = \lim\left(-\tfrac{1}{3}\right)^{n-1} + \dfrac{1-\lim\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}}{3} = \dfrac{1}{3}$ (επειδή $\lim\left(-\tfrac{1}{3}\right)^{n-1} = 0$).

3. Δίνεται η ακολουθία (α_n), η οποία ορίζεται από τις σχέσεις: $\alpha_1 = \alpha$, $\alpha_2 = \beta$ και $2\alpha_{n+2} = \alpha_n + \alpha_{n+1}$. Να βρεθεί το $\lim \alpha_n$.

Λύση: Έχουμε $2\alpha_{n+2} = \alpha_n + \alpha_{n+1} \Leftrightarrow 2\alpha_{n+2} - \alpha_{n+1} = \alpha_n \Leftrightarrow 2\alpha_{n+2} - 2\alpha_{n+1} = \alpha_n - \alpha_{n+1}$. Αν θέσουμε $\delta_n = \alpha_{n+1} - \alpha_n$, θα πάρουμε $2\delta_{n+1} = -\delta_n \Leftrightarrow \delta_{n+1} = -\frac{1}{2}\delta_n$. Η (δ_n) είναι λοιπόν γεωμετρική πρόοδος με λόγο $-\frac{1}{2}$ και πρώτο όρο $\delta_1 = \beta - \alpha$. Ο γενικός τύπος της είναι $\delta_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}(\beta - \alpha)$.

Ακόμη, $\alpha_n = (\alpha_n - \alpha_{n-1}) + (\alpha_{n-1} - \alpha_{n-2}) + \cdots + (\alpha_2 - \alpha_1) + \alpha_1 = \delta_{n-1} + \delta_{n-2} + \cdots + \delta_1 + \alpha =$ $= \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}(\beta - \alpha) + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-3}(\beta - \alpha) + \cdots + \left(-\frac{1}{2}\right)(\beta - \alpha) + (\beta - \alpha) + \alpha = \left[\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2} + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-3} + \cdots + \left(-\frac{1}{2}\right) + 1\right](\beta - \alpha) + \alpha = \frac{2}{3}\left[1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right](\beta - \alpha) + \alpha$.

Συνεπώς $\lim \alpha_n = \frac{2}{3}\left[1 - \lim\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right](\beta - \alpha) + \alpha = \frac{2}{3}(\beta - \alpha) + \alpha = \frac{2\beta + \alpha}{3}$.

4. Δίνεται η ακολουθία του Fibonacci: $a_1 = a_2 = 1$ και $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$. Να υπολογιστεί το όριο $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

Λύση: Υπάρχουν διάφορες τεχνικές για τον υπολογισμό του γενικού όρου μιας τέτοιας ακολουθίας. Εμείς εδώ θα επιστρατεύσουμε κάποια στοιχεία Γραμμικής Άλγεβρας. Στον τύπο $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ επισυνάπτουμε τον μάλλον «αθώο» (και τετριμμένο) τύπο $a_{n+1} = a_{n+1}$, για να πάρουμε το σύστημα:

$$\begin{cases} a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \\ a_{n+1} = a_{n+1} \end{cases},$$

το οποίο, σε μορφή πινάκων γράφεται:

$$\begin{bmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{bmatrix}.$$

Αν θέσουμε $H_n = \begin{bmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{bmatrix}$ και $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, θα πάρουμε την αναδρομική σχέση

$$H_{n+1} = AH_n.$$

Ο τύπος αυτός μοιάζει με τον αναδρομικό τύπο της γεωμετρικής προόδου, μόνο που, αντί για αριθμούς έχουμε διανύσματα και αντί για τον λόγο *λ*, έχουμε τον πίνακα *Α*. Όπως στην γεωμετρική πρόοδο, έτσι και δω θα πάρουμε (με μια απλή επαγωγή) τον τύπο

$$H_n = A^{n-1}H_1,$$

όπου $H_1 = \begin{bmatrix} a_2 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Επομένως το πρόβλημα ανάγεται στον υπολογισμό της δύναμης του πίακα A, κλασσικό πρόβλημα Γραμμικής Άλγεβρας.

Βρίσκουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A: $\phi(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 1$ με ρίζες $\rho_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ και $\rho_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$. (Άρα ο πίνακας διαγωνιοποιείται, εφόσον έχει διαφορετικές ιδιοτιμές). Αν ρ είναι κάποια από τις ιδιοτιμές ρ_1 και ρ_2, τότε για το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ θα έχουμε:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho x \\ \rho y \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} (1-\rho)x + y = 0 \\ x \quad - \quad \rho y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1-\rho)x + y = 0 \\ x = \rho y \end{cases}.$$

Από τη 2η εξίσωση του συστήματος με αντικατάσταση στην πρώτη παίρνουμε ταυτότητα, γιατί $(1-\rho)\rho y + y = (\rho - \rho^2 + 1)y = -(\rho^2 - \rho - 1)y = 0$, εφόσον το ρ είναι ρίζα της εξίσωσης $\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$. Η σχέση $x = \rho y$ παρέχει τα ιδιοδιανύσματα $y\begin{bmatrix} \rho \\ 1 \end{bmatrix}$, $y \neq 0$. Συμπεραίνουμε ότι αν θέσουμε $P = \begin{bmatrix} \rho_1 & \rho_2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, τότε $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \rho_1 & 0 \\ 0 & \rho_2 \end{bmatrix}$ και άρα $A = P\begin{bmatrix} \rho_1 & 0 \\ 0 & \rho_2 \end{bmatrix}P^{-1}$.

Επομένως, $A^n = P\begin{bmatrix} \rho_1^n & 0 \\ 0 & \rho_2^n \end{bmatrix}P^{-1}$. Άρα η σχέση $H_n = A^{n-1}H_1$ γράφεται

$$\begin{bmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_1 & \rho_2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \rho_1^{n-1} & 0 \\ 0 & \rho_2^{n-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \rho_1 & \rho_2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_1^n & \rho_2^n \\ \rho_1^{n-1} & \rho_2^{n-1} \end{bmatrix}\frac{1}{\rho_1 - \rho_2}\begin{bmatrix} 1 & -\rho_2 \\ -1 & \rho_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\rho_1 - \rho_2}\begin{bmatrix} \rho_1^n - \rho_2^n & \rho_1\rho_2^n - \rho_2\rho_1^n \\ \rho_1^{n-1} - \rho_2^{n-1} & \rho_1\rho_2^{n-1} - \rho_2\rho_1^{n-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\rho_1 - \rho_2}\begin{bmatrix} \rho_1^n - \rho_2^n + \rho_1\rho_2^n - \rho_2\rho_1^n \\ \rho_1^{n-1} - \rho_2^{n-1} + \rho_1\rho_2^{n-1} - \rho_2\rho_1^{n-1} \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\rho_1 - \rho_2}\begin{bmatrix} \rho_1^n(1-\rho_2) - (1-\rho_1)\rho_2^n \\ \rho_1^{n-1}(1-\rho_2) - (1-\rho_1)\rho_2^{n-1} \end{bmatrix}$$

Εφόσον $\rho_1 + \rho_2 = 1$, έπεται ότι $1 - \rho_2 = \rho_1$ και $1 - \rho_1 = \rho_2$.

Επομένως, $\begin{bmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{bmatrix} = \dfrac{1}{\rho_1 - \rho_2}\begin{bmatrix} \rho_1^{n+1} - \rho_2^{n+1} \\ \rho_1^n - \rho_2^n \end{bmatrix}$ και άρα

$$a_n = \frac{1}{\rho_1 - \rho_2}(\rho_1^n - \rho_2^n) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right].$$

Προφανώς $|\rho_1| > |\rho_2|$ και άρα $\dfrac{|\rho_2|}{|\rho_1|} < 1$.

Επομένως,

$$\lim\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\frac{\rho_1^{n+1}-\rho_2^{n+1}}{\rho_1^n-\rho_2^n}=\lim\frac{\rho_1-\rho_2\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^n}{1-\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^n}=\frac{\rho_1-\rho_2\lim\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^n}{1-\lim\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^n}=\frac{\rho_1-\rho_2\cdot 0}{1-0}=\rho_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Σημείωση: Ο αριθμός $\lim\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ είναι γνωστός από την αρχαιότητα και παριστάνει τον περίφημο λόγο της **χρυσής τομής**. Συμβολίζεται διεθνώς με το γράμμα **φ**[3]. Έχει πάρα πολλές εφαρμογές στην Τέχνη, την Αρχιτεκτονική (π.χ. οι διαστάσεις του Παρθενώνα έχουν λόγο χρυσής τομής) αλλά και την ίδια τη φύση. (Λέγεται ότι ένα ανθρώπινο σώμα με ιδανικές αναλογίες χωρίζεται από τον ομφαλό σε λόγο χρυσής τομής!). Η σύνδεσή του με την ακολουθία του Fibonacci μάλλον δεν είναι τυχαία. Τα μικροσκοπικά ανθάκια που αποτελούν το κέντρο της μαργαρίτας σχηματίζουν δεξιόστροφες και αριστερόστροφες ελικοειδείς γραμμές. Οι αριθμοί των γραμμών αυτών είναι πάντα διαδοχικοί όροι της ακολουθίας Fibonacci! Το ίδιο φαινόμενο παρατηρείται στον κώνο του κουκουναριού, στις φολίδες του καρπού του ανανά και στα φύλλα πολλών δένδρων.

5. Έστω (a_n) μια ακολουθία με $a_n\neq 0$ για κάθε $n=1,2,\ldots$ Αν $\lim\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|<1$, να δειχθεί ότι η ακολουθία (a_n) είναι μηδενική.

Απόδειξη: Έστω $r=\lim\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$. Τότε $0\le r<\frac{r+1}{2}<1$. (Οι σχέσεις $r<\frac{r+1}{2}$ και $\frac{r+1}{2}<1$ προκύπτουν άμεσα από τη σχέση $r<1$).

Αν $\varepsilon=\frac{r+1}{2}-r=\frac{1-r}{2}>0$, τότε υπάρχει θετικός ακέραιος n_0 με την ιδιότητα $\left|\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|-r\right|<\varepsilon$, για κάθε $n\ge n_0$. Άρα $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|-r\le\left|\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|-r\right|<\frac{1-r}{2}\Rightarrow\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|<\frac{r+1}{2}$ και επομένως $|a_{n+1}|<\frac{r+1}{2}|a_n|$, για κάθε $n\ge n_0$.

Αν λοιπόν $n\ge n_0$, τότε $|a_n|<\frac{r+1}{2}|a_{n-1}|<\left(\frac{r+1}{2}\right)^2|a_{n-2}|<\cdots<\left(\frac{r+1}{2}\right)^{n-m}|a_m|$.

Αλλά $\lim\left[\left(\frac{r+1}{2}\right)^{n-m}|a_m|\right]=\left(\frac{r+1}{2}\right)^{-m}|a_m|\lim\left(\frac{r+1}{2}\right)^n\underset{\frac{r+1}{2}<1}{=}\left(\frac{r+1}{2}\right)^{-m}|a_m|\cdot 0=0$. Από το κριτήριο παρεμβολής παίρνουμε $\lim a_n=\lim|a_n|=0$.

6. Να υπολογιστούν τα όρια: **i)** $\lim(n^3x^n)$, όπου $|x|<1$ και **ii)** $\lim\frac{3^n}{n!}$.

[3] Προς τιμή του Φειδία.

Λύση: i) Αν $x=0$, τότε προφανώς $\lim(n^3x^n)=0$.

Έστω $x\neq 0$. Παρατηρούμε ότι $\lim\left|\frac{(n+1)^3x^{n+1}}{n^3x^n}\right|=|x|\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^3=|x|\cdot 1=|x|<1$. Σύμφωνα με το προηγούμενο παράδειγμα, θα έχουμε: $\lim(n^3x^n)=0$.

ii) Παρατηρούμε ότι $\lim\frac{\frac{3^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{3^n}{n!}}=\lim\frac{3}{n+1}=0$. Σύμφωνα με το παράδειγμα 5, θα έχουμε: $\lim\frac{3^n}{n!}=0$.

7. Έστω (a_n) μια ακολουθία με $a_n\geq 0$ για κάθε $n=1,2,\ldots$ Αν $\lim\sqrt[n]{a_n}<1$, να δειχθεί ότι η ακολουθία (a_n) είναι μηδενική.

Απόδειξη: Έστω $r=\lim\sqrt[n]{a_n}<1$. Τότε $0\leq r<\frac{r+1}{2}<1$.

Αν $\varepsilon=\frac{r+1}{2}-r=\frac{1-r}{2}>0$, τότε υπάρχει θετικός ακέραιος n_0 με την ιδιότητα $\left|\sqrt[n]{a_n}-r\right|<\varepsilon$, για κάθε $n\geq n_0$. Άρα $\sqrt[n]{a_n}-r\leq\left|\sqrt[n]{a_n}-r\right|<\frac{1-r}{2}\Rightarrow\sqrt[n]{a_n}<\frac{r+1}{2}$ και επομένως $a_n<\left(\frac{r+1}{2}\right)^n$, για κάθε $n\geq n_0$. Επειδή $\lim\left(\frac{r+1}{2}\right)^n=0$, προκύπτει ότι $\lim a_n=0$

Άλυτες ασκήσεις

1. Να υπολογιστούν τα όρια: $\lim\left[\frac{2}{3^n}\left(\frac{3n^2+n-2}{5n^2+2n+1}\right)-\left(-\frac{7}{3+\sqrt{17}}\right)^n\right]$ και $\lim\frac{6^n-5^n}{8^{n+1}-2^n}$.

2. Να βρείτε τα όρια της ακολουθιών που ορίζονται απ' τις σχέσεις: **i)** $\alpha_{n+1}=2-\frac{1}{3}\alpha_n$, $\alpha_1=3$ και **ii)** $\beta_{n+1}=\frac{-3\beta_n+7}{5}$, $\beta_1=1$.

3. Δίνεται η ακολουθία: $\alpha_{n+2}=\sqrt{2}\cdot\alpha_{n+1}-\alpha_n$, $\alpha_1=2$ και $\alpha_2=1$. Αφού βρείτε το γενικό της τύπο να υπολογίσετε το όριό της.

4. Δίνεται η ακολουθία: $6\alpha_{n+2}=5\alpha_{n+1}-\alpha_n$, $\alpha_1=\alpha_2=1$. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}$.

5. Να υπολογιστούν τα όρια: $\lim\frac{3^n\sqrt{n^3}}{4^{n-1}}$, $\lim\frac{(n!)^2}{(2n)!}$, $\lim\frac{2^n n!}{n^n}$ και $\lim\frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$.

6. Υποθέτουμε ότι η ακολουθία (α_n) ικανοποιεί την αναδρομική σχέση $9\alpha_{n+2}=-6\alpha_{n+1}-\alpha_n$. Να δείξετε ότι αυτή είναι μηδενική.

2.5.4 Πρόταση

i) *Έστω α ένας θετικός πραγματικός αριθμός. Τότε* $\lim(\sqrt[n]{\alpha})=1$.

ii) *Ισχύει* $\lim(\sqrt[n]{n})=1$.

Απόδειξη: i) Αρχικά υποθέτουμε ότι $\alpha \geq 1$. Επομένως $\sqrt[n]{\alpha} \geq 1$, για κάθε $n=1,2,\ldots$ Θέτουμε $\theta_n = \sqrt[n]{\alpha}-1 \geq 0$. Αρκεί να δείξουμε ότι $\lim\theta_n = 0$.

Από τη σχέση $\theta_n = \sqrt[n]{\alpha}-1$ παίρνουμε $\sqrt[n]{\alpha}=1+\theta_n$ και άρα $\alpha=(1+\theta_n)^n$. Εφαρμόζουμε τώρα την ανισότητα Bernoulli και παίρνουμε: $\alpha=(1+\theta_n)^n \geq 1+n\theta_n > n\theta_n$. Άρα $\theta_n < \dfrac{\alpha}{n}$. Αλλά $\lim\dfrac{\alpha}{n}=0$ οπότε, από το κριτήριο παρεμβολής προκύπτει $\lim\theta_n=0$.

Έστω τώρα ότι $0<\alpha<1$. Τότε $\alpha^{-1}>1$. Επομένως $\lim\sqrt[n]{\alpha^{-1}}=1$. Αλλά $\sqrt[n]{\alpha}=\dfrac{1}{\sqrt[n]{\alpha^{-1}}} \Rightarrow$

$\lim\sqrt[n]{\alpha}=\dfrac{1}{\lim\sqrt[n]{\alpha^{-1}}}=1$.

ii) Έχουμε $n \geq 1$ και επομένως, $\sqrt[n]{n} \geq 1$. Προσοχή! Δεν θέτουμε τώρα $\theta_n=\sqrt[n]{n}-1$, αλλά παρατηρούμε πρώτα ότι $\sqrt[2n]{n}=\sqrt{\sqrt[n]{n}} \geq 1$. Τώρα θέτουμε $\theta_n=\sqrt[2n]{n}-1 \geq 0$.

