Κυριάκος Γ. Μαυρίδης

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ
ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ ΜΙΑΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Αυτές οι σημειώσεις προορίζονται να χρησιμοποιηθούν ως βοηθητικές του συγγράμματος που διανέμει το Χημικό Τμήμα του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων για τη διδασκαλία του μαθήματος 'Γενικά Μαθηματικά Ι'. Καλύπτουν ύλη που θα μπορούσε να βρεί κανείς σε ένα εξαμηνιαίο μάθημα Διαφορικού Λογισμού μιας μεταβλητής ενός Μαθηματικού Τμήματος, εμβαθύνουν όμως σε μικρότερο βαθμό, ώστε να είναι συμβατές με τις απαιτήσεις ενός Χημικού Τμήματος από ένα τέτοιο μάθημα.

Ευχαριστώ θερμά τον Επίκουρο Καθηγητή του Τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων κ. Θεόδωρο Βιδάλη για την πολύτιμη βοήθεια του στη διόρθωση των χειρογράφων καθώς και το Λέκτορα του ιδίου τμήματος κ. Απόστολο Μπατσίδη για τις εύστοχες παρατηρήσεις του όσον αφορά την αρτιότερη παρουσίαση του κειμένου.

Το παρόν στοιχειοθετήθηκε την 21 Φεβρουαρίου 2010 και διατίθεται σε ηλεκτρονική μορφή μέσω της ιστοσελίδας `http://users.uoi.gr/kmavridi/` . Για οτιδήποτε έχει σχέση με αυτές τις σημειώσεις μπορείτε να αποστείλετε την ηλεκτρονική σας αλληλογραφία στις διευθύνσεις `kmavride@otenet.gr` ή `kmavridi@uoi.gr` .

Κυριάκος Γ. Μαυρίδης

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Σ. Νεγρεπόντης, Σ. Γιωτόπουλος και Ε. Γιαννακούλιας, *Απειροστικός Λογισμός Ι*, Εκδόσεις Συμμετρία, 2007.
2. Σωτήρης Κ. Ντούγιας, *Απειροστικός Λογισμός Ι*, Εκδόσεις Leader Books, 2007.
3. Βασίλειος Α. Στάικος, *Σημειώσεις Απειροστικού Λογισμού*, Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων, 1980.
4. Παναγιώτης Χρ. Τσαμάτος, *Θεμελιώδεις 'Εννοιες Μαθηματικής Ανάλυσης*, Εκδόσεις Τζιόλα, 2009.
5. T. M. Flett, *Mathematical Analysis*, McGraw – Hill Book Company, 1966.

Κεφάλαιο 1

ΣΥΝΟΛΑ

Σημείωση 1.1. Χωρίς αυτό να αποτελεί αυστηρό μαθηματικό ορισμό της έννοιας, μπορούμε να πούμε ότι μια συλλογή καθορισμένων αντικειμένων θεωρούμενη αυτή καθαυτή ως νέο αντικείμενο καλείται ***σύνολο***. Τα αντικείμενα που απαρτίζουν ένα σύνολο καλούνται ***στοιχεία*** του συνόλου.

Σημείωση 1.2. Αν το στοιχείο a ανήκει στο σύνολο E, τότε γράφουμε $a \in E$, ενώ αν δεν ανήκει γράφουμε $a \notin E$.

Ορισμός 1.3. Ας είναι A και B δυο σύνολα.

1. Αν κάθε στοιχείο του A είναι και στοιχείο του B, τότε το A καλείται ***υποσύνολο*** του B, το B καλείται ***υπερσύνολο*** του A και συμβολίζουμε $A \subseteq B$ ή ισοδύναμα $B \supseteq A$.

2. Αν κάθε στοιχείο του A είναι και στοιχείο του B και ταυτόχρονα κάθε στοιχείο του B είναι και στοιχείο του A, τότε τα σύνολα A και B καλούνται ***ίσα*** και συμβολίζουμε $A = B$. Στην αντίθετη περίπτωση γράφουμε $A \neq B$.

3. Αν $A \subseteq B$ και ταυτόχρονα $A \neq B$, τότε το A καλείται ***γνήσιο υποσύνολο*** του B, το B ***γνήσιο υπερσύνολο*** του A και συμβολίζουμε $A \subset B$ ή ισοδύναμα $B \supset A$.

Σημείωση 1.4. 1. Δεχόμαστε ότι υπάρχει ένα σύνολο που δεν περιέχει κανένα στοιχείο. Το σύνολο αυτό καλείται ***κενό*** και συμβολίζεται με $\emptyset$. Δεχόμαστε επίσης ότι το κενό σύνολο είναι υποσύνολο κάθε συνόλου.

2. Αν ένα σύνολο αποτελείται από ένα και μόνο στοιχείο a, τότε αυτό το σύνολο καλείται ***μονοσύνολο*** και συμβολίζεται ως $\{a\}$.

Ορισμός 1.5. Ας είναι A και B δυο σύνολα.

1. ***Τομή*** των A και B καλείται το σύνολο που αποτελείται από τα κοινά στοιχεία των δύο συνόλων και συμβολίζεται ως $A \cap B$.

2. ***Ένωση*** των A και B καλείται το σύνολο που αποτελείται από τα στοιχεία και των δυο συνόλων και συμβολίζεται ως $A \cup B$.

3. ***Διαφορά*** του B από το A, με αυτή τη σειρά, καλείται το σύνολο που αποτελείται από εκείνα τα στοιχεία του B τα οποία δεν ανήκουν στο A και συμβολίζεται ως $B \backslash A$.

Σημείωση 1.6. 1. Η τομή δυο συνόλων που δεν έχουν κοινά στοιχεία είναι το κενό σύνολο.

2. Η ένωση δυο συνόλων, από τα οποία τουλάχιστον το ένα είναι μη κενό, είναι επίσης μη κενό σύνολο.

3. Αν $A \subseteq B$, τότε $A \backslash B = \emptyset$.

Ορισμός 1.7. 1. Το σύνολο των ***φυσικών*** αριθμών συμβολίζεται με $\mathbb{N}$ και ορίζεται να είναι το

$$\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \ldots\}.$$

2. Το σύνολο των ***ακεραίων*** αριθμών συμβολίζεται με $\mathbb{Z}$ και ορίζεται να είναι το

$$\mathbb{Z} := \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}.$$

3. Το σύνολο των ***ρητών*** αριθμών συμβολίζεται με $\mathbb{Q}$ και ορίζεται να είναι το
$$\mathbb{Q} := \left\{ \frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z} \text{ και } q \in \mathbb{Z}\setminus\{0\} \right\}.$$
4. Οι ***άρρητοι*** αριθμοί είναι εκείνοι οι (πραγματικοί) αριθμοί που δεν μπορούν να γραφούν ως πηλίκα ακεραίων π.χ. $\sqrt{2} \simeq 1.41, \pi \simeq 3.14, e \simeq 2.72$.
5. Το σύνολο των ***πραγματικών*** αριθμών συμβολίζεται με $\mathbb{R}$ και αποτελείται από τους ρητούς μαζί με τους άρρητους αριθμούς.

Ορισμός 1.8. Ένα υποσύνολο I του συνόλου $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών καλείται ***διάστημα*** αν κάθε στοιχείο του $\mathbb{R}$ που βρίσκεται μεταξύ δυο στοιχείων του συνόλου I είναι επίσης στοιχείο του I.

Παράδειγμα 1.9. 1. Για τον αριθμό $\frac{3}{2}$ ισχύουν τα ακόλουθα
$$\frac{3}{2} \notin \emptyset,\ \frac{3}{2} \in \left\{\frac{3}{2}\right\},\ \frac{3}{2} \notin \mathbb{N},\ \frac{3}{2} \notin \mathbb{Z},\ \frac{3}{2} \in \mathbb{Q},\ \frac{3}{2} \in \mathbb{R}$$
και
$$\frac{3}{2} \notin \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q},$$
δηλαδή το $\frac{3}{2}$ δεν είναι άρρητος.

2. Ισχύουν τα ακόλουθα
$$\emptyset \subset \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$
και
$$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{\ldots, -3, -2, -1, 0\}.$$
Από τα παραπάνω σύνολα, το $\mathbb{R}$ είναι διάστημα ενώ τα $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ και $\mathbb{Q}$ δεν είναι.

3. Έχουμε
$$(0,2) \cap (1,3) = (1,2)$$
$$(0,3) \cup (2,4) = (0,4)$$
$$(3,5)\setminus(1,4) = [4,5).$$
Επίσης, όλα τα παραπάνω σύνολα είναι διαστήματα.

Ορισμός 1.10. Αν $x \in \mathbb{R}$, τότε αποδεικνύεται ότι υπάρχει μοναδικός ακέραιος α, τέτοιος ώστε $\alpha \leq x < \alpha + 1$. Αυτός ο ακέραιος καλείται ***ακέραιο μέρος*** του x και συμβολίζεται με $[x]$.

Παράδειγμα 1.11. 1. $[4.3] = 4$, αφού $4 \leq 4.3 < 4 + 1 = 5$.

2. $[4.8] = 4$, αφού $4 \leq 4.8 < 4 + 1 = 5$.
3. $[4] = 4$, αφού $4 \leq 4 < 4 + 1 = 5$.
4. $[-4.3] = -5$, αφού $-5 \leq -4.3 < -5 + 1 = -4$.
5. $[-4.8] = -5$, αφού $-5 \leq -4.8 < -5 + 1 = -4$.
6. $[-4] = -4$, αφού $-4 \leq -4 < -4 + 1 = -3$.

Θεώρημα 1.12 (*Ανισότητα Bernoulli*). *Αν $x \in (-1, +\infty)$ και $\nu \in \mathbb{N}$, τότε ισχύει ότι*
$$(1+x)^\nu \geq 1 + x\nu.$$

Ορισμός 1.13. 1. Ένα σύνολο $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ θα λέγεται ***άνω φραγμένο*** αν υπάρχει αριθμός $M \in \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε $x \leq M$, $\forall x \in A$. Σε αυτήν την περίπτωση το M καλείται ***άνω φράγμα*** του A.