Από τη σχέση $\theta_n=\sqrt[2n]{n}-1$ παίρνουμε $\sqrt{n}=(1+\theta_n)^n \geq 1+n\theta_n > n\theta_n$. Επομένως $\theta_n < \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

Αλλά $\lim\dfrac{1}{\sqrt{n}}=0$ οπότε, από το κριτήριο παρεμβολής παίρνουμε $\lim\theta_n=0$. Συνεπώς $\lim\sqrt[2n]{n}=1$ και άρα $\lim\sqrt[n]{n}=\left(\lim\sqrt[2n]{n}\right)^2=1$. (Τι θα συνέβαινε αν είχαμε θέσει $\theta_n=\sqrt[n]{n}-1$, αντί $\theta_n=\sqrt[2n]{n}-1$;)■

2.5.5 Παραδείγματα

1. Να υπολογιστούν τα όρια: **i)** $\lim\sqrt[n]{2^n+3^n}$, **ii)** $\lim\sqrt[n]{n^3-2n^2+3n+1}$ και **iii)** $\lim\dfrac{n}{2^n}$.

Λύση: i) $\sqrt[n]{2^n+3^n}=3\sqrt[n]{1+(\frac{2}{3})^n}$. Αλλά $3 \leq 3\sqrt[n]{1+(\frac{2}{3})^n} \leq 3\sqrt[n]{2}$.

Επίσης, $\lim\sqrt[n]{2}=1$, οπότε, από το κριτήριο παρεμβολής, $\lim\sqrt[n]{2^n+3^n}=\lim\left(3\cdot\sqrt[n]{1+\left(\frac{2}{3}\right)^n}\right)=$

$=3$.

ii) $\sqrt[n]{n^3-2n^2+3n+1}<\sqrt[n]{n^3+3n+1} \leq \sqrt[n]{n^3+3n^3+n^3}=\sqrt[n]{5n^3}$. Ακόμη,

$\sqrt[n]{n^3-2n^2+3n+1}=\sqrt[n]{n^2(n-2)+3n+1} \underset{\text{για } n\geq 2}{\geq} \sqrt[n]{3n+1}>\sqrt[n]{3n}$.

Τελικά έχουμε: $\sqrt[n]{3n}<\sqrt[n]{n^3-2n^2+3n+1}<\sqrt[n]{5n^3}$, για κάθε $n \geq 2$.

Υπολογίζουμε τα όρια $\lim\sqrt[n]{5n^3}$ και $\lim\sqrt[n]{3n}$.

$\lim\sqrt[n]{5n^3}=\lim\sqrt[n]{5}\left(\lim\sqrt[n]{n}\right)^3=1\cdot 1=1$ και $\lim\sqrt[n]{3n}=\lim\sqrt[n]{3}\lim\sqrt[n]{n}=1\cdot 1=1$. Από το κριτήριο παρεμβολής προκύπτει ότι και $\lim\sqrt[n]{n^3-2n^2+3n+1}=1$.

iii) Εφαρμόζουμε το κριτήριο λόγου (παράδειγμα 2.5.3.5). $\lim\dfrac{(n+1)/2^{n+1}}{n/2^n}=\dfrac{1}{2}\lim\dfrac{n+1}{n}=$ $=\dfrac{1}{2}<1$. Επομένως $\lim\dfrac{n}{2^n}=0$.

2. Υποθέτουμε ότι η ακολουθία (α_n) τείνει στο α. Τότε και ο **αριθμητικός μέσος** $\overline{\alpha}_n=\dfrac{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}{n}$ τείνει και αυτός στο α.

***Απόδειξη:** Έστω $\varepsilon>0$. Επειδή $\lim\alpha_n=\alpha$, υπάρχει n_0 με $|\alpha_n-\alpha|<\dfrac{\varepsilon}{2}$, για κάθε $n\geq n_0$.

Επομένως, αν $n\geq n_0$ τότε $|\overline{\alpha}_n-\alpha|=\left|\dfrac{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}{n}-\alpha\right|=$

$$=\left|\frac{(\alpha_1-\alpha)+(\alpha_2-\alpha)+\cdots+(\alpha_{n_0}-\alpha)+(\alpha_{n_0+1}-\alpha)+\cdots+(\alpha_n-\alpha)}{n}\right|\leq$$

$$\leq\frac{|\alpha_1-\alpha|+\cdots+|\alpha_{n_0}-\alpha|+|\alpha_{n_0+1}-\alpha|+\cdots+|\alpha_n-\alpha|}{n}=\frac{|\alpha_1-\alpha|+\cdots+|\alpha_{n_0}-\alpha|}{n}+$$

$$+\frac{|\alpha_{n_0+1}-\alpha|+\cdots+|\alpha_n-\alpha|}{n}<\frac{|\alpha_1-\alpha|+\cdots+|\alpha_{n_0}-\alpha|}{n}+\frac{(n-n_0)\varepsilon}{2n}<$$

$<\dfrac{|\alpha_1-\alpha|+\cdots+|\alpha_{n_0}-\alpha|}{n}+\dfrac{\varepsilon}{2}$. Αλλά $\lim\dfrac{|\alpha_1-\alpha|+\cdots+|\alpha_{n_0}-\alpha|}{n}=0$. Υπάρχει λοιπόν n_0' με την ιδιότητα $\dfrac{|\alpha_1-\alpha|+\cdots+|\alpha_{n_0}-\alpha|}{n}<\dfrac{\varepsilon}{2}$, για κάθε $n\geq n_0'$. Έστω τώρα $n_0''=\max\{n_0,n_0'\}$.

Τότε, για κάθε $n\geq n_0''$ θα έχουμε: $|\overline{\alpha}_n-\alpha|<\dfrac{|\alpha_1-\alpha|+\cdots+|\alpha_{n_0}-\alpha|}{n}+\dfrac{\varepsilon}{2}<\dfrac{\varepsilon}{2}+\dfrac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$.

3. Να βρεθεί το όριο $\lim\dfrac{1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\cdots+\sqrt[n]{n}}{n}$.

Λύση: Είναι $\lim\sqrt[n]{n}=1$. Σύμφωνα με το προηγούμενο παράδειγμα, έχουμε $\lim\dfrac{1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\cdots+\sqrt[n]{n}}{n}=1$.

4. Αν $\lim(x_{n+1}-x_n)=a$ να αποδειχθεί ότι και $\lim\dfrac{x_n}{n}=a$.

Λύση: Με βάση παράδειγμα 2.5.5.2, $\lim\dfrac{(x_2-x_1)+(x_3-x_2)+\cdots+(x_{n+1}-x_n)}{n}=a$. Αλλά

$$\lim\frac{(x_2-x_1)+(x_3-x_2)+\cdots+(x_{n+1}-x_n)}{n}=\lim\frac{-x_1+x_{n+1}}{n}=-\lim\frac{x_1}{n}+\lim\frac{x_{n+1}}{n}=\lim\frac{x_{n+1}}{n}.$$

Άρα $\lim\dfrac{x_{n+1}}{n}=a$ και $\lim\dfrac{x_n}{n}=\lim\dfrac{x_{n+1}}{n+1}=\lim\dfrac{x_{n+1}}{n}\lim\dfrac{n+1}{n}=a\cdot 1=a$

5. Υποθέτουμε ότι η ακολουθία (α_n) αποτελείται από θετικούς όρους και τείνει στο $\alpha > 0$. Τότε και ο **γεωμετρικός μέσος** $\gamma_n = \sqrt[n]{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n}$ τείνει στο α.

Απόδειξη: Εφόσον $\alpha_n \to \alpha$, έχουμε $\alpha_n^{-1} \to \alpha^{-1}$. Με βάση παράδειγμα 2.5.5.2, $\dfrac{\alpha_1^{-1}+\alpha_2^{-1}+\cdots+\alpha_n^{-1}}{n} \to \alpha^{-1}$ και επομένως $\dfrac{n}{\alpha_1^{-1}+\alpha_2^{-1}+\cdots+\alpha_n^{-1}} \to \alpha$.

Από την ανισότητα του Cauchy έχουμε: $\dfrac{n}{\alpha_1^{-1}+\alpha_2^{-1}+\cdots+\alpha_n^{-1}} \le \sqrt[n]{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n}$ $\le \dfrac{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}{n}$.

Επειδή $\lim\dfrac{n}{\alpha_1^{-1}+\alpha_2^{-1}+\cdots+\alpha_n^{-1}} = \lim\dfrac{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}{n} = \alpha$, από το κριτήριο παρεμβολής παίρνουμε $\lim\sqrt[n]{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n} = \alpha$.

6. Να βρεθεί το όριο $\lim\sqrt[n]{\dfrac{n!}{5\cdot 9\cdots(4n+1)}}$.

Λύση: $\sqrt[n]{\dfrac{n!}{5\cdot 9\cdots(4n+1)}} = \dfrac{1}{\sqrt[n]{\dfrac{5}{1}\cdot\dfrac{9}{2}\cdot\dfrac{13}{3}\cdots\dfrac{4n+1}{n}}}$.

Αλλά $\lim\dfrac{4n+1}{n} = 4$, οπότε, σύμφωνα με το παράδειγμα 2.5.5.5 και ο γεωμετρικός μέσος $\sqrt[n]{\dfrac{5}{1}\cdot\dfrac{9}{2}\cdot\dfrac{13}{3}\cdots\dfrac{4n+1}{n}}$ τείνει στο 4. Επομένως $\lim\sqrt[n]{\dfrac{n!}{5\cdot 9\cdots(4n+1)}} = \dfrac{1}{\lim\sqrt[n]{\dfrac{5}{1}\cdot\dfrac{9}{2}\cdot\dfrac{13}{3}\cdots\dfrac{4n+1}{n}}} =$ $= \dfrac{1}{4}$.

Άλυτες ασκήσεις

1. Να υπολογίσετε τα όρια: **i)** $\lim 3^{-\frac{2}{\sqrt[n]{n^3}}}$, **ii)** $\lim\sqrt[n]{6^n+7^n+8^n}$, **iii)** $\lim\dfrac{n^{2n}}{[(2n)!]^3}$,

iv) $\lim\sqrt[n]{6n^5+4n^4-5n^2+n+3}$ και **v)** $\lim\left[\sqrt[n]{2^n+5^n}-\dfrac{9}{2}\right]^n$.

2. Να υπολογίσετε τα όρια: $\lim\sqrt[n]{\dfrac{3n^3+2n^2+n+1}{n^4+2n^2+3}}$ και $\lim\sqrt[n^2]{2n^4-n^3+n^2+1}$.

3. Να υπολογίσετε τα όρια: **i)** $\lim\dfrac{\sqrt{\dfrac{3}{1}}+\sqrt{\dfrac{5}{2}}+\sqrt{\dfrac{7}{3}}+\cdots+\sqrt{\dfrac{2n+1}{n}}}{n}$, **ii)** $\lim\sqrt[n]{\dfrac{3\cdot 6\cdot 9\cdots(3n)}{(n+1)!}}$.

2.6 Μονότονες ακολουθίες

2.6.1 Ορισμός

Μια ακολουθία, της οποίας οι όροι αυξάνουν συνεχώς, θα λέγεται ***γνησίως αύξουσα****. Δηλαδή, η* (α_n) *είναι γνησίως αύξουσα αν* $\alpha_n < \alpha_{n+1}$*, για κάθε* $n = 1, 2, \ldots$ *Αν, αντί* $\alpha_n < \alpha_{n+1}$*, θέσουμε* $\alpha_n \le \alpha_{n+1}$*, τότε η ακολουθία θα λέγεται απλά,* ***αύξουσα****.*

Αν $\alpha_n > \alpha_{n+1}$*, για κάθε* $n = 1, 2, \ldots$*, τότε η ακολουθία* (α_n) *λέγεται* ***γνησίως φθίνουσα****. Αν* $\alpha_n \ge \alpha_{n+1}$*, για κάθε* $n = 1, 2, \ldots$*, τότε η ακολουθία* (α_n) *λέγεται* ***φθίνουσα****.*

Μια ακολουθία που είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα λέγεται ***γνησίως μονότονη****.*

Μια ακολουθία που είναι αύξουσα ή φθίνουσα λέγεται ***μονότονη****.*

Για παράδειγμα, η ακολουθία με γενικό τύπο $\alpha_n = \dfrac{n}{n+1}$ είναι γνησίως αύξουσα. Πράγματι, $\alpha_{n+1} - \alpha_n = \dfrac{n+1}{n+2} - \dfrac{n}{n+1} = \dfrac{1}{(n+2)(n+1)} > 0$, οπότε $\alpha_{n+1} > \alpha_n$.

Σε μια γνησίως αύξουσα ακολουθία, κάθε όρος είναι μεγαλύτερος από τον προηγούμενό του, ενώ σε μια αύξουσα, μπορεί να είναι και ίσος με αυτόν. Έτσι, οι σταθερές ακολουθίες μπορούν να θεωρηθούν αύξουσες, χωρίς φυσικά να είναι γνησίως αύξουσες. Μια γνησίως αύξουσα ακολουθία είναι αύξουσα, ενώ μια αύξουσα δεν είναι πάντα γνησίως αύξουσα.

Προφανώς, μια αύξουσα ακολουθία είναι κάτω φραγμένη από τον 1^{o} όρο της, ενώ μια φθίνουσα είναι άνω φραγμένη (πάλι απ' τον 1^{o} όρο).

2.6.2 Παραδείγματα

1. Να δειχθεί ότι η ακολουθία $\left(\dfrac{n!}{n^n}\right)$ είναι γνησίως φθίνουσα.

Λύση: Παρατηρούμε ότι $\dfrac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = \dfrac{(n+1)n^n}{(n+1)^{n+1}} = \dfrac{n^n}{(n+1)^n} < 1$. Άρα $\dfrac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} < \dfrac{n!}{n^n}$, δηλαδή η ακολουθία είναι γνησίως φθίνουσα.

2. Να εξεταστεί ως προς τη μονοτονία η ακολουθία (α_n) με γενικό όρο $\alpha_n = \dfrac{n^2}{7^n}$.

Λύση: α΄ τρόπος $\alpha_1 = \frac{1}{7}$ και $\alpha_2 = \frac{4}{49} < \frac{1}{7} = \alpha_1$. Θα αποδείξουμε ότι η ακολουθία αυτή είναι γνησίως φθίνουσα:

$\alpha_{n+1} < \alpha_n \Leftrightarrow \frac{(n+1)^2}{7^{n+1}} < \frac{n^2}{7^n} \Leftrightarrow 7^n(n+1)^2 < 7^{n+1}n^2 \Leftrightarrow (n+1)^2 < 7n^2 \Leftrightarrow 6n^2 - 2n - 1 > 0$.

Το τριώνυμο $6x^2 - 2x - 1$ έχει ρίζες $\frac{1 \pm \sqrt{7}}{6}$, μικρότερες του 1. Εφόσον $n \geq 1$, έπεται ότι $6n^2 - 2n - 1 > 0$ και τελειώσαμε.

β΄ τρόπος $\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = \frac{(n+1)^2/7^{n+1}}{n^2/7^n} = \frac{1}{7}\frac{n^2+2n+1}{n^2} < \frac{1}{7}\frac{n^2+2n^2+n^2}{n^2} = \frac{4}{7} < 1 \quad \Rightarrow \quad \alpha_{n+1} < \alpha_n$.

3. Να εξεταστεί ως προς τη μονοτονία η ακολουθία (α_n) που ορίζεται από τις σχέσεις: $\alpha_{n+1} = \alpha_n^2 - 3\alpha_n + 3$ και $\alpha_1 = 4$.

Λύση: Σχηματίζουμε τη διαφορά $\alpha_{n+1} - \alpha_n = \alpha_n^2 - 4\alpha_n + 3$. Το τριώνυμο $x^2 - 4x + 3$ έχει ρίζες 1 και 3. Εφόσον $1 < 3 < \alpha_1 = 4$, προκύπτει ότι $\alpha_2 - \alpha_1 > 0 \Leftrightarrow \alpha_2 > \alpha_1$. Για να δείξουμε λοιπόν ότι η ακολουθία (α_n) είναι γνησίως αύξουσα, αρκεί να δείξουμε ότι $3 < \alpha_n$ για κάθε $n = 1, 2, \ldots$

Για $n = 1$ προφανώς ισχύει. Έστω ότι $3 < \alpha_k$. Τότε $\alpha_{k+1} = \alpha_k^2 - 3\alpha_k + 3 = \alpha_k(\alpha_k - 3) + 3 > 3$, εφόσον $\alpha_k - 3 > 0$.

4. Να δειχθεί ότι η ακολουθία (α_n) που ορίζεται από τις σχέσεις $\alpha_{n+1} = \sqrt{1 + \frac{1}{2}\alpha_n}$ και $\alpha_1 = \frac{1}{2}$, είναι γνησίως αύξουσα.

Λύση: Παρατηρούμε ότι $\alpha_2 = \sqrt{1 + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2} > \frac{1}{2} = \alpha_1$. Έστω ότι $\alpha_{n+1} > \alpha_n$. Τότε $1 + \frac{1}{2}\alpha_{n+1} > 1 + \frac{1}{2}\alpha_n \quad \Rightarrow \quad \sqrt{1 + \frac{1}{2}\alpha_{n+1}} > \sqrt{1 + \frac{1}{2}\alpha_n} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha_{n+2} > \alpha_{n+1}$.

Επαγωγικά λοιπόν συμπεραίνουμε ότι $\alpha_{n+1} > \alpha_n$, για κάθε $n = 1, 2, \ldots$

Άλυτες ασκήσεις

1. Να εξεταστούν ως προς τη μονοτονία οι ακολουθίες: **i)** $\alpha_n = \frac{n^2 + n}{5^n}$, $n = 1, 2, \ldots$,

ii) $\beta_{n+1} = -\beta_n^2 + 8\beta_n - 10$, $\beta_1 = 0$ και **iii)** $\gamma_{n+1} = \sqrt{2 + \frac{1}{3}\gamma_n}$, $\gamma_1 = 5$.