2. Ένα σύνολο $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ θα λέγεται ***κάτω φραγμένο*** αν υπάρχει αριθμός $m \in \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε $x \geq m$, $\forall x \in A$. Σε αυτήν την περίπτωση το m καλείται ***κάτω φράγμα*** του A.
3. Ένα σύνολο $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ θα λέγεται ***φραγμένο*** αν είναι άνω και κάτω φραγμένο, δηλαδή αν υπάρχει αριθμός $M \in \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε $|x| \leq M$, $\forall x \in A$.

Σημείωση 1.14. 1. Τα άνω και κάτω φράγματα, αν αυτά υπάρχουν, δεν είναι μοναδικά. Πράγματι, αν ο αριθμός M είναι άνω φράγμα ενός συνόλου $A \neq \emptyset$, τότε κάθε αριθμός μεγαλύτερος του M είναι επίσης άνω φράγμα του A. Αντίστοιχα, αν ο αριθμός m είναι κάτω φράγμα του $A \neq \emptyset$, τότε κάθε αριθμός μικρότερος του m είναι επίσης κάτω φράγμα του A.

2. Δεχόμαστε ότι οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός είναι ταυτόχρονα άνω και κάτω φράγμα του κενού συνόλου, εάν αυτό θεωρηθεί ως υποσύνολο του $\mathbb{R}$.

Παράδειγμα 1.15. Έστω ότι $A = [1, 2) \subseteq \mathbb{R}$. Τότε οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός μεγαλύτερος ή ίσος με 2 είναι άνω φράγμα του A, ενώ οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός μικρότερος ή ίσος με 1 είναι κάτω φράγμα του A.

Ορισμός 1.16. 1. Ένας αριθμός $M \in \mathbb{R}$ καλείται ***supremum*** ενός συνόλου $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ και συμβολίζεται με $\sup A$, αν το M είναι άνω φράγμα του A και επιπλέον είναι μικρότερο ή ίσο από κάθε άνω φράγμα του A.

2. Ένας αριθμός $m \in \mathbb{R}$ καλείται ***infimum*** ενός συνόλου $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ και συμβολίζεται με $\inf A$, αν το m είναι κάτω φράγμα του A και επιπλέον είναι μεγαλύτερο ή ίσο από κάθε κάτω φράγμα του A.

Ορισμός 1.17. 1. Ένας αριθμός $M \in \mathbb{R}$ καλείται ***μέγιστο*** (***maximum***) ενός συνόλου $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ και συμβολίζεται με $\max A$, αν το M είναι στοιχείο του A και επιπλέον είναι μεγαλύτερο ή ίσο από κάθε στοιχείο του A.

2. Ένας αριθμός $m \in \mathbb{R}$ καλείται ***ελάχιστο*** (***minimum***) ενός συνόλου $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ και συμβολίζεται με $\min A$, αν το m είναι στοιχείο του A και επιπλέον είναι μικρότερο ή ίσο από κάθε στοιχείο του A.

Θεώρημα 1.18. *1. Ένα σύνολο $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ έχει μέγιστο αν και μόνο αν έχει supremum και επιπλέον $\sup A \in A$. Σε αυτήν την περίπτωση ισχύει ότι*

$$\max A = \sup A.$$

2. Ένα σύνολο $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ έχει ελάχιστο αν και μόνο αν έχει infimum και επιπλέον $\inf A \in A$. Σε αυτήν την περίπτωση ισχύει ότι

$$\min A = \inf A.$$

Παράδειγμα 1.19. Έστω ότι $A = [1, 2) \subseteq \mathbb{R}$. Τότε $\sup A = 2$ και $\inf A = 1$. Επιπλέον, παρατηρούμε ότι $\sup A = 2 \notin A$ άρα το σύνολο A δεν έχει μέγιστο, ενώ αντιθέτως $\inf A = 1 \in A$, οπότε το σύνολο A έχει ελάχιστο και μάλιστα $\min A = \inf A = 1$.

Σημείωση 1.20. 1. Δεχόμαστε ως αξίωμα ότι κάθε μη κενό και άνω φραγμένο υποσύνολο του συνόλου των πραγματικών αριθμών έχει supremum. Το αξίωμα αυτό είναι γνωστό ως ***Αξίωμα του Συνεχούς*** ή ***Αξίωμα του Ελαχίστου Άνω Φράγματος*** ή ***Αξίωμα της Πληρότητας***. Από αυτό προκύπτει άμεσα ότι κάθε μη κενό και κάτω φραγμένο υποσύνολο του συνόλου των πραγματικών αριθμών έχει επιπλέον και infimum.

2. Το Αξίωμα του Συνεχούς πρακτικά σημαίνει ότι η ευθεία των πραγματικών αριθμών δεν έχει τρύπες.

3. Το Αξίωμα του Συνεχούς δεν ισχύει στο σύνολο $\mathbb{Q}$, δηλαδή υπάρχει τουλάχιστον ένα μη κενό και άνω φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{Q}$, το οποίο δεν έχει supremum στο $\mathbb{Q}$. Ένα τέτοιο σύνολο είναι το

$$S = \{x \in \mathbb{Q} : x > 0 \text{ και } x^2 < 2\},$$

το οποίο δεν έχει supremum στο $\mathbb{Q}$ ενώ έχει supremum στο $\mathbb{R}$, το $\sqrt{2}$.

4. Σύμφωνα με το Αξίωμα του Συνεχούς, το μοναδικό μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ που δεν έχει ούτε supremum ούτε infimum είναι το ίδιο το $\mathbb{R}$.

Θεώρημα 1.21. *Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ ένα μη κενό και φραγμένο σύνολο. Τότε*

$$\inf A = \max\{x \in \mathbb{R} : \ x \ \textit{ είναι κάτω φράγμα του } \ A\}$$

και

$$\sup A = \min\{x \in \mathbb{R} : \ x \ \textit{ είναι άνω φράγμα του } \ A\}.$$

Σημείωση 1.22. 1. Αν δεχθούμε ότι $\sup A = +\infty$, στην περίπτωση που το σύνολο A δεν είναι άνω φραγμένο, και $\inf A = -\infty$, στην περίπτωση που το σύνολο A δεν είναι κάτω φραγμένο, τότε κάθε υποσύνολο του $\mathbb{R}$, ανεξάρτητα από το αν είναι φραγμένο ή όχι, έχει supremum και infimum στη ***γενικευμένη πραγματική ευθεία***, δηλαδή στο σύνολο

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}.$$

2. Στην ειδική περίπτωση του κενού συνόλου $\emptyset$, θέτουμε $\sup \emptyset = -\infty$ και $\inf \emptyset = +\infty$. Αυτή η θεώρηση είναι συμβατή με τη Σημείωση 1.14(2) αν λάβουμε υπόψη το Θεώρημα 1.21.

Θεώρημα 1.23. *Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$. Αν υπάρχει το $\sup A$ (αντίστοιχα το $\inf A$) τότε αυτό είναι μοναδικό.*

Απόδειξη. Έστω ότι το $\sup A$ δεν είναι μοναδικό, δηλαδή υπάρχουν δυο supremum του A, τα $M_1 \in \mathbb{R}$ και $M_2 \in \mathbb{R}$ με $M_1 \neq M_2$. Τότε έχουμε

$$\begin{aligned} \sup A = M_1 &\Rightarrow M_1 \text{ άνω φράγμα του } A \\ &\Rightarrow M_2 = \sup A \leq M_1. \end{aligned}$$

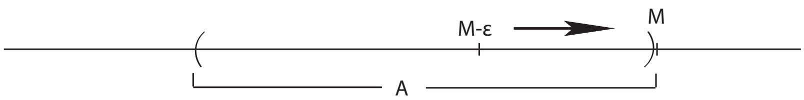
Ομοίως

$$\begin{aligned} \sup A = M_2 &\Rightarrow M_2 \text{ άνω φράγμα του } A \\ &\Rightarrow M_1 = \sup A \leq M_2. \end{aligned}$$

Άρα $M_2 \leq M_1$ και $M_1 \leq M_2$, δηλαδή $M_1 = M_2$, το οποίο είναι άτοπο, αφού υποθέσαμε ότι $M_1 \neq M_2$.
Ανάλογα δουλεύουμε για το infimum. □

Θεώρημα 1.24. *Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$. Τότε $M = \sup A$ αν και μόνο αν ισχύουν ταυτόχρονα τα ακόλουθα*

1. *$x \leq M, \forall x \in A$ (δηλαδή το M είναι άνω φράγμα του A).*
2. *$(\forall \epsilon > 0)$ $(\exists x \in A)$ τέτοιο ώστε $M - \epsilon < x$.*



Απόδειξη. Έστω ότι $M = \sup A$. Τότε προφανώς το M είναι άνω φράγμα του A. Επίσης, έστω ότι

$$(\exists \epsilon_0 > 0)\ (\forall x \in A) \text{ ισχύει } M - \epsilon_0 \geq x.$$

Τότε το $M - \epsilon_0$ είναι ένα άνω φράγμα του A και αφού $M = \sup A$ θα πρέπει να ισχύει ότι $M \leq M - \epsilon_0$, πράγμα άτοπο αφού το ϵ_0 είναι θετικό.
Αντίστροφα, έστω ότι ισχύουν τα ακόλουθα

1. $x \leq M, \forall x \in A$.
2. $(\forall \epsilon > 0)$ $(\exists x \in A)$ τέτοιο ώστε $M - \epsilon < x$.