2. Να αποδείξετε ότι η ακολουθία $\left(\frac{(2n)!}{n^n}\right)$ είναι γνησίως αύξουσα.

(Υπόδειξη: Χρησιμοποιώντας την ανισότητα Bernoulli, δείξτε ότι $\frac{n^n}{(n+1)^n} \geq \frac{1}{n+1}$).

2.7 Υπακολουθίες μιας ακολουθίας

2.7.1 Ορισμός

Θεωρούμε μια ακολουθία (α_n) *και μια γνησίως αύξουσα ακολουθία θετικών ακεραίων* $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \cdots < \lambda_n < \cdots$. *Τότε ορίζεται μια ακολουθία* (β_n) *με τύπο* $\beta_n = \alpha_{\lambda_n}$, *για κάθε* $n = 1, 2, \ldots$ *Η* (β_n) *λέγεται* ***υπακολουθία*** *της* (α_n).

Συνήθως δεν χρησιμοποιούμε διαφορετικό σύμβολο και έτσι μιλάμε για την υπακολουθία (α_{λ_n}) της (α_n).

2.7.2 Παραδείγματα

1. Αν $\lambda_n = n + k$, όπου *k* ένας σταθερός θετικός ακέραιος, τότε η υπακολουθία (α_{λ_n}) είναι η ακόλουθη: $(\alpha_{k+1}, \alpha_{k+2}, \alpha_{k+3}, \cdots)$, δηλαδή η ακολουθία που προκύπτει από την (α_n) αν **διαγράψουμε τους *k* αρχικούς όρους της**.

2. Αν $\lambda_n = 2n$, τότε η υπακολουθία (α_{λ_n}) είναι η ακόλουθη: $(\alpha_2, \alpha_4, \alpha_6, \cdots)$, δηλαδή η ακολουθία **των αρτίων όρων** της (α_n).

3. Αν $\lambda_n = 2n - 1$, τότε η υπακολουθία (α_{λ_n}) είναι η ακόλουθη: $(\alpha_1, \alpha_3, \alpha_5, \cdots)$, δηλαδή η ακολουθία **των περιττών όρων** της (α_n).

4. Αν $\lambda_n = 2^n$, τότε η υπακολουθία (α_{λ_n}) είναι η ακόλουθη: $(\alpha_2, \alpha_4, \alpha_8, \alpha_{16}, \cdots)$.

5. Έστω $\alpha_n = \dfrac{n+1}{2n}$, $n = 1, 2, \ldots$ Βρείτε τις υπακολουθίες: (α_{n+5}), (α_{2n-1}), (α_{2n}), (α_{2^n}) και (α_{3n+2}).

Λύση: $\alpha_{n+5} = \dfrac{n+6}{2n+10}$, $\alpha_{2n-1} = \dfrac{2n}{4n-2}$, $\alpha_{2n} = \dfrac{2n+1}{4n}$, $\alpha_{2^n} = \dfrac{2^n+1}{2^{n+1}}$ και $\alpha_{3n+2} = \dfrac{3n+3}{6n+4}$.

Προφανώς μια ακολουθία είναι υπακολουθία του εαυτού της. (Για $\lambda_n = n$).

2.7.3 Πρόταση

Αν μια ακολουθία (α_n) *συγκλίνει σ' έναν πραγματικό αριθμό α, τότε και κάθε υπακολουθία της συγκλίνει στο α.*

Απόδειξη: Θεωρούμε μια υπακολουθία (α_{λ_n}). Αρχικά θα δείξουμε ότι $\lambda_n \geq n$, για κάθε $n = 1, 2, \ldots$ Γνωρίζουμε ότι η (λ_n) είναι γνησίως αύξουσα. Θα χρησιμοποιήσουμε επαγωγή.

Για $n=1$, $\lambda_1 \geq 1$ γιατί το λ_1 είναι θετικός ακέραιος.

Έστω ότι $\lambda_k \geq k$. Τότε $\lambda_{k+1} > \lambda_k$ και επομένως $\lambda_{k+1} \geq \lambda_k + 1 \geq k+1$.

Έστω τώρα $\varepsilon > 0$. Τότε υπάρχει θετικός ακέραιος n_0 με την ιδιότητα $|\alpha_n - \alpha| < \varepsilon$, για κάθε $n \geq n_0$. Αλλά τότε $\lambda_n \geq \lambda_{n_0} \geq n_0$. Επομένως $|\alpha_{\lambda_n} - \alpha| < \varepsilon$, για κάθε $n \geq n_0$.■

Η προηγούμενη πρόταση μας επιτρέπει να δείχνουμε ότι μια ακολουθία δεν συγκλίνει. Έτσι, η ακολουθία $\alpha_n = n,\ n=1,2,\ldots$ δεν συγκλίνει γιατί, αν συνέκλινε σ' έναν αριθμό *α*, τότε και η υπακολουθία (α_{n+1}) θα συνέκλινε στο *α*. Αλλά τότε $\lim(\alpha_{n+1} - \alpha_n) = \alpha - \alpha = 0$. Είναι όμως $\alpha_{n+1} - \alpha_n = 1$, για κάθε $n = 1,2,\ldots$, άτοπο.

Οι υπακολουθίες των αρτίων και των περιττών όρων έχουν ιδιαίτερη σημασία. Σε ορισμένα προβλήματα, ενώ δεν είμαστε σε θέση να αποδείξουμε απ' ευθείας ότι μια ακολουθία (α_n) συγκλίνει σ' έναν αριθμό *α*, μπορούμε εντούτοις να αποδείξουμε ότι οι υπακολουθίες (α_{2n}) και (α_{2n-1}) συγκλίνουν στο *α*. Χρειαζόμαστε λοιπόν την ακόλουθη πρόταση:

2.7.4 Πρόταση

Αν οι υπακολουθίες (α_{2n}) *και* (α_{2n-1}) *των αρτίων και των περιττών όρων αντίστοιχα συγκλίνουν στον ίδιο πραγματικό αριθμό α, τότε και η ακολουθία* (α_n) *συγκλίνει στο α.*

***Απόδειξη:** Εφόσον $\lim \alpha_{2n} = \alpha$, υπάρχει n_0 με την ιδιότητα $|\alpha_{2n} - \alpha| < \varepsilon$, για κάθε $n \geq n_0$. Αντίστοιχα, υπάρχει n_0' με την ιδιότητα $|\alpha_{2n-1} - \alpha| < \varepsilon$, για κάθε $n \geq n_0'$. Έστω $n_0'' = 2\max\{n_0, n_0'\}$. Τότε, για κάθε $n \geq n_0''$, θα έχουμε:

α) Αν ο n είναι άρτιος, της μορφής $n = 2k$, τότε $2k \geq 2\max\{n_0, n_0'\} \Rightarrow\ k \geq \max\{n_0, n_0'\} \geq n_0$. Επομένως $|\alpha_n - \alpha| = |\alpha_{2k} - \alpha| < \varepsilon$, γιατί $k \geq n_0$.

β) Αν ο n είναι περιττός, της μορφής $n = 2k-1$, τότε $2k - 1 \geq 2\max\{n_0, n_0'\} \geq 2n_0' > $ $> 2n_0' - 1 \ \Rightarrow\ k > n_0'$. Επομένως $|\alpha_n - \alpha| = |\alpha_{2k-1} - \alpha| < \varepsilon$, γιατί $k > n_0'$.

Σε κάθε περίπτωση παίρνουμε λοιπόν $|\alpha_n - \alpha| < \varepsilon$, για κάθε $n \geq n_0''$. ■

2.8 Το αξίωμα πληρότητας των πραγματικών αριθμών

Κατ' αρχάς γενικεύουμε τα όσα αναπτύξαμε στην παράγραφο 2.3.

2.8.1 Ορισμός

*Ένα μη κενό σύνολο πραγματικών αριθμών A λέγεται **άνω φραγμένο** αν υπάρχει κάποιος πραγματικός αριθμός s με την ιδιότητα* $x \leq s$, *για κάθε* $x \in A$. *Ο αριθμός s λέγεται **άνω φράγμα** του συνόλου A.*

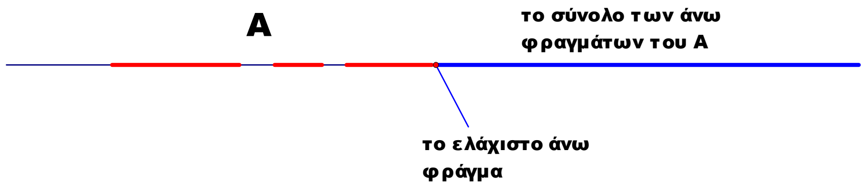
*Ένα μη κενό σύνολο πραγματικών αριθμών A λέγεται **κάτω φραγμένο** αν υπάρχει κάποιος πραγματικός αριθμός t με την ιδιότητα* $t \leq x$, *για κάθε* $x \in A$. *Ο αριθμός t λέγεται **κάτω φράγμα** του συνόλου A.*

*Ένα μη κενό σύνολο πραγματικών αριθμών A λέγεται **φραγμένο** αν είναι άνω και κάτω φραγμένο, αν δηλαδή υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί t και s με την ιδιότητα* $t \leq x \leq s$, *για κάθε* $x \in A$.

*Ένα μη κενό σύνολο πραγματικών αριθμών A λέγεται **απολύτως φραγμένο** αν υπάρχει πραγματικός (μη αρνητικός) αριθμός l με την ιδιότητα* $|x| \leq l$, *για κάθε* $x \in A$.

Ακολουθώντας κανείς την απόδειξη της πρότασης 2.3.5, μπορεί να αποδείξει εύκολα ότι **ένα σύνολο είναι φραγμένο αν και μόνον αν είναι απολύτως φραγμένο**.

Ας μελετήσουμε τώρα καλύτερα την περίπτωση ενός άνω φραγμένου συνόλου. Αν ο αριθμός *s* είναι ένα άνω φράγμα του *A*, τότε και κάθε αριθμός s' μεγαλύτερος του *s* θα είναι επίσης ένα άνω φράγμα του *A*. Διαισθητικά αντιλαμβανόμαστε ότι το σύνολο των άνω φραγμάτων του *A* θα πρέπει να είναι ένα **άπειρο προς τα δεξιά διάστημα**.



Από την άλλη, το διάστημα αυτό θα φράσσεται από τα αριστερά από κάθε στοιχείο του *A*, γιατί $x \leq s$ για κάθε άνω φράγμα *s* του *A* και κάθε στοιχείο *x* του *A*. Είναι δηλαδή το διάστημα των άνω φραγμάτων του *A* **κάτω φραγμένο** από οποιοδήποτε στοιχείο του *A*.

Ποιά διαστήματα μπορούμε να σκεφτούμε, τα οποία να είναι άπειρα προς τα δεξιά και κάτω φραγμένα; **Μόνον διαστήματα της μορφής** $(s,\ +\infty)$ **ή** $[s,\ +\infty)$, όπου s ένας πραγματικός αριθμός. Θα αποκλείσουμε την περίπτωση $(s,\ +\infty)$.

Αν το σύνολο των άνω φραγμάτων του A ήταν της μορφής $(s,\ +\infty)$, τότε **ο αριθμός *s* δεν θα ήταν άνω φράγμα του *A***. Επομένως, θα υπήρχε $x \in A$ με $s < x$. Αλλά τότε $s < \frac{s+x}{2} < x$ και επομένως $\frac{s+x}{2} \in (s,\ +\infty)$, δηλαδή ο αριθμός $\frac{s+x}{2}$ θα ήταν ένα άνω φράγμα του συνόλου A. Επειδή $x \in A$, θα είχαμε $x < \frac{s+x}{2}$, αντίφαση.

Επομένως, το σύνολο των άνω φραγμάτων του A είναι της μορφής $[s,\ +\infty)$. Το άνω φράγμα s είναι λοιπόν το **ελάχιστο άνω φράγμα του *A*** και λέγεται **supremum** του A.

Το σύνολο των ρητών αριθμών $\mathbb{Q}$, παρ' όλο που έχει τις ίδιες ιδιότητες με το σύνολο των πραγματικών $\mathbb{R}$ όσον αφορά τις πράξεις και τη διάταξη των στοιχείων του, **δεν έχει εν τούτοις την παραπάνω ιδιότητα**.

Για παράδειγμα, το σύνολο των ρητών αριθμών $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > 0 \text{ και } x^2 < 2\}$ είναι μη κενό (γιατί $1 \in A$) και άνω φραγμένο (π.χ. από το 5). Αν το σύνολο των **ρητών άνω φραγμάτων του *A*** είχε ελάχιστο στοιχείο, τότε (αποδεικνύεται) ότι αυτό θα ήταν το $\sqrt{2}$. Αλλά το $\sqrt{2}$ δεν είναι ρητός!

Έτσι, δεχόμαστε ως αξίωμα:

2.8.2 Αξίωμα (Αξίωμα πληρότητας των πραγματικών αριθμών)

Κάθε μη κενό άνω φραγμένο υποσύνολο A των πραγματικών αριθμών έχει ένα (προφανώς μοναδικό) ελάχιστο άνω φράγμα. Το ελάχιστο αυτό άνω φράγμα λέγεται supremum του A και συμβολίζεται με supA. ■

Οι συνέπειες του αξιώματος 26 είναι καταλυτικές. Ας δούμε πρώτα μια άμεση συνέπεια:

2.8.3 Πρόταση (Υπαρξη μέγιστου κάτω φράγματος)

Κάθε μη κενό κάτω φραγμένο υποσύνολο A των πραγματικών αριθμών έχει ένα (προφανώς μοναδικό) ***μέγιστο κάτω φράγμα****. Το μέγιστο αυτό κάτω φράγμα λέγεται* ***infimum*** *του A και συμβολίζεται με infA.*

Απόδειξη: Θεωρούμε το σύνολο $B = \{-x \mid x \in A\}$. Αν t είναι ένα κάτω φράγμα του A, τότε $t \le x$, για κάθε $x \in A$. Επομένως $-x \le -t$, για κάθε $x \in A$, δηλαδή το $-t$ είναι ένα άνω φράγμα του συνόλου B. Σύμφωνα με το αξίωμα πληρότητας, υπάρχει το ελάχιστο άνω φράγμα του B, το οποίο ας το συμβολίσουμε με s. Ισχυριζόμαστε ότι το $-s$ είναι μέγιστο άνω φράγμα του A.

Κατ' αρχάς το $-s$ είναι ένα κάτω φράγμα του A. Πράγματι, από τη σχέση $-x \le s$, για κάθε $x \in A$, παίρνουμε $-s \le x$, για κάθε $x \in A$.

Αν τώρα t είναι ένα κάτω φράγμα του A με $-s < t$, τότε $-s < t \le x$ για κάθε $x \in A$ και επομένως $-x \le -t < s$ για κάθε $x \in A$, δηλαδή το $-t$ θα ήταν ένα άνω φράγμα του B, μικρότερο απ' το ελάχιστο άνω φράγμα αυτού. Άτοπο. ■

2.8.4 Παρατήρηση

Σημειώνουμε ότι το supremum ή το infimum ενός συνόλου A **δεν είναι κατ' ανάγκην στοιχείο του A**. Για παράδειγμα, όπως έχουμε δει, το σύνολο $A = \{1 - \frac{1}{2^n} \mid n = 1, 2, \ldots\}$ είναι άνω φραγμένο απ' το 1. Το 1 δεν ανήκει προφανώς στο A. Θα δείξουμε ότι $1 = \sup A$.

Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει ένα άνω φράγμα s του A με $s < 1$. Τότε ο αριθμός $\varepsilon = 1 - s$ είναι θετικός. Επειδή όμως $\frac{1}{2^n} \to 0$, θα υπάρχει n_0 με $\frac{1}{2^n} < \varepsilon = 1 - s$, για κάθε $n \ge n_0$. Άρα $s < 1 - \frac{1}{2^n}$, για κάθε $n \ge n_0$, το οποίο είναι άτοπο, αφού το s είναι άνω φράγμα του A.

2.8.5 Πρόταση*

Έστω A και B δύο μη κενά υποσύνολα του $\mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι $A \subseteq B$. Τότε,

i) $\sup A \le \sup B$ *και* ***ii)*** $\inf A \ge \inf B$.

Απόδειξη: i) Έστω $s = \sup B$. Τότε $x \le s$, για κάθε $x \in B$. Επειδή $A \subseteq B$, θα έχουμε $x \le s$, για κάθε $x \in A$. Το s είναι λοιπόν ένα άνω φράγμα του συνόλου A. Επομένως, με βάση τον ορισμό του supremum του A, $\sup A \le s$.

ii) Η απόδειξη του (ii) είναι παρόμοια. (Συμπληρώστε την απόδειξη, θέτοντας $t = \inf A$).■

Στη συνέχεια ασχολούμαστε με τις εφαρμογές του αξώματος πληρότητας των πραγματικών αριθμών στη μελέτη της σύγκλισης ακολουθιών.

Έστω λοιπόν (α_n) μια άνω φραγμένη ακολουθία. Το supremum της (α_n) ορίζεται να είναι το supremum του συνόλου $\{\alpha_n \mid n = 1, 2, \ldots\}$. Αυτό συμβολίζεται με $\sup \alpha_n$.

Αντίστοιχη ορολογία και συμβολισμό υιοθετούμε και για τις κάτω φραγμένες ακολουθίες.