Θα δείξουμε ότι $M = \sup A$. Ας υποθέσουμε ότι $M \neq \sup A$. Τότε από το (1) έχουμε ότι το M είναι άνω φράγμα του A, οπότε $\sup A \leq M$. Όμως υποθέσαμε ότι $\sup A \neq M$, συνεπώς $\sup A < M$. Έτσι $(\exists M_0 \in \mathbb{R})$ τέτοιο ώστε $\sup A < M_0 < M$. Θεωρούμε το αριθμό $\epsilon_0 = M - M_0$. Προφανώς $\epsilon_0 > 0$. Τότε από το (2) υπάρχει $x \in A$ τέτοιο ώστε

$$x > M - \epsilon = M - (M - M_0),$$

δηλαδή $x > M_0$, το οποίο είναι άτοπο αφού $x \leq \sup A < M_0$. Συνεπώς το θεώρημα αποδείχθηκε. □

Θεώρημα 1.25. *Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$. Τότε $m = \inf A$ αν και μόνο αν ισχύουν ταυτόχρονα τα ακόλουθα*

1. *$m \leq x$, $\forall x \in A$ (δηλαδή το m είναι κάτω φράγμα του A).*

2. $(\forall \epsilon > 0)$ $(\exists x \in A)$ *τέτοιο ώστε* $x < m + \epsilon$.

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι ανάλογη αυτής του Θεωρήματος 1.24. □

Σημείωση 1.26. Στα Θεωρήματα 1.24 και 1.25 οι σχέσεις

$$(\forall \epsilon > 0)\ (\exists x \in A) \text{ τέτοιο ώστε } M - \epsilon < x$$

και

$$(\forall \epsilon > 0)\ (\exists x \in A) \text{ τέτοιο ώστε } x < m + \epsilon$$

αντίστοιχα, αρκεί να αποδειχθεί ότι ισχύουν για ¨μικρά¨ ϵ, δηλαδή για θετικά ϵ που είναι οσοδήποτε κοντά στο μηδέν.

Θεώρημα 1.27. *Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ ένα μη κενό και φραγμένο σύνολο και B ένα μη κενό υποσύνολο του A. Τότε*

$$\inf A \le \inf B \le \sup B \le \sup A.$$

Θεώρημα 1.28. *Έστω $\lambda \in \mathbb{R}$ και $A \subseteq \mathbb{R}$ ένα μη κενό και φραγμένο σύνολο. Θέτουμε*

$$\lambda A = \{\lambda x : x \in A\}.$$

Τότε

1. $\sup(\lambda A) = \begin{cases} \lambda \sup A, & \lambda \ge 0 \\ \lambda \inf A, & \lambda < 0 \end{cases}.$

2. $\inf(\lambda A) = \begin{cases} \lambda \inf A, & \lambda \ge 0 \\ \lambda \sup A, & \lambda < 0 \end{cases}.$

Θεώρημα 1.29. *Έστω $\xi \in \mathbb{R}$ και A ένα μη κενό και φραγμένο σύνολο. Θέτουμε*

$$\xi + A = \{\xi + x : x \in A\}.$$

Τότε

1. $\sup(\xi + A) = \xi + \sup A.$

2. $\inf(\xi + A) = \xi + \inf A.$

Θεώρημα 1.30. *Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$, $B \subseteq \mathbb{R}$ δύο μη κενά και φραγμένα σύνολα. Θέτουμε*

$$C = \{x : x = \alpha + \beta, \alpha \in A, \beta \in B\}.$$

Τότε

1. $\inf C = \inf A + \inf B,$

2. $\sup C = \sup A + \sup B.$

Παράδειγμα 1.31. Έστω

$$A = \left\{1 - \frac{1}{\nu} : \nu \in \mathbb{N}\right\}.$$

Τότε $\sup A = 1$ και $\inf A = 0$. Πράγματι, παρατηρούμε ότι

$$1 - \frac{1}{\nu} < 1, \quad \forall \nu \in \mathbb{N},$$

συνεπώς το σύνολο A είναι άνω φραγμένο (ένα άνω φράγμα είναι το 1), οπότε έχει supremum. Επίσης ισχύει ότι

$$1 - \frac{1}{\nu} \ge 0, \quad \forall \nu \in \mathbb{N},$$

οπότε το A είναι και κάτω φραγμένο (ένα κάτω φράγμα είναι το 0), συνεπώς έχει infimum.

Θα δείξουμε ότι $\sup A = 1$, χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 1.24. Πράγματι, έχουμε ήδη δείξει ότι το 1 είναι άνω φράγμα του A. Επιπλέον, επιλέγουμε ένα τυχαίο $\epsilon > 0$. Αναζητούμε $x \in A$ τέτοιο ώστε $1 - \epsilon < x$. Αφού $x \in A$, το x έχει τη μορφή

$$x = 1 - \frac{1}{\nu_x},$$

συνεπώς αρκεί να βρούμε ένα φυσικό αριθμό ν_x τέτοιο ώστε

$$1-\epsilon<1-\frac{1}{\nu_x}$$

ή ισοδύναμα

$$\nu_x>\frac{1}{\epsilon}.$$

Ένα τέτοιο ν_x είναι το

$$\left[\frac{1}{\epsilon}\right]+1.$$

Συνοψίζοντας, έχουμε ότι

$$(\forall\epsilon>0)\ \left(\exists x=1-\frac{1}{\left[\frac{1}{\epsilon}\right]+1}\in A\right)\ \text{τέτοιο ώστε}\ 1-\epsilon<x.$$

Αυτό, μαζί με το ότι ο πραγματικός αριθμός 1 είναι άνω φράγμα του A, αποδεικνύει ότι $\sup A=1$.

Για τη σχέση $\inf A=0$, αρκεί να παρατηρήσουμε ότι

$$1-\frac{1}{1}=0,$$

δηλαδή ο αριθμός μηδέν είναι στοιχείο του συνόλου A. Επίσης, έχουμε δείξει παραπάνω ότι το μηδέν είναι κάτω φράγμα του A, συνεπώς τελικά καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι το σύνολο A έχει ελάχιστο, το μηδέν. Άρα

$$\inf A=\min A=0.$$

Παράδειγμα 1.32. Έστω

$$A=\{x\in\mathbb{R}:|x|+|x+1|<2\}.$$

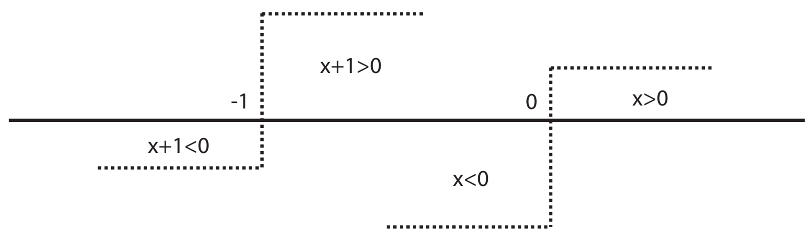
Τότε $\sup A=\frac{1}{2}$ και $\inf A=-\frac{3}{2}$.

Πράγματι, παρατηρούμε ότι

$$|x|=0\Leftrightarrow x=0$$

και

$$|x+1|=0\Leftrightarrow x=-1.$$



Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις

1. $x<-1$. Τότε έχουμε $|x|=-x$ και $|x+1|=-x-1$, οπότε

$$|x|+|x+1|<2\Leftrightarrow(-x)+(-x-1)<2\Leftrightarrow -2x-1<2\Leftrightarrow x>-\frac{3}{2}.$$

Συνεπώς τα στοιχεία του A που ταυτόχρονα ανήκουν και στο διάστημα $(-\infty,-1)$ είναι τα

$$\left\{x\in\mathbb{R}:x<-1\ \text{και}\ x>-\frac{3}{2}\right\}=\left(-\frac{3}{2},-1\right).$$

2. $-1 < x < 0$. Τότε έχουμε $|x| = -x$ και $|x+1| = x+1$, οπότε
$$|x| + |x+1| < 2 \Leftrightarrow (-x) + (x+1) < 2 \Leftrightarrow 1 < 2,$$
άρα αυτή η ανισότητα δεν μας δίνει κανέναν επιπλέον περιορισμό για το x. Συνεπώς τα στοιχεία του A που ταυτόχρονα ανήκουν και στο διάστημα $(-1, 0)$ είναι ολόκληρο το διάστημα $(-1, 0)$. Σημειώνουμε εδώ ότι αν αντί της σχέσης $1 < 2$ καταλήγαμε σε μία σχέση που δεν ισχύει ποτέ, π.χ. στην $3 < 2$, τότε θα συμπεραίναμε ότι δεν υπάρχουν στοιχεία του A που να ανήκουν στο $(-1, 0)$.

3. $0 < x$. Τότε έχουμε $|x| = x$ και $|x+1| = x+1$, οπότε
$$|x| + |x+1| < 2 \Leftrightarrow x + x + 1 < 2 \Leftrightarrow x < \frac{1}{2}.$$
Συνεπώς, τα στοιχεία του A που ταυτόχρονα ανήκουν και στο $(0, +\infty)$ είναι τα
$$\left\{x \in \mathbb{R} : x > 0 \text{ και } x < \frac{1}{2}\right\} = \left(0, \frac{1}{2}\right).$$

Επίσης, προφανώς τα σημεία 0 και -1 ανήκουν στο A, άρα
$$A = \left(-\frac{3}{2}, -1\right) \cup (-1, 0) \cup \left(0, \frac{1}{2}\right) \cup \{0\} \cup \{-1\} = \left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

Έτσι προκύπτει άμεσα ότι $\sup A = \frac{1}{2}$ και $\inf A = -\frac{3}{2}$. Επιπλέον, το σύνολο A δεν έχει ελάχιστο ούτε μέγιστο στοιχείο.