Η επόμενη πρόταση παίζει ρόλο-κλειδί στη μελέτη της σύγκλισης ακολουθιών.

2.8.6 Πρόταση

i) *Έστω* (α_n) *μια αύξουσα ακολουθία πραγματικών αριθμών. Υποθέτουμε ότι η* (α_n) *είναι άνω φραγμένη. Τότε αυτή συγκλίνει και μάλιστα* $\lim \alpha_n = \sup \alpha_n$.

ii) *Έστω* (α_n) *μια φθίνουσα ακολουθία πραγματικών αριθμών. Υποθέτουμε ότι η* (α_n) *είναι κάτω φραγμένη. Τότε αυτή* ***συγκλίνει*** *και μάλιστα* $\lim \alpha_n = \inf \alpha_n$.

***Απόδειξη: i)** Έστω $s = \sup \alpha_n$. Αν $\varepsilon > 0$, τότε ο αριθμός $s - \varepsilon < s$ δεν είναι άνω φράγμα της (α_n). Άρα υπάρχει n_0 με $s - \varepsilon < \alpha_{n_0} \le s$. Επειδή η (α_n) είναι αύξουσα, θα έχουμε $s - \varepsilon < \alpha_{n_0} \le \alpha_n$, για κάθε $n \ge n_0$. Επειδή όμως ο αριθμός s είναι άνω φράγμα της (α_n), θα έχουμε επίσης $\alpha_n \le s$, για κάθε $n \ge n_0$. Τελικά, $s - \varepsilon < \alpha_n \le s$, για κάθε $n \ge n_0$. Απ' την τελευταία αυτή σχέση προκύπτει (αν τη συμπληρώσουμε σε $s - \varepsilon < \alpha_n \le s < s + \varepsilon$) ότι $|\alpha_n - s| < \varepsilon$, για κάθε $n \ge n_0$.

ii) Η ακολουθία $(-\alpha_n)$ είναι αύξουσα και άνω φραγμένη. Άρα συγκλίνει στο supremum αυτής. Επομένως και η (α_n) συγκλίνει και $\lim \alpha_n = -\lim(-\alpha_n) = -\sup(-\alpha_n) = \inf(\alpha_n)$. (Στην απόδειξη της πρότασης 2.8.3 είδαμε ότι $-\sup\{-x \mid x \in A\} = \inf A$). ■

2.8.7 Παραδείγματα

1. Δίνεται η ακολουθία (α_n) που ορίζεται απ' τις σχέσεις: $\alpha_1 = 2$ και $\alpha_{n+1} = \dfrac{2\alpha_n + 1}{3}$. Χωρίς να βρεθεί ο γενικός της όρος, να δειχθεί ότι συγκλίνει και να βρεθεί το όριό της.

Λύση: Παρατηρούμε ότι $\alpha_2 = \dfrac{2\alpha_1 + 1}{3} = \dfrac{5}{3} < 2 = \alpha_1$. Επαγωγικά θα δείξουμε ότι η (α_n) είναι γνησίως φθίνουσα. Έστω ότι $\alpha_{k+1} < \alpha_k$. Τότε $\dfrac{2\alpha_{k+1} + 1}{3} < \dfrac{2\alpha_k + 1}{3} \Leftrightarrow \alpha_{k+2} < \alpha_{k+1}$. Άρα η (α_n) είναι γνησίως φθίνουσα. Επειδή αποτελείται από θετικούς όρους είναι και κάτω φραγμένη απ' το 0.

Άρα συγκλίνει. Έστω $x = \lim \alpha_n$. Τότε $x = \lim \alpha_{n+1} = \lim \dfrac{2\alpha_n + 1}{3} = \dfrac{2x + 1}{3}$. Επομένως $x = 1$.

2. Να αποδειχθεί ότι η ακολουθία (α_n) που ορίζεται απ' τις σχέσεις $\alpha_1 = 1$ και $\alpha_{n+1} = \sqrt{1+3\alpha_n}$ συγκλίνει. Να βρεθεί το όριό της.

Λύση: α΄ τρόπος) Παρατηρούμε ότι $\alpha_2 = \sqrt{1+3} = 2 > 1 = \alpha_1$. Επαγωγικά θα δείξουμε ότι η (α_n) είναι γνησίως αύξουσα.

Έστω ότι $\alpha_{k+1} > \alpha_k$. Τότε $1+3\alpha_{k+1} > 1+3\alpha_k \Rightarrow \sqrt{1+3\alpha_{k+1}} > \sqrt{1+3\alpha_k} \Leftrightarrow \alpha_{k+2} > \alpha_{k+1}$.

Αναζητούμε ένα άνω φράγμα της ακολουθίας. Εφόσον $\alpha_1 = 1$ και η (α_n) είναι γνησίως αύξουσα, θα πρέπει $\sigma > 1$.

Τότε $\alpha_n < \sigma \Rightarrow \alpha_{n+1} = \sqrt{1+3\alpha_n} < \sqrt{1+3\sigma}$. Αν λοιπόν $\sqrt{1+3\sigma} \le \sigma$, τότε θα έχουμε $\alpha_{n+1} < \sigma$.

Η σχέση $\sqrt{1+3\sigma} \le \sigma$ γίνεται $0 \le \sigma^2 - 3\sigma - 1 = (\sigma - \frac{3-\sqrt{13}}{2})(\sigma - \frac{3+\sqrt{13}}{2}) \Leftrightarrow$

$\sigma \le \dfrac{3-\sqrt{13}}{2}$ ή $\sigma \ge \dfrac{3+\sqrt{13}}{2}$. Ο αριθμός $\dfrac{3+\sqrt{13}}{2}$ είναι προφανώς μεγαλύτερος της μονάδας.

Θέτουμε λοιπόν $\sigma = \dfrac{3+\sqrt{13}}{2}$. (Κάποιος που δεν βολεύεται με τα ριζικά θα μπορούσε να επιλέξει έναν ρητό μεγαλύτερο του $\dfrac{3+\sqrt{13}}{2}$).

Έχουμε: $\alpha_1 = 1 < \dfrac{3+\sqrt{13}}{2}$.

Έστω ότι $\alpha_k < \dfrac{3+\sqrt{13}}{2}$. Τότε $\alpha_{k+1} = \sqrt{1+3\dfrac{3+\sqrt{13}}{2}} < \sqrt{\dfrac{11+3\sqrt{13}}{2}} = \dfrac{\sqrt{22+6\sqrt{13}}}{2} =$

$$= \frac{\sqrt{3^2 + (\sqrt{13})^2 + 2\cdot 3\cdot\sqrt{13}}}{2} = \frac{\sqrt{(3+\sqrt{13})^2}}{2} = \frac{3+\sqrt{13}}{2} = \sigma.$$

Η ακολουθία (α_n) ως αύξουσα και άνω φραγμένη θα συγκλίνει στο supremum της. Έστω $x = \lim\alpha_n$. Τότε και $\lim\alpha_{n+1} = x$ (πρόταση 2.7.3).

Επειδή $\alpha_1 = 1 > 0$, θα είναι $x = \lim\alpha_n \ge 1 > 0$ (πρόταση 2.4.5).

Επομένως $x = \lim\alpha_{n+1} = \sqrt{1+3\lim\alpha_n} = \sqrt{1+3x} \Rightarrow x^2 = 1+3x$ και επειδή $x > 0$, έπεται ότι $x = \dfrac{3+\sqrt{13}}{2}$.

Σημείωση: Ο αριθμός $\dfrac{3+\sqrt{13}}{2}$ είχε βρεθεί προηγουμένως, ως ο ελάχιστος θετικός σ με την ιδιότητα $\sqrt{1+3\sigma} \le \sigma$.

β΄ τρόπος) Αν η ακολουθία συγκλίνει τότε $x = \lim\alpha_{n+1} = \sqrt{1+3\lim\alpha_n} = \sqrt{1+3x} \Rightarrow x^2 = 1+3x$. Άρα $x = \dfrac{3\pm\sqrt{13}}{2}$. Επειδή $\alpha_n > 0$, θα πρέπει $x = \lim\alpha_n \ge 0$. Άρα $x = \dfrac{3+\sqrt{13}}{2}$. Θα αποδείξουμε ότι πράγματι $\lim\alpha_n = \dfrac{3+\sqrt{13}}{2}$ ως εξής:

Έχουμε $\left|\alpha_{n+1}-\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right| \underset{\text{διαφορά τετραγώνων}}{=} \frac{\left|\alpha_{n+1}^2-\left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right)^2\right|}{\alpha_{n+1}+\frac{3+\sqrt{13}}{2}} = \frac{|2(1+3\alpha_n)-(11+3\sqrt{13})|}{2\alpha_{n+1}+3+\sqrt{13}} =$

$$= \frac{|2\alpha_n-3-\sqrt{13}|}{2\alpha_{n+1}+3+\sqrt{13}} \le \frac{2}{3+\sqrt{13}}\left|\alpha_n-\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right|.$$

Από τη σχέση $\left|\alpha_{n+1}-\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right| \le \frac{2}{3+\sqrt{13}}\left|\alpha_n-\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right|$ παίρνουμε

$$\left|\alpha_n-\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right| \le \left(\frac{2}{3+\sqrt{13}}\right)^{n-1}\left|\alpha_1-\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right| = \left(\frac{2}{3+\sqrt{13}}\right)^{n-1}\frac{1+\sqrt{13}}{2}.$$

Εφόσον $0<\frac{2}{3+\sqrt{13}}<1$, είναι $\lim\left(\frac{2}{3+\sqrt{13}}\right)^{n-1}=0$.

Επομένως $\lim\left|\alpha_n-\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right|=0$ και συνεπώς $\lim\alpha_n=\frac{3+\sqrt{13}}{2}$.

3. Δίνεται η ακολουθία (b_n) που ορίζεται απ' τις σχέσεις: $b_1=2$ και $b_{n+1}=\frac{1}{2}\left(b_n+\frac{2}{b_n}\right)$. Να δειχθεί ότι συγκλίνει και να βρεθεί το όριό της.

Λύση: Θα δείξουμε ότι η ακολουθία (b_n) είναι γνησίως φθίνουσα, δηλαδή $b_{n+1}=\frac{1}{2}\left(b_n+\frac{2}{b_n}\right)<b_n$. Αυτό είναι ισοδύναμο με τη σχέση $2<b_n^2$.

Για $n=1$ έχουμε $b_1^2=4>2$, που ισχύει.

Έστω ότι $b_k^2>2$. Τότε $b_{k+1}^2=\frac{1}{4}\left(b_k^2+\frac{4}{b_k^2}+4\right)>2 \Leftrightarrow \; b_k^2+\frac{4}{b_k^2}>4 \Leftrightarrow \left(b_k-\frac{2}{b_k}\right)^2>0$, που ισχύει. (Γενικά ισχύει $\left(b_k-\frac{2}{b_k}\right)^2\ge 0$, αλλά επειδή υποθέσαμε ότι $b_k^2>2$, έπεται ότι $b_k-\frac{2}{b_k}>0$, απ' όπου $\left(b_k-\frac{2}{b_k}\right)^2>0$).

Προφανώς η (b_n) είναι κάτω φραγμένη απ' το μηδέν. Επομένως συγκλίνει και $\lim b_n=\inf b_n\ge 0$.

Έστω $x=\lim b_n=\lim b_{n+1}$. Τότε $x=\lim b_{n+1}=\frac{1}{2}\left(\lim b_n+\frac{2}{\lim b_n}\right)=\frac{1}{2}\left(x+\frac{2}{x}\right)$.

Άρα $x^2=2 \underset{x>0}{\Leftrightarrow} x=\sqrt{2}$.

4. Να εξεταστούν ως προς τη σύγκλιση οι ακολουθίες:

i) $\alpha_{n+1}=\frac{2\alpha_n^2}{2+\alpha_n}$, $\alpha_1=1$, **ii)** $\beta_{n+1}=\frac{3+\beta_n^2}{1+\beta_n}$, $\beta_1=2$ και **iii)** $\gamma_{n+1}=1+\frac{2}{\gamma_n}$, $\gamma_1=1$.

Λύση: i) Προφανώς η ακολουθία (α_n) αποτελείται από θετικούς όρους. Εξετάζουμε τη μονοτονία της: Έχουμε $\alpha_{n+1}-\alpha_n=\frac{2\alpha_n^2}{2+\alpha_n}-\alpha_n=\frac{\alpha_n^2-2\alpha_n}{2+\alpha_n}=\frac{\alpha_n(\alpha_n-2)}{2+\alpha_n}$. Επειδή $\alpha_1=1<2$, έχουμε $\alpha_2<\alpha_1$. Για να είναι γνησίως φθίνουσα αρκεί να δείξουμε ότι $\alpha_n<2$, για κάθε $n=1,2,\dots$

Έστω $\alpha_n<2$. Τότε $\alpha_{k+1}<2 \Leftrightarrow \frac{2\alpha_k^2}{2+\alpha_k}<2 \Leftrightarrow 2\alpha_k^2<4+2\alpha_k \Leftrightarrow \alpha_k^2-\alpha_k-2<0$. Το τριώνυμο x^2-x-2 έχει ρίζες το -1 και το 2. Από την επαγωγική υπόθεση έχουμε $-1<0<\alpha_k<2$. Επομένως $\alpha_k^2-\alpha_k-2<0$ και συνεπώς η ακολουθία είναι γνησίως φθίνουσα.

Η (α_n) ως φθίνουσα και κάτω φραγμένη (απ' το μηδέν), συγκλίνει. Έστω $x=\lim\alpha_n$. Τότε $x\geq 0$. Ακόμη, $x=\lim\alpha_{n+1}=\frac{2\lim\alpha_n^2}{2+\lim\alpha_n}=\frac{2x^2}{2+x}$. Επομένως $x(x-2)=0 \Leftrightarrow x=0 \text{ ή } x=2$.

Αλλά $x\leq\alpha_1=1<2$, επειδή η (α_n) είναι γνησίως φθίνουσα. Επομένως $\lim\alpha_n=x=0$.

ii) Έχουμε: $\beta_{n+1}-\beta_n=\frac{3-\beta_n}{1+\beta_n}$. Επειδή $\beta_1=2<3$, έχουμε $\beta_2>\beta_1$. Για να είναι γνησίως αύξουσα αρκεί να δείξουμε ότι $\beta_n<3$, για κάθε $n=1,2,\dots$

Έστω $\beta_k<3$. Τότε $\beta_{k+1}<3 \Leftrightarrow \frac{3+\beta_k^2}{1+\beta_k}<3 \Leftrightarrow 3+\beta_k^2<3+3\beta_k \Leftrightarrow \beta_k(\beta_k-3)<0$. Αλλά $0<\beta_k<3$. Επομένως $\beta_k(\beta_k-3)<0 \Leftrightarrow \beta_{k+1}<3$. Η (β_n) είναι λοιπόν γνησίως αύξουσα.

Η (β_n), όντας άνω φραγμένη (απ' το 3), συγκλίνει.

Έστω $x=\lim\beta_n$. Τότε $x=\lim\beta_{n+1}=\frac{3+\lim\beta_n^2}{1+\lim\beta_n}=\frac{3+x^2}{1+x} \Leftrightarrow 3-x=0 \Leftrightarrow x=3$.

iii) Παρατηρούμε ότι όλοι οι όροι της ακολουθίας είναι θετικοί. Επίσης $\alpha_2=1+\frac{2}{\alpha_1}=1+2=3>1=\alpha_1$. Μια πρώτη απόπειρα θα ήταν να αποδείξουμε ότι η ακολουθία είναι αύξουσα. Έχουμε $\alpha_{n+1}-\alpha_n=1+\frac{2}{\alpha_n}-\alpha_n=-\frac{\alpha_n^2-\alpha_n-2}{\alpha_n}$.

Το τριώνυμο x^2-x-2 έχει ρίζες το -1 και το 2. Για να είναι αύξουσα η ακολουθία θα πρέπει να έχουμε $-1\leq\alpha_n\leq 2$. Αυτό ισχύει για τον πρώτο όρο, αλλά δεν ισχύει για τον δεύτερο. Έτσι, αναγκαζόμαστε να χωρίσουμε την ακολουθία στις υπακολουθίες των αρτίων και των περιττών όρων.

Αποδεικνύουμε με επαγωγή ότι $\alpha_{2n-1}<2$ και $\alpha_{2n}>2$. Για $n=1$ οι παραπάνω σχέσεις ισχύουν όπως έχουμε ήδη δεί. Υποθέτουμε ότι $\alpha_{2k-1}<2$ και $\alpha_{2k}>2$. Τότε, από τη δεύτερη σχέση παίρνουμε:

$\alpha_{2k} > 2 \Leftrightarrow \frac{2}{\alpha_{2k}} < 1 \Leftrightarrow \alpha_{2k+1} = 1 + \frac{2}{\alpha_{2k}} < 2$. Επομένως $\frac{2}{\alpha_{2k+1}} > 1 \Leftrightarrow \alpha_{2k+2} = 1 + \frac{2}{\alpha_{2k+1}} > 2$.

Συνεπώς οι σχέσεις αυτές ισχύουν για κάθε $n = 1, 2, \ldots$

Σχηματίζουμε τη διαφορά $\alpha_{n+2} - \alpha_n = 1 + \frac{2}{\alpha_{n+1}} - \alpha_n$.

Γνωρίζουμε όμως ότι $\alpha_{n+1} = 1 + \frac{2}{\alpha_n} \Leftrightarrow \alpha_n = \frac{2}{\alpha_{n+1} - 1}$ (είναι $\alpha_{n+1} = 1 + \frac{2}{\alpha_n} > 1$).