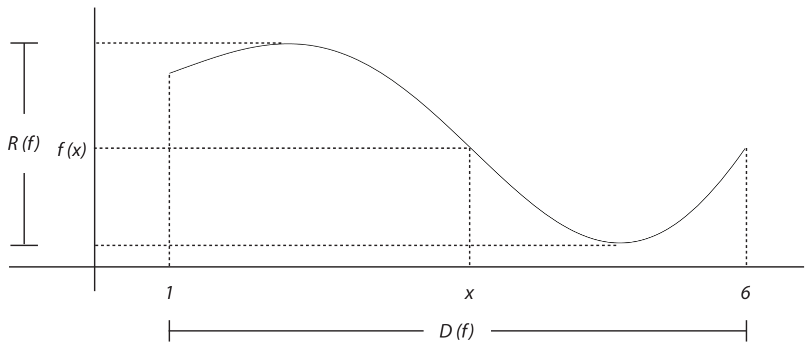
Κεφάλαιο 2

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Σημείωση 2.1. 1. Χωρίς αυτό να είναι αυστηρός μαθηματικός ορισμός της έννοιας, μπορούμε να πούμε ότι αν A και B είναι δυο σύνολα τότε μια ***συνάρτηση*** f από το A στο B είναι μια διαδικασία κατά την οποία κάθε στοιχείο του συνόλου A αντιστοιχίζεται σε ένα και μόνο στοιχείο του συνόλου B. Το σύνολο A καλείται ***πεδίο ορισμού*** της f και για τυχόν $x \in A$ το $f(x)$ καλείται ***εικόνα*** του x μέσω της συνάρτησης f. Σημειώνουμε ότι γενικά δεν απαιτείται κάθε στοιχείο του B να είναι εικόνα κάποιου στοιχείου του A. Αν όμως αυτό συμβαίνει, τότε το σύνολο B καλείται ***πεδίο τιμών*** της f και λέμε ότι η f είναι ορισμένη στο A και παίρνει τιμές στο B.

2. Γενικά το πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης f συμβολίζεται με $\mathcal{D}(f)$ και το πεδίο τιμών της με $\mathcal{R}(f)$.

3. Γεωμετρικά μια συνάρτηση παρίσταται με το ***γράφημα*** της. Για παράδειγμα, το γράφημα της συνάρτησης $f : [1, 6] \to \mathbb{R}$ με τύπο
$$f(x) = x \sin x + 10, \quad x \in [1, 6]$$
δίνεται από το επόμενο σχήμα



Ορισμός 2.2. Ας είναι $f : A \to B$ μια συνάρτηση.

1. Η f καλείται ***αμφιμονοσήμαντη*** αν για τυχόντα $x, y \in A$ ισχύει ότι
$$f(x) = f(y) \Rightarrow x = y.$$

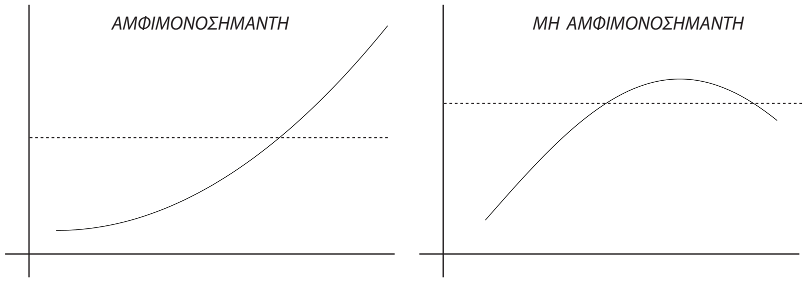
2. Η f καλείται ***επί*** αν ισχύει ότι $\mathcal{R}(f) = B$, δηλαδή
$$(\forall y \in B)\ (\exists x \in A) \ \text{ τέτοιο ώστε } \ f(x) = y.$$

3. Αν η συνάρτηση f είναι αμφιμονοσήμαντη, τότε ορίζεται η συνάρτηση $g : \mathcal{R}(f) \to A$ με τύπο $g(y) = x$, $\forall y \in \mathcal{R}(f)$, όπου το x είναι τέτοιο ώστε $f(x) = y$. Η g καλείται ***αντίστροφη*** της f και συμβολίζεται με f^{-1}.

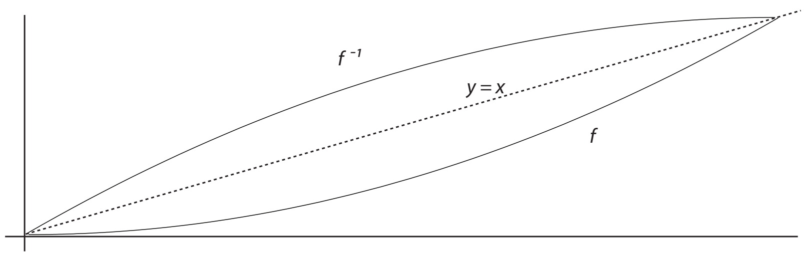
4. Ας είναι $C \subseteq A$. Η συνάρτηση $g : C \to B$ με τύπο
$$g(x) = f(x), \quad x \in C$$
καλείται ***περιορισμός*** της f στο σύνολο C και συμβολίζεται με $f|_C$.

Σημείωση 2.3. Προκειμένου για πραγματικές συναρτήσεις πραγματικής μεταβλητής ισχύουν τα ακόλουθα.

1. Μια συνάρτηση είναι αμφιμονοσήμαντη αν τυχούσα παράλληλη προς τον άξονα των x τέμνει το γράφημα της f σε ένα το πολύ σημείο.