Συμπεραίνουμε ότι $\alpha_{n+2} - \alpha_n = 1 + \frac{2}{\alpha_{n+1}} - \frac{2}{\alpha_{n+1} - 1} = \frac{\alpha_{n+1}^2 - \alpha_{n+1} - 2}{\alpha_{n+1}(\alpha_{n+1} - 1)}$.

Επομένως $\alpha_{2n+1} - \alpha_{2n-1} = \frac{\alpha_{2n}^2 - \alpha_{2n} - 2}{\alpha_{2n}(\alpha_{2n} - 1)} > 0$, γιατί δείξαμε ότι $\alpha_{2n} > 2$. Άρα η ακολουθία (α_{2n-1}) είναι γνησίως αύξουσα.

Επίσης $\alpha_{2n+2} - \alpha_{2n} = \frac{\alpha_{2n+1}^2 - \alpha_{2n+1} - 2}{\alpha_{2n+1}(\alpha_{2n+1} - 1)} < 0$, γιατί $0 < \alpha_{2n+1} < 2$. Άρα η ακολουθία (α_{2n}) είναι γνησίως φθίνουσα. Οι ακολουθίες (α_{2n-1}) και (α_{2n}) ως μονότονες και φραγμένες ($0 < \alpha_{2n-1} < 2$ και $\alpha_2 \geq \alpha_{2n} > 2$) συγκλίνουν.

Έχουμε $\alpha_{2n+1} = 1 + \frac{2}{\alpha_{2n}} = 1 + \frac{2}{1 + \frac{2}{\alpha_{2n-1}}} = \frac{3\alpha_{2n-1} + 2}{\alpha_{2n-1} + 2}$. Επομένως, αν $x = \lim \alpha_{2n-1}$, τότε $x = \frac{3x + 2}{x + 2}$, δηλαδή $x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ ή $x = 2$. Επειδή $x \geq 0$, έπεται ότι $x = \lim \alpha_{2n-1} = 2$.

Με τον ίδιο τρόπο συνάγουμε ότι και $\lim \alpha_{2n} = 2$. Σύμφωνα με την πρόταση 2.7.4, $\lim \alpha_n = 2$.

Άλυτες ασκήσεις

1. Να βρείτε το όριο της ακολουθίας: $\alpha_{n+1} = \sqrt{1 + 2\alpha_n}$ και $\alpha_1 = 1$.

2. Να βρείτε το όριο της ακολουθίας: $\alpha_{n+1} = \sqrt{3 + \frac{1}{2}\alpha_n}$ και $\alpha_1 = 3$.

3. Να βρείτε το όριο της ακολουθίας: $\alpha_n = \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots \sqrt{2}}}}_{n \text{ ριζικά}}$.

4. Να βρείτε το όριο της ακολουθίας $\alpha_{n+1} = -\frac{3\alpha_n - 1}{4}$, $\alpha_1 = -6$, χωρίς να βρείτε τον γενικό της όρο.

5. Έστω $\lambda > 0$. Θεωρούμε την ακολουθία (α_n), με $\alpha_{n+1} = \frac{1}{2}\left(\alpha_n + \frac{\lambda}{\alpha_n}\right)$ και $\alpha_1 = 2\lambda$. Να αποδείξετε ότι η (α_n) συγκλίνει στο $\sqrt{\lambda}$.

6. Να ελέγξετε ως προς τη σύγκλιση την ακολουθία: $\alpha_{n+1} = \frac{3\alpha_n^2 + 1}{3 + \alpha_n}$, $\alpha_1 = \frac{1}{3}$.

7. Το ίδιο να κάνετε για την ακολουθία: $\beta_{n+1} = \dfrac{\beta_n^2}{3-\beta_n}$, $\beta_1 = 1$.

8. Το ίδιο να κάνετε για την ακολουθία: $\gamma_{n+1} = 2 + \dfrac{1}{\gamma_n}$, $\gamma_1 = 1$.

2.9 Ο αριθμός e

Στην παράγραφο αυτή θα γνωρίσουμε έναν πολύ σημαντικό αριθμό, ο οποίος παίζει ιδιαίτερο ρόλο στο Λογισμό.

2.9.1 Πρόταση

Θεωρούμε τις ακολουθίες με γενικούς όρους $a_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ *και* $b_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$

Τότε ισχύουν τα εξής:

***i)** Ισχύει* $a_n < b_n$ *για κάθε* $n = 1,2,\ldots$

***ii)** Η ακολουθία* (a_n) *είναι γνησίως αύξουσα και η ακολουθία* (b_n) *γνησίως φθίνουσα. Οι δύο ακολουθίες ισοσυγκλίνουν σ' έναν αριθμό που συμβολίζεται με το γράμμα e.*

Απόδειξη: (i) Προφανώς $a_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n < \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\left(1+\dfrac{1}{n}\right) = b_n$.

(ii) Παρατηρούμε ότι:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n} = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)\left(\frac{\dfrac{n+2}{n+1}}{\dfrac{n+1}{n}}\right)^n = \frac{n+2}{n+1}\left(\frac{n^2+2n}{(n+1)^2}\right)^n = \frac{n+2}{n+1}\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^n \underset{\substack{\text{ανισότητα}\\ \text{Bernoulli}}}{\geq}$$

$$\geq \frac{n+2}{n+1}\left(1-\frac{n}{(n+1)^2}\right) = \frac{n+2}{n+1}\cdot\frac{n^2+n+1}{(n+1)^2} = \frac{n^3+3n^2+3n+2}{(n+1)^3} = \frac{(n+1)^3+1}{(n+1)^3} > \frac{(n+1)^3}{(n+1)^3} = 1 .$$

Άρα $a_{n+1} > a_n$, για κάθε $n = 1,2,\ldots$

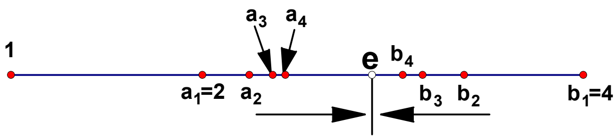
Επίσης,

$$\frac{b_n}{b_{n+1}} = \frac{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}}{\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{n+2}} = \frac{n+1}{n+2}\cdot\left(\frac{\dfrac{n+1}{n}}{\dfrac{n+2}{n+1}}\right)^{n+1} = \frac{n+1}{n+2}\cdot\left(\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n}\right)^{n+1} = \frac{n+1}{n+2}\cdot\left(1+\frac{1}{n^2+2n}\right)^{n+1} \geq$$

$$\underset{\substack{\text{ανισότητα}\\ \text{Bernoulli}}}{\geq} \frac{n+1}{n+2}\cdot\left(1+\frac{n+1}{n^2+2n}\right) = \frac{n+1}{n+2}\cdot\frac{n^2+3n+1}{n^2+2n} = \frac{n^3+4n^2+4n+1}{n^3+4n^2+4n} > 1 .$$

Άρα $b_n > b_{n+1}$, για κάθε $n = 1,2,\ldots$

Επειδή $a_n < b_n \le b_1$ και $a_1 \le a_n < b_n$, η ακολουθία (a_n) είναι άνω φραγμένη και η ακολουθία (b_n) κάτω φραγμένη. Επομένως οι ακολουθίες αυτές συγκλίνουν.



Είναι δε $\lim b_n = \lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} \lim\left(1+\frac{1}{n}\right) = \lim a_n$.■

Ο αριθμός ***e*** εμφανίζεται πολύ συχνά στην Ανάλυση. Είναι άρρητος και μάλιστα **υπερβατικός**, δηλαδή δεν είναι ρίζα ενός πολυωνύμου με ακέραιους συντελεστές, όπως ακριβώς συμβαίνει και με τον άλλο σπουδαίο αριθμό τον **π**. Μάλιστα οι δυο τους συνδέονται μέσω πάμπολλων σχέσεων, η σημαντικότερη από τις οποίες είναι ο φημισμένος τύπος του **Euler**: $e^{i\pi}+1=0$, όπου **i** η φανταστική μονάδα των μιγαδικών.

Μια προσεγγιστική τιμή του *e* είναι: *e* = 2,718281828459045235360287471352 7……

2.9.2 Παραδείγματα

1. Να βρεθούν τα όρια:

i) $\lim\left(1+\frac{2}{n}\right)^n$ **ii)** $\lim\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$ **iii)** $\lim\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$

Λύση: i) $\lim\left(1+\frac{2}{n}\right)^n = \lim\left(\frac{n+2}{n}\right)^n = \lim\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n \lim\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \lim\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n \cdot e =$

$= \lim\frac{n+1}{n+2}\cdot\lim\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}\cdot e = 1\cdot\lim\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\cdot e = e\cdot e = e^2$.

ii) $\lim\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \lim\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = \lim\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} = \dfrac{1}{\lim\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}} = \frac{1}{e}$.

iii) Έστω $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Εφόσον $\lim a_n = e$, τότε με βάση το παράδειγμα 2.5.5.5, και ο γεωμετρικός μέσος $\gamma_n = \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$ τείνει στο *e*.

Αλλά $\gamma_n = \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n} = \sqrt[n]{\frac{\cancel{2}}{1}\cdot\frac{\cancel{3^2}}{\cancel{2^2}}\cdot\frac{\cancel{4^3}}{\cancel{3^3}}\cdots\frac{(n+1)^n}{\cancel{n^n}}} = \sqrt[n]{\frac{(n+1)^n}{1\cdot 2\cdots n}} = \frac{n+1}{\sqrt[n]{n!}}$.

Εφόσον $\lim\frac{n+1}{\sqrt[n]{n!}} = e$, τότε και $\lim\frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = \lim\frac{n}{n+1}\lim\frac{n+1}{\sqrt[n]{n!}} = e$.

2. Έστω $x=\frac{t}{s}$ ένας ρητός αριθμός, όπου $t,s\in\mathbb{Z}$ και $s\geq 1$. Να αποδειχθεί ότι $\lim\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=e^x$.

***Απόδειξη:** Αρχικά υποθέτουμε ότι $x=t\in\mathbb{Z}$. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

i) $t\geq 0$. Θα αποδείξουμε με επαγωγή επί του t ότι $\lim\left(1+\frac{t}{n}\right)^n=e^t$.

Για $t=0$, έχουμε $\lim\left(1+\frac{0}{n}\right)^n=\lim 1=1=e^0$.

Έστω ότι για κάποιο $t\geq 0$ ισχύει $\lim\left(1+\frac{t}{n}\right)^n=e^t$.

Τότε, $\lim\left(1+\frac{t+1}{n}\right)^n=\lim\left(\frac{t+1+n}{n}\right)^n=\lim\left(\frac{t+1+n}{n+1}\right)^n\cdot\lim\left(\frac{n+1}{n}\right)^n=$

$$=\lim\left(\frac{t+1+n}{n+1}\right)^{n+1}\cdot\lim\frac{n+1}{t+1+n}\cdot e=\lim\left(1+\frac{t}{n+1}\right)^{n+1}\cdot 1\cdot e=\lim\left(1+\frac{t}{n}\right)^n\cdot e=e^t\cdot e=$$

$=e^{t+1}$.

ii) $t<0$. Τότε $t=-k$, όπου $k=1,2,\dots$. Θα αποδείξουμε ότι $\lim\left(1+\frac{-k}{n}\right)^n=e^{-k}$.

Έχουμε $\lim\left(1+\frac{-k}{n}\right)^n=\lim\left(1+\frac{-k}{n+k}\right)^{n+k}=\lim\left(\frac{n}{n+k}\right)^{n+k}=\lim\left(\frac{n}{n+k}\right)^n\lim\left(\frac{n}{n+k}\right)^k=$

$$=\frac{1}{\lim\left(\frac{n+k}{n}\right)^n}\cdot\lim\left(\frac{n}{n+k}\right)^k=\frac{1}{\lim\left(1+\frac{k}{n}\right)^n}\cdot\left(\lim\frac{n}{n+k}\right)^k=\frac{1}{e^k}\cdot 1=e^{-k},$$

γιατί $\lim\left(1+\frac{k}{n}\right)^n=e^k$, όπως δείξαμε στην προηγούμενη περίπτωση.

Έστω τώρα $x=\frac{t}{s}$, όπου $t,s\in\mathbb{Z}$ και $s\geq 1$. Εφόσον $\lim\left(1+\frac{t}{n}\right)^n=e^t$, θα έχουμε $\lim\left(1+\frac{t}{sn}\right)^{sn}=e^t$, σύμφωνα με την πρόταση 2.7.3.

Επομένως, $\lim\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=\lim\left(1+\frac{t}{sn}\right)^n=\lim\sqrt[s]{\left(1+\frac{t}{sn}\right)^{sn}}=\sqrt[s]{\lim\left(1+\frac{t}{sn}\right)^{sn}}=\sqrt[s]{e^t}=e^{t/s}=e^x$.

Η ακολουθία $a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ συγκλίνει πολύ αργά στον e. Μια εναλλακτική μορφή του e είναι ως το όριο της ακολουθίας $s_n=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$, η οποία συγκλίνει πολύ πιο γρήγορα. Έχουμε λοιπόν την επόμενη πρόταση:

2.9.3 Πρόταση

Έστω $s_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}$. *Τότε* $\lim s_n = e$.

***Απόδειξη:** Αρχικά αποδεικνύουμε τον εξής ισχυρισμό: $s_n \le e$, για κάθε $n = 1, 2, \ldots$.

Απόδειξη του ισχυρισμού: Για να αποφύγουμε πιθανή σύγχιση θα χρησιμοποιήσουμε το σύμβολο m αντί του n και θα δείξουμε ότι $s_m \le e$ για κάθε θετικό ακέραιο m.

Για κάθε $n \ge m$ θα έχουμε:

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^m \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n-m} \underset{1+\frac{1}{n}>1}{\ge} \left(1+\frac{1}{n}\right)^m = \sum_{k=0}^{m} \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!n^k} =$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{m} \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!n^k} = 1 + \sum_{k=1}^{m} \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\frac{1}{k!}.$$

Επειδή το m είναι σταθερό θα έχουμε:

$$e = \lim a_n \ge 1 + \lim \sum_{k=1}^{m} \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\frac{1}{k!} =$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k!} \lim\left(1-\frac{1}{n}\right) \lim\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots \lim\left(1-\frac{k-1}{n}\right) = 1 + \sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{m}\frac{1}{k!} = s_m,$$

γιατί $\lim\left(1-\frac{1}{n}\right) = \lim\left(1-\frac{2}{n}\right) = \cdots = \lim\left(1-\frac{k-1}{n}\right) = 1$, για κάθε $k = 1, 2, \ldots, m$.

Προχωράμε τώρα στην απόδειξη της πρότασης 2.9.3.

Η ακολουθία (s_n) είναι προφανώς γνησίως αύξουσα. Δείξαμε ότι $s_n \le e$ για κάθε $n = 1, 2, \ldots$, δηλαδή ότι η ακολουθία (s_n) είναι άνω φραγμένη απ΄τον αριθμό e. Άρα η (s_n) συγκλίνει και μάλιστα $\lim s_n \le e$.

Αλλά, $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}\frac{1}{n^k} = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{n-1}{n}\frac{n-2}{n}\cdots\frac{n-k+1}{n}\frac{1}{k!} \le$

$\le 1 + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!} = s_n$. Με βάση την πρόταση 2.4.5, έχουμε $e = \lim a_n \le \lim s_n$.

Τελικά λοιπόν έχουμε: $\lim s_n = e$.■

Άλυτες ασκήσεις

1. Να βρείτε τα όρια: **i)** $\lim\left(1+\frac{3}{n}\right)^n$, **ii)** $\lim\left(1-\frac{3}{5n}\right)^n$ και **iii)** $\lim \sqrt[n]{\frac{1\cdot 2^2 \cdot 3^3 \cdots n^n}{4\cdot 5^2 \cdot 6^3 \cdots (n+3)^n}}$.

2.10 Απειριζόμενες ακολουθίες

Στην παράγραφο αυτή αναφερόμαστε στις ακολουθίες που οριακά (καθώς το n παίρνει μεγάλες τιμές) αυξάνονται πάρα πολύ, δηλαδή μπορούν να πάρουν οσοδήποτε μεγάλες θετικές τιμές ή μειώνονται πάρα πολύ, δηλαδή μπορούν να πάρουν οσοδήποτε μεγάλες κατ' απόλυτη τιμή αρνητικές τιμές. Τέτοιες ακολουθίες είναι, για παράδειγμα, οι (n), $(-n^2)$, (2^n) κτλ.

2.10.1 Ορισμός

i) *Μια ακολουθία (α_n) λέμε ότι τείνει στο $+\infty$ αν για κάθε θετικό αριθμό ε υπάρχει δείκτης n_0, τέτοιος ώστε $\alpha_n > \varepsilon$ για κάθε $n \geq n_0$.*

ii) *Μια ακολουθία (α_n) λέμε ότι τείνει στο $-\infty$ αν για κάθε θετικό αριθμό ε υπάρχει δείκτης n_0, τέτοιος ώστε $\alpha_n < -\varepsilon$ για κάθε $n \geq n_0$.*

Σημείωση: Ο αριθμός ε στην περίπτωση των απειριζομένων ακολουθιών θεωρείται ότι μπορεί να πάρει πολύ μεγάλες τιμές, σε αντίθεση με ότι συνέβαινε μέχρι τώρα, όπου το ε λαμβάνονταν πολύ μικρό.

Για παράδειγμα, η ακολουθία $\alpha_n = n,\ n = 1,2,\ldots$ τείνει στο $+\infty$, ενώ η ακολουθία $\beta_n = -n^2,\ n = 1,2,\ldots$ τείνει στο $-\infty$.

Μια απειριζόμενη ακολουθία προφανώς δεν είναι φραγμένη. Αν τώρα μια ακολουθία είναι μονότονη και μη φραγμένη θα πρέπει να απειρίζεται.

2.10.2 Πρόταση

Έστω (α_n) μια μη φραγμένη ακολουθία.

i) *Αν η (α_n) είναι αύξουσα τότε $\lim \alpha_n = +\infty$.*

ii) *Αν η (α_n) είναι φθίνουσα τότε $\lim \alpha_n = -\infty$.*

Απόδειξη: i) Επειδή η (α_n) είναι αύξουσα είναι και κάτω φραγμένη (από τον πρώτο όρο της). Ως μη φραγμένη δεν μπορεί να είναι λοιπόν άνω φραγμένη. Έστω τώρα $\varepsilon > 0$. Τότε υπάρχει n_0 με την ιδιότητα $\alpha_{n_0} > \varepsilon$. Επομένως $\alpha_n \geq \alpha_{n_0} > \varepsilon$, για κάθε $n \geq n_0$.

Η απόδειξη του **(ii)** είναι πανομοιότυπη. ■

Για παράδειγμα, η ακολουθία (n) των θετικών ακεραίων είναι αύξουσα και μη φραγμένη και συνεπώς απειρίζεται θετικά.

2.10.3 Πρόταση

Υποθέτουμε ότι $\alpha_n \leq \beta_n$, *για κάθε* $n \geq m$, *όπου m ένας θετικός ακέραιος. Τότε:*

i) *Αν* $\lim \alpha_n = +\infty$ *τότε και* $\lim \beta_n = +\infty$.

ii) *Αν* $\lim \beta_n = -\infty$ *τότε και* $\lim \alpha_n = -\infty$.

Απόδειξη: i) Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε υπάρχει n_0, τέτοιος ώστε $\alpha_n > \varepsilon$, για κάθε $n \geq n_0$. Αν $n_0' = \max\{n_0, m\}$, τότε και $\beta_n > \varepsilon$, για κάθε $n \geq n_0'$. (Γιατί $\beta_n \geq \alpha_n > \varepsilon$). Η απόδειξη του **(ii)** είναι παρόμοια. ■

Για παράδειγμα, $n^2 \geq n$ και $\lim n = +\infty$. Άρα και $\lim n^2 = +\infty$.

Χρειαζόμαστε κανα-δυο προτάσεις ακόμα, χρήσιμες στον καθορισμό άπειρων ορίων.

2.10.4 Πρόταση

i) *Έστω* $\lim \alpha_n = \lim \beta_n = +\infty$. *Τότε* $\lim(\alpha_n + \beta_n) = \lim(\alpha_n \beta_n) = +\infty$.

ii) *Αν η* (α_n) *είναι κάτω φραγμένη και* $\lim \beta_n = +\infty$, *τότε* $\lim(\alpha_n + \beta_n) = +\infty$. *Ειδικότερα, αν η* (α_n) *συγκλίνει στο* $\mathbb{R}$ *και* $\lim \beta_n = +\infty$, *τότε* $\lim(\alpha_n + \beta_n) = +\infty$.

iii) *Αν* $\lim \alpha_n = \alpha \in \mathbb{R}$ *και* $\lim \beta_n = +\infty$ *τότε:*
$$\lim(\alpha_n \beta_n) = \begin{cases} +\infty, & \text{αν } \alpha > 0 \\ -\infty, & \text{αν } \alpha < 0 \\ \text{δεν μπορούμε να} & \\ \text{αποφανθούμε, αν } \alpha = 0 & \end{cases}$$

iv) *Αν* $\lim \alpha_n = +\infty$ *τότε* $\lim \dfrac{1}{\alpha_n} = 0$.

v) *Αν* $\lim \alpha_n = 0$ *και* $\alpha_n > 0$ *για κάθε* $n = 1, 2, \ldots$, *τότε* $\lim \dfrac{1}{\alpha_n} = +\infty$.

Απόδειξη: i) Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε υπάρχει n_0, τέτοιος ώστε $\alpha_n > \varepsilon / 2$, για κάθε $n \geq n_0$. Επίσης, υπάρχει n_0' τέτοιος ώστε $\beta_n > \varepsilon / 2$, για κάθε $n \geq n_0'$. Αν θέσουμε $n_0'' = \max\{n_0, n_0'\}$, τότε $\alpha_n + \beta_n > \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$, για κάθε $n \geq n_0''$. Άρα $\lim(\alpha_n + \beta_n) = +\infty$.

Για να δείξουμε ότι $\lim(\alpha_n \beta_n) = +\infty$ αρκεί να επιλέξουμε το n_0 ώστε $\alpha_n > 1$, για κάθε $n \geq n_0$ και το n_0' ώστε $\beta_n > \varepsilon$, για κάθε $n \geq n_0'$.

ii) Εφόσον η (α_n) είναι κάτω φραγμένη, θα υπάρχει $s \in \mathbb{R}$ με την ιδιότητα $s \le \alpha_n$, για κάθε $n = 1,2,\ldots$ Έστω τώρα $\varepsilon > 0$. Εφόσον $\lim \beta_n = +\infty$, υπάρχει n_0, τέτοιος ώστε $\beta_n > \varepsilon + |s|$, για κάθε $n \ge n_0$. Επομένως $\alpha_n + \beta_n > s + \varepsilon + |s| \underset{|s| \ge -s}{=} \varepsilon$, για κάθε $n \ge n_0$.

iii) Έστω ότι $\lim \alpha_n = \alpha \ne 0$. Τότε υπάρχει n_0, τέτοιος ώστε $|\alpha_n - \alpha| < \dfrac{|\alpha|}{2}$, για κάθε $n \ge n_0$.

Αν $\alpha > 0$, η σχέση $|\alpha_n - \alpha| < \dfrac{\alpha}{2}$ συνεπάγεται τη σχέση $\alpha_n > \dfrac{\alpha}{2}$.

Έστω τώρα $\varepsilon > 0$. Εφόσον $\lim \beta_n = +\infty$, υπάρχει n_0' τέτοιος ώστε $\beta_n > 2\varepsilon / \alpha$, για κάθε $n \ge n_0'$. Επομένως $\alpha_n \beta_n > \dfrac{\alpha}{2} \cdot \dfrac{2\varepsilon}{\alpha} = \varepsilon$, για κάθε $n \ge n_0''$, όπου $n_0'' = \max\{n_0, n_0'\}$.

Αν $\alpha < 0$, η σχέση $|\alpha_n - \alpha| < \dfrac{|\alpha|}{2}$ συνεπάγεται τη σχέση $\alpha_n < -\dfrac{|\alpha|}{2}$. Εφόσον $\lim \beta_n = +\infty$, υπάρχει n_0' τέτοιος ώστε $\beta_n > 2\varepsilon / |\alpha|$, για κάθε $n \ge n_0'$. Επομένως $\alpha_n \beta_n < -\dfrac{|\alpha|}{2} \cdot \dfrac{2\varepsilon}{|\alpha|} = -\varepsilon$, για κάθε $n \ge n_0''$, όπου $n_0'' = \max\{n_0, n_0'\}$.

Τώρα, αν $\lim \alpha_n = 0$ δεν μπορούμε να αποφανθούμε για την $(\alpha_n \beta_n)$. Π.χ. αν $\alpha_n = \dfrac{1}{n}$ και $\beta_n = n$, τότε $\alpha_n \beta_n = 1$. Αν όμως $\alpha_n = \dfrac{1}{n}$ και $\beta_n = n^2$, τότε $\alpha_n \beta_n = n \to +\infty$. Ακόμη, αν $\alpha_n = \dfrac{1}{n^2}$ και $\beta_n = n$, τότε $\alpha_n \beta_n = \dfrac{1}{n} \to 0$.

iv) Έστω $\varepsilon > 0$. Εφόσον $\lim \alpha_n = +\infty$, υπάρχει n_0 τέτοιος ώστε $\alpha_n > 1/\varepsilon$, για κάθε $n \ge n_0$. Επομένως $\dfrac{1}{\alpha_n} < \varepsilon$, για κάθε $n \ge n_0$.

v) Έστω $\varepsilon > 0$. Εφόσον $\lim \alpha_n = 0$ και $\alpha_n > 0$ για κάθε $n = 1,2,\ldots$, υπάρχει n_0 τέτοιος ώστε $0 < \alpha_n < 1/\varepsilon$, για κάθε $n \ge n_0$. Επομένως $\dfrac{1}{\alpha_n} > \varepsilon$, για κάθε $n \ge n_0$.■

Αντίστοιχα για το $-\infty$ έχουμε την ακόλουθη πρόταση, η απόδειξη της οποίας είναι παρόμοια με αυτήν της προηγούμενης:

2.10.5 Πρόταση

i) *Έστω* $\lim \alpha_n = \lim \beta_n = -\infty$. *Τότε* $\lim(\alpha_n + \beta_n) = -\infty$ *και* $\lim(\alpha_n \beta_n) = +\infty$.

ii) *Αν η* (α_n) *είναι φραγμένη και* $\lim \beta_n = -\infty$ *τότε και* $\lim(\alpha_n + \beta_n) = -\infty$. *Ειδικότερα, αν η* (α_n) *συγκλίνει στο* $\mathbb{R}$ *και* $\lim \beta_n = -\infty$, *τότε* $\lim(\alpha_n + \beta_n) = -\infty$.

iii) *Αν* $\lim \alpha_n = \alpha \in \mathbb{R}$ *και* $\lim \beta_n = -\infty$ *τότε:* $\lim(\alpha_n \beta_n) = \begin{cases} -\infty, & \text{αν } \alpha > 0 \\ +\infty, & \text{αν } \alpha < 0 \\ \text{δεν μπορούμε να} & \\ \text{αποφανθούμε, αν } \alpha = 0 & \end{cases}$

iv) *Αν* $\lim \alpha_n = -\infty$ *τότε* $\lim \dfrac{1}{\alpha_n} = 0$.

v) *Αν* $\lim \alpha_n = 0$ *και* $\alpha_n < 0$ *για κάθε* $n = 1, 2, \ldots$, *τότε* $\lim \dfrac{1}{\alpha_n} = -\infty$. ■

2.10.6 Παραδείγματα

1. Να υπολογιστούν τα όρια: **i)** $\lim \dfrac{-n^3 + 2n^2 - n + 1}{3n^2 - n - 1}$, **ii)** $\lim \dfrac{2n^2 - 3n + 2}{5n + n + 10}$ και **iii)** $\lim(2n - \sqrt{n^2 + n - 1})$

Λύση: i) Έχουμε $\dfrac{-n^3 + 2n^2 - n + 1}{3n^2 - n - 1} = \dfrac{-n^3\left(1 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^3}\right)}{n^2\left(3 - \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}\right)} = -n \cdot \dfrac{1 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^3}}{3 - \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}}$.

Αλλά $\lim \dfrac{1 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^3}}{3 - \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}} = \dfrac{1}{3} > 0$ και $\lim(-n) = -\infty$. Σύμφωνα με το (iii) της πρότασης 2.10.5, θα έχουμε $\lim \dfrac{-n^3 + 2n^2 - n + 1}{3n^2 - n - 1} = -\infty$.

ii) Έχουμε $\dfrac{2n^2 - 3n + 2}{5n + 10} = n \cdot \dfrac{2 - \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2}}{5 + \frac{10}{n}}$. Είναι $\lim \dfrac{2 - \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2}}{5 + \frac{10}{n}} = \dfrac{2}{5} > 0$ και $\lim(n) = +\infty$.

Σύμφωνα με το (iii) της πρότασης 2.10.4, θα έχουμε $\lim \dfrac{2n^2 - 3n + 2}{5n + n + 10} = +\infty$.

iii) $2n - \sqrt{n^2 + n - 1} = n + (n - \sqrt{n^2 + n - 1}) = n + \dfrac{n^2 - (\sqrt{n^2 + n - 1})^2}{n + \sqrt{n^2 + n - 1}} = n + \dfrac{-n + 1}{n + \sqrt{n^2 + n - 1}} =$

$= n + \dfrac{-1 + \frac{1}{n}}{1 + \sqrt{1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}}}$. Είναι $\lim \dfrac{-1 + \frac{1}{n}}{1 + \sqrt{1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}}} = -1 \in \mathbb{R}$ και $\lim(n) = +\infty$. Σύμφωνα με το (ii) της πρότασης 2.10.4, θα έχουμε $\lim \dfrac{2n^2 - 3n + 2}{5n + n + 10} = +\infty$.

2. Να δειχθεί ότι αν $\alpha_n \geq 0$ για κάθε $n = 1, 2, \ldots$ και $\lim \alpha_n = +\infty$, τότε και $\lim \sqrt{\alpha_n} = +\infty$.

Απόδειξη: Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε και $\varepsilon^2 > 0$ και επομένως υπάρχει n_0 τέτοιος ώστε $\alpha_n > \varepsilon^2$, για κάθε $n \geq n_0$. Άρα $\sqrt{\alpha_n} > \varepsilon$, για κάθε $n \geq n_0$.

3. Να δειχθεί ότι $\lim\sqrt[n]{n!}=+\infty$.

Απόδειξη: Θα δείξουμε ότι $(n!)^2>\dfrac{n^n}{2^n}$, για κάθε $n=1,2,\ldots$

Για $n=1$ παίρνουμε τη σχέση $1>\dfrac{1}{2}$, που προφανώς ισχύει.

Υποθέτουμε ότι $(k!)^2>\dfrac{k^k}{2^k}$.

Τότε $[(k+1)!]^2=(k+1)^2(k!)^2>(k+1)^2\dfrac{k^k}{2^k}=\dfrac{(k+1)^{k+2}}{2^k}\dfrac{k^k}{(k+1)^k}=\dfrac{(k+1)^{k+2}}{2^k}\dfrac{1}{\left(1+\dfrac{1}{k}\right)^k}$. Αλλά

$\left(1+\dfrac{1}{k}\right)^k<e<4$ (γιατί η ακολουθία $\left(\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right)$ είναι γνησίως αύξουσα και $\lim\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=e$).

Επομένως $[(k+1)!]^2>\dfrac{(k+1)^{k+2}}{2^k}\dfrac{1}{\left(1+\dfrac{1}{k}\right)^k}>\dfrac{(k+1)^{k+2}}{2^k}\cdot\dfrac{1}{4}=\dfrac{(k+1)^{k+2}}{2^k}\cdot\dfrac{1}{4}=\dfrac{(k+1)^{k+1}}{2^{k+1}}\cdot\dfrac{k+1}{2}\geq$

$\geq\dfrac{(k+1)^{k+1}}{2^{k+1}}\cdot 1=\dfrac{(k+1)^{k+1}}{2^{k+1}}$.

Τώρα, από τη σχέση $(n!)^2>\dfrac{n^n}{2^n}$ παίρνουμε $(\sqrt[n]{n!})^2>\dfrac{n}{2}$. Επειδή $\lim\dfrac{n}{2}=+\infty$, από το (i) της πρότασης 2.10.3, θα έχουμε $\lim(\sqrt[n]{n!})^2=+\infty$. Αλλά, με βάση την προηγούμενη εφαρμογή, παίρνουμε $\lim\sqrt[n]{n!}=+\infty$.

4. i) Έστω $\lambda>1$. Τότε $\lim\lambda^n=+\infty$.

ii) Έστω (α_n) μια ακολουθία θετικών όρων. Υποθέτουμε ότι $\lim\dfrac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}>1$. Τότε $\lim\alpha_n=+\infty$.

iii) Έστω (α_n) μια ακολουθία μη αρνητικών όρων. Υποθέτουμε ότι $\lim\sqrt[n]{\alpha_n}>1$. Τότε $\lim\alpha_n=+\infty$.

iv) Να βρεθούν τα όρια: $\lim\dfrac{2+7^{n-1}}{3^n-5^n}$ και $\lim\left(\dfrac{3n-1}{2n-1}\right)^n$.

Λύση: i) Έστω $\lambda=1+\theta$ με $\theta>0$. Τότε $\lambda^n=(1+\theta)^n\underset{\text{Bernoulli}}{\geq}1+n\theta>n\theta$. Αλλά $\lim n=+\infty$ και $\theta>0$. Από το (iii) της πρότασης 2.10.4 προκύπτει ότι και $\lim(n\theta)=+\infty$. Τώρα, από το (i) της πρότασης 2.10.3 προκύπτει ότι $\lim\lambda^n=+\infty$.

ii) Αν $\lim\dfrac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}=+\infty$, τότε για $\varepsilon=2$, προκύπτει ότι υπάρχει θετικός ακέραιος n_0 με $\dfrac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}>2$, για κάθε $n\geq n_0$.

Αν $\lim\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}=\lambda\in\mathbb{R}$ με $\lambda>1$, τότε για $\varepsilon=\frac{\lambda-1}{2}>0$, προκύπτει ότι υπάρχει θετικός ακέραιος n_0 με $\left|\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}-\lambda\right|<\frac{\lambda-1}{2}$, για κάθε $n\geq n_0$. Επομένως $-\left(\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}-\lambda\right)\leq\left|\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}-\lambda\right|<\frac{\lambda-1}{2}\Rightarrow$ $\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}>\frac{1+\lambda}{2}>1$, για κάθε $n\geq n_0$.

Σε κάθε περίπτωση, υπάρχει $\mu>1$ με $\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}>\mu$, για κάθε $n\geq n_0$.

Αν $n\geq n_0$, τότε $\alpha_n=\frac{\alpha_n}{\alpha_{n-1}}\frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_{n-2}}\cdots\frac{\alpha_{n_0+1}}{\alpha_{n_0}}\alpha_{n_0}>\mu^{n-n_0}\alpha_{n_0}=\mu^n\frac{\alpha_{n_0}}{\mu^{n_0}}$. Αλλά $\lim\mu^n=+\infty$ (σύμφωνα με το i)) και $\frac{\alpha_{n_0}}{\mu^{n_0}}>0$. Με βάση το (iii) της πρότασης 2.10.4, $\lim\left(\mu^n\frac{\alpha_{n_0}}{\mu^{n_0}}\right)=+\infty$. Τώρα, από το (i) της πρότασης 2.10.3 προκύπτει ότι $\lim\alpha_n=+\infty$.

iii) Όπως προηγουμένως, υπάρχει $\mu>1$ και θετικός ακέραιος n_0 με $\sqrt[n]{\alpha_n}>\mu$, για κάθε $n\geq n_0$. Άρα $\alpha_n>\mu^n\to+\infty$ κτλ.

iv) Έχουμε: $\frac{2+7^{n-1}}{3^n-5^n}=\frac{\frac{2}{5^n}+\frac{1}{7}\left(\frac{7}{5}\right)^n}{\left(\frac{3}{5}\right)^n-1}=\left[\frac{2}{5^n}+\frac{1}{7}\left(\frac{7}{5}\right)^n\right]\frac{1}{\left(\frac{3}{5}\right)^n-1}$. Εφόσον $\frac{7}{5}>1$, $\lim\left(\frac{7}{5}\right)^n=+\infty$ και επειδή $\frac{1}{7}>0$, $\lim\left[\frac{1}{7}\left(\frac{7}{5}\right)^n\right]=+\infty$. Ακόμη $\lim\frac{2}{5^n}=0$, οπότε $\lim\left[\frac{2}{5^n}+\frac{1}{7}\left(\frac{7}{5}\right)^n\right]=+\infty$.

Επίσης, $\lim\frac{1}{\left(\frac{3}{5}\right)^n-1}=\frac{1}{\lim\left(\frac{3}{5}\right)^n-1}=-1<0$ και επομένως

$$\lim\frac{2+7^{n-1}}{3^n-5^n}=\lim\left[\left[\frac{2}{5^n}+\frac{1}{7}\left(\frac{7}{5}\right)^n\right]\frac{1}{\left(\frac{3}{5}\right)^n-1}\right]=-\infty.$$

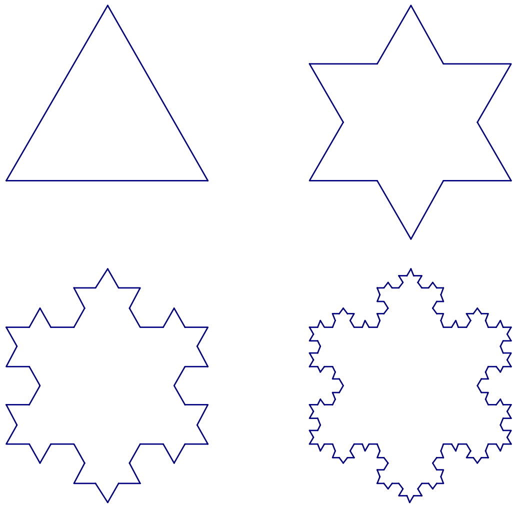
Για το $\lim\left(\frac{3n-1}{2n-1}\right)^n$ παρατηρούμε ότι: $\sqrt[n]{\left(\frac{3n-1}{2n-1}\right)^n}=\frac{3n-1}{2n-1}=\frac{3-\frac{1}{n}}{2-\frac{1}{n}}\to\frac{3}{2}>1$. Σύμφωνα με το (iii), θα πάρουμε $\lim\left(\frac{3n-1}{2n-1}\right)^n=+\infty$.

5. Θεωρούμε ένα ισόπλευρο τρίγωνο πλευράς α. Χωρίζουμε κάθε πλευρά σε τρία ίσα τμήματα. Με βάση το μεσαίο τμήμα κατασκευάζουμε ισόπλευρο τρίγωνο που βρίσκεται στο εξωτερικό του αρχικού τριγώνου. Δημιουργείται έτσι ένα νέο σχήμα (αστέρι).

Επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία αυτή στις πλευρές του αστεριού και παίρνουμε το κάτω-αριστερά σχήμα. Αν ξανακάνουμε αυτή τη διαδικασία στις πλευρές του νέου σχήματος θα πάρουμε το κάτω-δεξιά σχήμα. Υποθέτουμε ότι αυτή η διαδικασία συνεχίζεται επ' άπειρον.

i) Να υπολογιστεί το μήκος της οριακής καμπύλης.

ii) Να υπολογιστεί το εμβαδόν του εσωτερικού της οριακής αυτής καμπύλης.



Λύση: Ας είναι k_n το πλήθος των πλευρών του (μη κυρτού) πολυγώνου που προκύπτει μετά από $n-1$ βήματα, α_n το μήκος της πλευράς του, Π_n η περίμετρός του και E_n το εμβαδόν του.

Κάθε πλευρά του παλιού πολυγώνου δίνει 4 πλευρές του νέου. Άρα ισχύει $k_{n+1} = 4k_n$ και επειδή $k_1 = 3$, θα πάρουμε $k_n = 3\cdot 4^{n-1}$. Κάθε πλευρά του νέου πολυγώνου ισούται με το $\frac{1}{3}$ της πλευράς του παλιού, δηλαδή, $\alpha_{n+1} = \frac{1}{3}\alpha_n$. Άρα $\alpha_n = \frac{1}{3^{n-1}}\alpha$. Επομένως $\Pi_{n+1} = k_{n+1}\alpha_{n+1} =$ $= 4k_n\cdot\frac{1}{3}\alpha_n = \frac{4}{3}k_n\alpha_n = \frac{4}{3}\Pi_n$. Από το (ii) του προηγούμενου παραδείγματος προκύπτει ότι $\lim\Pi_n = +\infty$. Η οριακή καμπύλη έχει λοιπόν άπειρο μήκος!

Το εμβαδόν κάθε ισοπλεύρου τριγώνου που προσθέτουμε είναι $\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{1}{3}\alpha_n\right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{36}\alpha_n^2$. Στο αρχικό εμβαδόν προσθέτουμε $k_n = 3\cdot 4^{n-1}$ ισόπλευρα τρίγωνα συνολικού εμβαδού $3\cdot 4^{n-1}\frac{\sqrt{3}}{36}\alpha_n^2 = 4^{n-2}\frac{\sqrt{3}}{3}\alpha_n^2\; 4^{n-2}\frac{\sqrt{3}}{3}\frac{1}{3^{2n-2}}\alpha^2 = \frac{4^{n-2}\sqrt{3}\cdot\alpha^2}{3^{2n-1}}$.

Άρα $\mathrm{E}_{n+1} = \mathrm{E}_n + \frac{4^{n-2}\sqrt{3}\cdot\alpha^2}{3^{2n-1}} = \mathrm{E}_n + \frac{3\alpha^2}{16}\sqrt{3}\left(\frac{4}{9}\right)^n$.

Επομένως

$$\mathrm{E}_n = \mathrm{E}_{n-1} + \frac{3\alpha^2}{16}\sqrt{3}\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1} = \mathrm{E}_{n-2} + \frac{3\alpha^2}{16}\sqrt{3}\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1} + \frac{3\alpha^2}{16}\sqrt{3}\left(\frac{4}{9}\right)^{n-2} = \frac{3\alpha^2}{16}\sqrt{3}\left[\frac{4}{9} + \frac{4^2}{9^2} + \right.$$

$$\left. \cdots + \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}\right] + \mathrm{E}_1 = \frac{\alpha^2}{12}\sqrt{3}\left[1 + \frac{4}{9} + \frac{4^2}{9^2} + \cdots + \left(\frac{4}{9}\right)^{n-2}\right] + \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4} = \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4}\left[\frac{1}{3} + \frac{1-\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}}{1-\frac{4}{9}}\right] =$$

$$= \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4}\left[\frac{1}{3} + \frac{9}{5}\left[1 - \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}\right]\right]$$

Επομένως, $\lim \mathrm{E}_n = \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4}\left[\frac{1}{3} + \frac{9}{5}\left[1 - \lim\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}\right]\right] = \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4}\left[\frac{1}{3} + \frac{9}{5}\right] = \frac{8\alpha^2\sqrt{3}}{15}$.

Άλυτες ασκήσεις

1. Να δείξετε ότι: **i)** $\lim \frac{-2n^2 + 3n + 5}{3n^2 - n - 1} = -\infty$ και **ii)** $\lim \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!}} = +\infty$.

2. Να υπολογίσετε τα όρια: **i)** $\lim \frac{2 + 5^{n-2}}{4^n + 3^n}$ και **ii)** $\lim \frac{n^n}{n!}$.

2.11 Το κριτήριο σύγκλισης του Cauchy*

Στην παράγραφο αυτή θα μάθουμε για το κριτήριο σύγκλισης του Cauchy, το οποίο αποτελεί ένα μάλλον θεωρητικό εργαλείο για την ύπαρξη ορίου μιας ακολουθίας. Το κριτήριο αυτό θα το χρησιμοποιήσουμε στην επόμενη παράγραφο, όπου θα εισάγουμε την έννοια της δύναμης με εκθέτη πραγματικό (ενδεχομένως άρρητο).

Θεωρούμε μια φραγμένη ακολουθία (a_n). Τότε, για κάθε $n = 1, 2, \ldots$, **η ουρά** $\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots\}$ της ακολουθίας (a_n) είναι φραγμένη.

Θέτουμε $\underline{a}_n = \inf\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots\}$ και $\overline{a}_n = \sup\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots\}$.

Εφόσον $\{a_{n+1}, a_{n+2}, a_{n+3}, \ldots\} \subseteq \{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots\}$, θα έχουμε $\inf\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots\} \le \inf\{a_{n+1}, a_{n+2}, a_{n+3}, \ldots\}$ και $\sup\{a_{n+1}, a_{n+2}, a_{n+3}, \ldots\} \le \sup\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots\}$. (Πρόταση 2.8.5).

Δηλαδή, $\underline{a}_n \le \underline{a}_{n+1}$ και $\overline{a}_{n+1} \le \overline{a}_n$.

Η ακολουθία $(\underline{a}_n)$, ως αύξουσα και άνω φραγμένη (από τον 1$^{\text{ο}}$ όρο της $(\overline{a}_n)$), συγκλίνει.

Η ακολουθία $(\overline{a}_n)$, ως φθίνουσα και κάτω φραγμένη (από τον 1$^{\text{ο}}$ όρο της $(\underline{a}_n)$), συγκλίνει.

Θέτουμε $\underline{\lim} a_n = \lim \underline{a}_n$ και $\overline{\lim} a_n = \lim \overline{a}_n$.

2.11.1 Ορισμός

Ο αριθμός $\underline{\lim} a_n$ *λέγεται* ***κατώτερο όριο*** *της ακολουθίας* (a_n). *Ο αριθμός* $\overline{\lim} a_n$ *λέγεται* ***ανώτερο όριο*** *της* (a_n).

2.11.2 Πρόταση

(i) *Ισχύει* $\underline{\lim} a_n \le \overline{\lim} a_n$, *για κάθε φραγμένη ακολουθία* (a_n).

(ii) *Ισχύει ισότητα στην παραπάνω σχέση αν και μόνον αν η ακολουθία* (a_n) *συγκλίνει. Στην περίπτωση αυτή έχουμε* $\lim a_n = \underline{\lim} a_n = \overline{\lim} a_n$.

Απόδειξη: (i) Έχουμε $\underline{a}_n = \inf\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots\} \le \sup\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots\} = \overline{a}_n$ και επομένως $\lim \underline{a}_n \le \lim \overline{a}_n$.

(ii) Έστω ότι $\underline{\lim} a_n = \overline{\lim} a_n = a$. Θεωρούμε $\varepsilon > 0$. Τότε υπάρχει n_0 με την ιδιότητα $a - \varepsilon < \underline{a}_n$ και $\overline{a}_n < a + \varepsilon$, για κάθε $n \ge n_0$.

Επειδή $\underline{a}_n = \inf\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots\} \le a_n \le \sup\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots\} = \overline{a}_n$, θα πάρουμε $a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon \Leftrightarrow |a_n - a| < \varepsilon$.

Αντίστροφα, έστω ότι η (a_n) συγκλίνει και $a = \lim a_n$. Αν $\varepsilon > 0$, τότε υπάρχει n_0 με την ιδιότητα $|a_n - a| < \varepsilon/2 \Leftrightarrow a - \varepsilon/2 < a_n < a + \varepsilon/2$, για κάθε $n \ge n_0$.

Επομένως,

$a - \varepsilon < a - \varepsilon/2 \le \inf\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots\} = \underline{a}_n \le \overline{a}_n = \sup\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots\} \le a + \varepsilon/2 < a + \varepsilon$, για κάθε $n \ge n_0$. Άρα $|\underline{a}_n - a| < \varepsilon$ και $|\overline{a}_n - a| < \varepsilon$, για κάθε $n \ge n_0$.■

2.11.3 Πρόταση (Κριτήριο του Cauchy)

Έστω (a_n) *μια φραγμένη ακολουθία. Η ακολουθία* (a_n) *συγκλίνει αν και μόνον αν:*

Για κάθε $\varepsilon > 0$ *υπάρχει θετικός ακέραιος* n_0 *με την ιδιότητα* $|a_n - a_m| < \varepsilon$, *για κάθε* $n, m \ge n_0$.

Απόδειξη: Έστω ότι η (a_n) συγκλίνει και $a = \lim a_n$. Αν $\varepsilon > 0$, τότε υπάρχει θετικός ακέραιος n_0 με την ιδιότητα $|a_n - a| < \varepsilon/2$, για κάθε $n \ge n_0$.

Έστω $n, m \ge n_0$. Τότε $|a_n - a_m| \le |a_n - a| + |a_m - a| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$.

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει θετικός ακέραιος n_0 με την ιδιότητα $|a_n - a_m| < \varepsilon$, για κάθε $n, m \ge n_0$. Η συνθήκη αυτή, με $\varepsilon/2$ στη θέση του ε, διατυπώνεται ως εξής: Υπάρχει θετικός ακέραιος n_0 με την ιδιότητα $|a_n - a_m| < \varepsilon/2$, για κάθε $n, m \geq n_0$. Ειδικά για $m = n_0$, θα έχουμε: $|a_n - a_{n_0}| < \varepsilon/2$, για κάθε $n \geq n_0$.

Επομένως, $a_{n_0} - \varepsilon/2 < a_n < a_{n_0} + \varepsilon/2$, για κάθε $n \geq n_0$ και συνεπώς

$a_{n_0} - \varepsilon/2 \leq a_n \leq \underline{a}_n = \inf\{a_n, a_{n+1}, \ldots\} \leq \overline{a}_n = \sup\{a_n, a_{n+1}, \ldots\} \leq a_{n_0} + \varepsilon/2$.

Επομένως, $a_{n_0} - \varepsilon/2 \leq \lim \underline{a}_n = \underline{\lim} a_n \leq \lim \overline{a}_n = \overline{\lim} a_n \leq a_{n_0} + \varepsilon/2$. Από τη σχέση αυτή προκύπτει ότι $-\varepsilon/2 \leq \underline{\lim} a_n - a_{n_0}$ και $\overline{\lim} a_n - a_{n_0} \leq \varepsilon/2$.

Επομένως, $0 \leq \overline{\lim} a_n - \underline{\lim} a_n = \overline{\lim} a_n - a_{n_0} - (\underline{\lim} a_n - a_{n_0}) \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$. Επειδή η σχέση $0 \leq \overline{\lim} a_n - \underline{\lim} a_n \leq \varepsilon$ ισχύει για κάθε $\varepsilon > 0$, έπεται ότι $\overline{\lim} a_n = \underline{\lim} a_n$. (Αν $\overline{\lim} a_n > \underline{\lim} a_n$ τότε, για $\varepsilon = \frac{1}{2}(\overline{\lim} a_n - \underline{\lim} a_n) > 0$, θα είχαμε $0 \leq 2\varepsilon \leq \varepsilon$, άτοπο). ■

2.12 Δυνάμεις με εκθέτη πραγματικό

Στην παράγραφο 1.6 εισάγαμε την έννοια της δύναμης με βάση θετικό πραγματικό και εκθέτη ρητό αριθμό. Τι νόημα όμως θα μπορούσε να έχει η παράσταση $3^{\sqrt{2}}$;

Μια σκέψη είναι να πάρουμε την ακολουθία (1, 1,4, 1,41, 1,414, 1,4142,...) των (ρητών) δεκαδικών προσεγγίσεων του $\sqrt{2}$ και να κατασκευάσουμε στη συνέχεια την αντίστοιχη ακολουθία 2^{1}, $2^{1,4}$, $2^{1,41}$, $2^{1,414}$, $2^{1,4142}$,... των δυνάμεων. Τι πιο φυσιολογικό, από το να ορίσουμε ως $3^{\sqrt{2}}$ το όριο της τελευταίας ακολουθίας; Κανείς όμως δεν μας εγγυάται ότι η ακολουθία 2^{1}, $2^{1,4}$, $2^{1,41}$, $2^{1,414}$, $2^{1,4142}$,... πράγματι συγκλίνει.

Αν τώρα, αντί της αρχικής ακολουθίας των δεκαδικών προσεγγίσεων, παίρναμε μια άλλη ακολουθία ρητών, η οποία συνέκλινε στον $\sqrt{2}$, π.χ. την ακολουθία (b_n) της παραγράφου 2.2, η αντίστοιχη ακολουθία 2^{b_n} θα συνέκλινε στον ίδιο αριθμό με αυτόν της ακολουθίας 2^{1}, $2^{1,4}$, $2^{1,41}$, $2^{1,414}$, $2^{1,4142}$,...;

Στην παράγραφο αυτή θα απαντήσουμε καταφατικά σ' αυτά τα ερωτήματα.

2.12.1 Πρόταση

Αν $x, y \in \mathbb{R}$ με $x < y$, τότε υπάρχει ρητός $z = \dfrac{m}{n}$ ($m, n \in \mathbb{Z}$ και $n > 0$) με $x < z < y$.

Απόδειξη: Εφόσον η ακολουθία $\left(\frac{1}{n}\right)$ είναι μηδενική, υπάρχει θετικός ακέραιος n με $\frac{1}{n} < y - x$. Άρα $1 < ny - nx$. Θέτουμε $m = [nx] + 1$. Τότε $m > nx$ και $m - 1 \le nx < ny - 1$. Επομένως, $nx < m < ny \Rightarrow x < \frac{m}{n} < y$.■

2.12.2 Πόρισμα

Για κάθε πραγματικό αριθμό x υπάρχει ακολουθία ρητών αριθμών (x_n) *με* $\lim x_n = x$.

Απόδειξη: Για κάθε θετικό ακέραιο n υπάρχει $x_n \in \mathbb{Q}$ με $x - \frac{1}{n} < x_n < x$. Εφόσον $\lim\left(x - \frac{1}{n}\right) = x$, έπεται ότι $\lim x_n = x$. (Το ίδιο αποτέλεσμα θα παίρναμε αν επιλέγαμε $x < x_n < x + \frac{1}{n}$).■

2.12.3 Πρόταση

Έστω $a > 0$ *και* (x_n) *μια ακολουθία ρητών αριθμών με* $\lim x_n = 0$. *Τότε* $\lim a^{x_n} = 1$.

***Απόδειξη:** Η περίπτωση $a = 1$ είναι τετριμένη.

Έστω $a > 1$. Θεωρούμε $\varepsilon > 0$. Εφόσον $\lim a^{1/n} = \lim \sqrt[n]{a} = 1$ και $\lim a^{-1/n} = 1$, υπάρχει θετικός ακέραιος n_0 με $-\varepsilon < a^{-1/n_0} - 1 < a^{1/n_0} - 1 < \varepsilon$. Επειδή $\lim x_n = 0$, υπάρχει θετικός ακέραιος n_1 με $-\frac{1}{n_0} < x_n < \frac{1}{n_0}$, για κάθε $n \ge n_1$. Επομένως $a^{-1/n_0} < a^{x_n} < a^{1/n_0} \Rightarrow$

$-\varepsilon < a^{-1/n_0} - 1 < a^{x_n} - 1 < a^{1/n_0} - 1 < \varepsilon \Rightarrow |a^{x_n} - 1| < \varepsilon$, για κάθε $n \ge n_1$.

Αν $a < 1$, τότε $a^{-1} > 1$ και επομένως $\lim (a^{-1})^{x_n} = 1$. Συνεπώς, $\lim a^{x_n} = \frac{1}{\lim (a^{-1})^{x_n}} = 1$.■

2.12.4 Πρόταση

Έστω $a > 0$ *και* (x_n) *μια ακολουθία ρητών αριθμών με* $\lim x_n = x \in \mathbb{R}$. *Τότε η ακολουθία* $\left(a^{x_n}\right)$ *συγκλίνει. Επίσης,* $\lim a^{x_n} > 0$.

***Απόδειξη:** Για $a = 1$, $\lim a^{x_n} = 1$.

Έστω $a > 1$. Εφόσον η (x_n) συγκλίνει, αυτή θα είναι άνω φραγμένη. Άρα υπάρχει $M > 0$ με $x_n < M$, για κάθε $n = 1, 2, \ldots$ Το M μπορεί να θεωρηθεί θετικός ακέραιος. (Αν το M δεν είναι ακέραιος παίρνουμε το $\max\{[M] + 1, 1\} > M$, το οποίο είναι άνω φράγμα της (x_n)).

Στη συνέχεια θα εφαρμόσουμε το κριτήριο του Cauchy. Θεωρούμε $\varepsilon > 0$. Εφόσον $\lim a^{1/n} = = \lim a^{-1/n} = 1$, υπάρχει θετικός ακέραιος n_0 με $-\frac{\varepsilon}{M} < a^{-1/n_0} - 1 < a^{1/n_0} - 1 < \frac{\varepsilon}{M}$.

Επειδή η ακολουθία (x_n) συγκλίνει, από το κριτήριο Cauchy, υπάρχει υπάρχει θετικός ακέραιος n_1 με $-\frac{1}{n_0} < x_n - x_m < \frac{1}{n_0}$, για κάθε $n, m \geq n_1$.

Επομένως $-\frac{\varepsilon}{M} < a^{-1/n_0} - 1 < a^{x_n - x_m} - 1 < a^{1/n_0} - 1 < \frac{\varepsilon}{M}$, για κάθε $n, m \geq n_1$, δηλαδή $| a^{x_n - x_m} - 1 | < \frac{\varepsilon}{M}$, για κάθε $n, m \geq n_1$.

Επομένως, $| a^{x_n} - a^{x_m} | = a^{x_m} | a^{x_n - x_m} - 1 | < M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$, για κάθε $n, m \geq n_1$. Με βάση το κριτήριο του Cauchy, η ακολουθία $\left(a^{x_n}\right)$ συγκλίνει.

Ας είναι τώρα N ένα κάτω φράγμα της (x_n). Το N μπορεί να ληφθεί ακέραιος. (Αν το N δεν είναι ακέραιος, τότε παίρνουμε το $[N]$, το οποίο είναι ένα κάτω φράγμα της (x_n)). Επομένως, $a^N \leq a^{x_n}$, για κάθε $n = 1, 2, \ldots$ και συνεπώς $0 < a^N \leq \lim a^{x_n}$.

Έστω $0 < a < 1$. Τότε $a^{x_n} = \frac{1}{(a^{-1})^{x_n}}$ και, επειδή $a^{-1} > 1$, η $((a^{-1})^{x_n})$ συγκλίνει σ' έναν θετικό αριθμό λ. Τότε και η (a^{x_n}) συγκλίνει στον αριθμό $\frac{1}{\lambda} > 0$.■

2.12.5 Πρόταση

Έστω $a > 0$ *και* (x_n), (y_n) *ακολουθίες ρητών αριθμών με* $\lim x_n = \lim y_n = x \in \mathbb{R}$. *Τότε* $\lim a^{x_n} = \lim a^{y_n}$.

Απόδειξη: Εφόσον $\lim(x_n - y_n) = 0$, από την πρόταση 2.12.3 προκύπτει ότι $\lim a^{x_n - y_n} = 1$. Αλλά, $\lim a^{x_n - y_n} = \lim a^{x_n} \lim a^{-y_n} = \frac{\lim a^{x_n}}{\lim a^{y_n}}$. Επομένως $\lim a^{x_n} = \lim a^{y_n}$.

Θέτουμε $\exp_a(x) = \lim a^{x_n}$, όπου (x_n) είναι μια ακολουθία ρητών αριθμών με $\lim x_n = x$. Με βάση την πρόταση 2.12.5, η παράσταση $\exp_a(x)$ είναι ανεξάρτητη από την συγκεκριμένη ακολουθία (x_n) που συγκλίνει στο x. ■

2.12.6 Πρόταση

Έστω $a > 0$ *και* $x < y$. ***(i)*** *Αν* $a > 1$, *τότε* $\exp_a(x) < \exp_a(y)$. ***(ii)*** *Αν* $0 < a < 1$, *τότε* $\exp_a(x) > \exp_a(y)$.

***Απόδειξη:** **(i)** Έστω $a>1$. Θεωρούμε δύο ρητούς z_1 και z_2 με $x<z_1<z_2<y$. (Εφαρμόζουμε την πρόταση 2.12.1 για το ζευγάρι $x<y$ και βρίσκουμε έναν ρητό z_1 με $x<z_1<y$. Στη συνέχεια, εφαρμόζουμε την ίδια πρόταση για το ζευγάρι $z_1<y$).

Έστω (x_n) μια ακολουθία ρητών με $\lim x_n = x$. Εφόσον $x<z_1$, υπάρχει θετικός ακέραιος n_0 με $|x_n - x| < \frac{z_1-x}{2}$, για κάθε $n \geq n_0$. Επομένως $x_n - x < \frac{z_1-x}{2} \Rightarrow x_n < \frac{z_1+x}{2} < z_1$ και επομένως $a^{x_n} < a^{z_1}$, για κάθε $n \geq n_0$. Άρα $\exp_a(x) = \lim a^{x_n} \leq a^{z_1}$.

Παρόμοια παίρνουμε $a^{z_2} \leq \exp_a(y)$. Εφόσον τα z_1 και z_2 είναι ρητοί, θα έχουμε $a^{z_1} < a^{z_2}$.

Άρα $\exp_a(x) \leq a^{z_1} < a^{z_2} \leq \exp_a(y)$.

(ii) Έστω $0<a<1$. Τότε $a^{-1}>1$. Θεωρούμε δύο ακολουθίες ρητών (x_n) και (y_n) με $\lim x_n = x$ και $\lim y_n = y$. Τότε $\lim(a^{-1})^{x_n} = \exp_{a^{-1}}(x) < \exp_{a^{-1}}(y) = \lim(a^{-1})^{y_n}$. Επομένως,

$$\exp_a(x) = \frac{1}{\lim(a^{-1})^{x_n}} > \frac{1}{\lim(a^{-1})^{y_n}} = \exp_a(y). \blacksquare$$

2.12.7 Πρόταση

Έστω $a>0$ *και* $x \in \mathbb{Q}$. *Τότε* $\exp_a(x) = a^x$.

Απόδειξη: Θεωρούμε τη σταθερή ακολουθία $x_n = x$, $n=1,2,\ldots$ Τότε, $\exp_a(x) = \lim a^x = a^x$.

$\blacksquare$

Η πρόταση 2.12.7 μας επιτρέπει να επεκτείνουμε τον εκθετικό συμβολισμό και για άρρητο εκθέτη. Θέτουμε $a^x = \exp_a(x)$, για κάθε $a>0$ και $x \in \mathbb{R}$.

Στη συνέχεια, θα επαληθεύσουμε τις γνωστές ιδιότητες των δυνάμεων στη γενική περίπτωση.

2.12.8 Πρόταση

Έστω $a>0$. *Ισχύουν τα εξής:*

(i) $a^{x+y} = a^x a^y$, ***(ii)*** $a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$ *και* ***(iii)*** $(a^x)^y = a^{xy}$, *για κάθε* $a>0$ *και* $x,y \in \mathbb{R}$.

Απόδειξη: **(i) και (ii)** Θεωρούμε δύο ακολουθίες ρητών (x_n) και (y_n) με $\lim x_n = x$ και $\lim y_n = y$. Τότε $\lim(x_n+y_n) = x+y$ και $\lim(x_n-y_n) = x-y$.

Επομένως $a^{x+y} = \lim(a^{x_n+y_n}) = \lim a^{x_n} \lim a^{y_n} = a^x a^y$ και $a^{x-y} = \lim(a^{x_n-y_n}) =$

$$= \lim a^{x_n} \lim a^{-y_n} = \frac{\lim a^{x_n}}{\lim a^{y_n}} = \frac{a^x}{a^y}.$$

Για το **(iii)** θα αποδείξουμε πρώτα ένα βοηθητικό λήμμα.

2.12.9 Λήμμα

Έστω (x_n) *μια ακολουθία πραγματικών αριθμών (όχι απαραίτητα ρητών) με* $\lim x_n = x \in \mathbb{R}$. *Τότε* $\lim a^{x_n} = a^x$, *όπου* $a > 0$.

***Απόδειξη:** Έστω $a > 1$. Αρχικά υποθέτουμε ότι $\lim x_n = 0$. Έστω $\varepsilon > 0$. Εφόσον $\lim a^{1/n} = = \lim a^{-1/n} = 1$, υπάρχει θετικός ακέραιος n_0 με $-\varepsilon < a^{-1/n_0} - 1 < a^{1/n_0} - 1 < \varepsilon$. Επειδή $\lim x_n = 0$, υπάρχει θετικός ακέραιος n_1 με $-\dfrac{1}{n_0} < x_n < \dfrac{1}{n_0}$, για κάθε $n \geq n_1$. Με βάση το (i) της πρότασης 2.12.6, $a^{-1/n_0} < a^{x_n} < a^{1/n_0} \Rightarrow -\varepsilon < a^{-1/n_0} - 1 < a^{x_n} - 1 < a^{1/n_0} - 1 < \varepsilon$ $\Rightarrow |a^{x_n} - 1| < \varepsilon$, για κάθε $n \geq n_1$. Άρα $\lim a^{x_n} = 1 = a^0$.

Έστω τώρα $\lim x_n = x \in \mathbb{R}$. Τότε $\lim(x_n - x) = 0$. Επομένως $\lim a^{x_n - x} = 1$. Σύμφωνα με το (ii) της πρότασης 2.12.8 (που έχουμε ήδη αποδείξει), $\lim a^{x_n - x} = \lim \dfrac{a^{x_n}}{a^x} = \dfrac{\lim a^{x_n}}{a^x}$. Επομένως $\dfrac{\lim a^{x_n}}{a^x} = 1 \Leftrightarrow \lim a^{x_n} = a^x$.■

***Συνέχεια της απόδειξης της πρότασης 2.12.8:** **(iii)** Αρχικά υποθέτουμε ότι το y είναι ρητός της μορφής $y = \dfrac{r}{s}$, όπου $r, s \in \mathbb{Z}$ και $s \geq 1$. Τώρα, αν (x_n) είναι μια ακολουθία ρητών με $\lim x_n = x$, τότε και η $(x_n y)$ είναι ακολουθία ρητών με $\lim(x_n y) = xy$.

Επομένως,

$$(a^x)^y = (\lim a^{x_n})^y = (\lim a^{x_n})^{s/t} = \sqrt[t]{(\lim a^{x_n})^s} = \lim \sqrt[t]{(a^{x_n})^s} = \lim a^{x_n s/t} = \lim a^{x_n y} = a^{xy}.$$

Αν το y είναι άρρητος και (y_n) είναι μια ακολουθία ρητών με $\lim y_n = y$, τότε η (xy_n) είναι μια ακολουθία πραγματικών (όχι απαραίτητα ρητών, γιατί το x μπορεί να είναι άρρητος) με $\lim(xy_n) = xy$. Με βάση το προηγούμενο λήμμα, έχουμε: $(a^x)^y = \lim((a^x)^{y_n}) \underset{y_n \text{ ρητός}}{=} \lim a^{xy_n} =$

$= a^{xy}$.■

Κλείνουμε την παράγραφο αυτή με την απόδειξη μιας ανισότητας, χρήσιμης στον υπολογισμό της παραγώγου της εκθετικής συνάρτησης. Πρώτα, ένα χρήσιμο λήμμα:

2.12.10 Λήμμα

Για κάθε πραγματικό αριθμό ισχύει: $e^x = \lim \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n$.

***Απόδειξη:** Στο παράδειγμα 2.9.2.2 έχουμε αποδείξει τη σχέση αυτή για ρητό x.

Ας είναι $z_1 < x < z_2$, για δύο ρητούς z_1, z_2. Τότε $\left(1+\frac{z_1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{x}{n}\right)^n < \left(1+\frac{z_2}{n}\right)^n$, για κάθε $n = 1,2,\ldots$ Επομένως $e^{z_1} = \lim\left(1+\frac{z_1}{n}\right)^n = \underline{\lim}\left(1+\frac{z_1}{n}\right)^n \leq \underline{\lim}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \leq \overline{\lim}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \leq$

$\leq \overline{\lim}\left(1+\frac{z_2}{n}\right)^n = \lim\left(1+\frac{z_2}{n}\right)^n = e^{z_2}$.

Έστω $a = \underline{\lim}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ και $b = \overline{\lim}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$. Αν (x_n) και (y_n) είναι δύο ακολουθίες ρητών με $x_n < x < y_n$ και $\lim x_n = \lim y_n = x$ (πόρισμα 2.12.2), τότε, με βάση τα παραπάνω, $e^{x_n} \leq a \leq b \leq e^{y_n}$. Αλλά, $\lim e^{x_n} = \lim e^{y_n} = e^x$. Με βάση το κριτήριο του Cauchy, το $\lim\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ υπάρχει και ισούται με e^x.■

2.12.11 Πόρισμα

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ *ισχύει:* $e^x \geq 1 + x$.

Απόδειξη: Από την ανισότητα Bernoulli έχουμε $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \geq 1 + x$, για κάθε $n = 1,2,\ldots$ Παίρνοντας τα όρια, έχουμε $e^x = \lim\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \geq 1 + x$.■