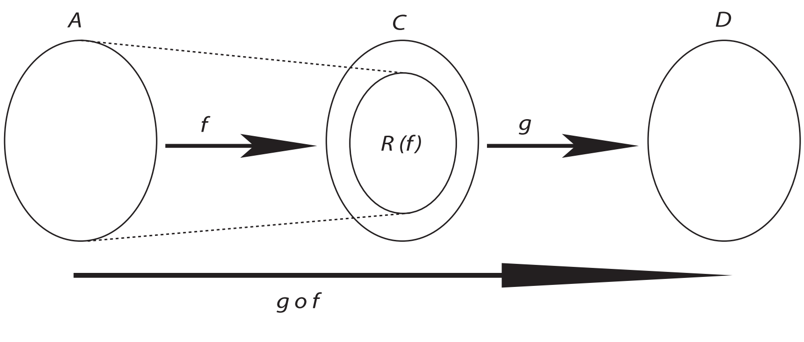
2. Οι αντίστροφες συναρτήσεις έχουν γραφικές παραστάσεις που είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$.



Ορισμός 2.4. Ας είναι $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση. Η f καλείται ***περιοδική*** αν υπάρχει πραγματικός αριθμός T τέτοιος ώστε $f(x) = f(x + T)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Ορισμός 2.5. Ας είναι $f : A \to B$ και $g : C \to D$ δύο συναρτήσεις, τέτοιες ώστε $\mathcal{R}(f) \subseteq C$. Η ***σύνθεση*** της f με την g, με αυτή τη σειρά, συμβολίζεται με $g \circ f$ και ορίζεται να είναι η συνάρτηση $g \circ f : A \to D$ με τύπο

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)), \quad x \in A.$$



Ορισμός 2.6. Ας είναι $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση.

1. Η f καλείται ***αύξουσα*** αν για τυχόντα $x, y \in A$ ισχύει ότι

$$x > y \Rightarrow f(x) \geq f(y).$$

2. Η f καλείται ***γνησίως αύξουσα*** αν για τυχόντα $x, y \in A$ ισχύει ότι
$$x > y \Rightarrow f(x) > f(y).$$

3. Η f καλείται ***φθίνουσα*** αν για τυχόντα $x, y \in A$ ισχύει ότι
$$x > y \Rightarrow f(x) \leq f(y).$$

4. Η f καλείται ***γνησίως φθίνουσα*** αν για τυχόντα $x, y \in A$ ισχύει ότι
$$x > y \Rightarrow f(x) < f(y).$$

5. Η f καλείται ***μονότονη*** αν είναι αύξουσα ή φθίνουσα.

6. Η f καλείται ***γνησίως μονότονη*** αν είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα.

Ορισμός 2.7. Μια πραγματική συνάρτηση f με πεδίο ορισμού $\mathcal{D}(f)$ καλείται ***φραγμένη*** στο $A \subseteq \mathcal{D}(f)$, αν υπάρχει αριθμός M τέτοιος ώστε
$$|f(x)| \leq M, \ \forall x \in A.$$
Η f καλείται ***άνω φραγμένη*** στο A αν $f(x) \leq M$, $\forall x \in A$, και ***κάτω φραγμένη*** στο A αν $f(x) \geq M$, $\forall x \in A$.

Θεώρημα 2.8. *Έστω ότι $f, g : A \to \mathbb{R}$ είναι δυο φραγμένες συναρτήσεις. Αν θέσουμε*
$$\sup f = \sup\{f(x) : \ x \in A\}$$
και
$$\inf f = \inf\{f(x) : \ x \in A\},$$
και τα αντίστοιχα για τη συνάρτηση g, τότε ισχύουν τα ακόλουθα

1. $\sup\{kf\} = \begin{cases} k \sup f, & k > 0 \\ k \inf f, & k < 0 \end{cases}$.

2. $\inf\{kf\} = \begin{cases} k \inf f, & k > 0 \\ k \sup f, & k < 0 \end{cases}$.

3. $\sup\{f + g\} \leq \sup f + \sup g$.

4. $\inf\{f + g\} \geq \inf f + \inf g$.

Ορισμός 2.9. Έστω $f : D \to \mathbb{R}$, όπου $D \subseteq \mathbb{R}$.

1. Η f έχει τοπικό μέγιστο στο $a \in D$ αν και μόνο αν υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $f(a) \geq f(x)$ για κάθε $x \in (a - \delta, a + \delta) \cap D$. Τότε το $f(a)$ καλείται ***τοπικό μέγιστο*** της f στο σημείο a.

2. Η f έχει τοπικό ελάχιστο στο $a \in D$ αν και μόνο αν υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $f(a) \leq f(x)$ για κάθε $x \in (a - \delta, a + \delta) \cap D$. Τότε το $f(a)$ καλείται ***τοπικό ελάχιστο*** της f στο σημείο a.

3. Το τοπικό μέγιστο και το τοπικό ελάχιστο της f καλούνται από κοινού ***τοπικά ακρότατα*** της f.

4. Αν υπάρχει $a \in D$ τέτοιο ώστε $f(a) \geq f(x)$ για κάθε $x \in D$ τότε το $f(a)$ καλείται ***ολικό μέγιστο*** της f στο D ή, αλλιώς, ***μέγιστο*** της f στο D.

5. Αν υπάρχει $a \in D$ τέτοιο ώστε $f(a) \leq f(x)$ για κάθε $x \in D$ τότε το $f(a)$ καλείται ***ολικό ελάχιστο*** της f στο D ή, αλλιώς, ***ελάχιστο*** της f στο D.

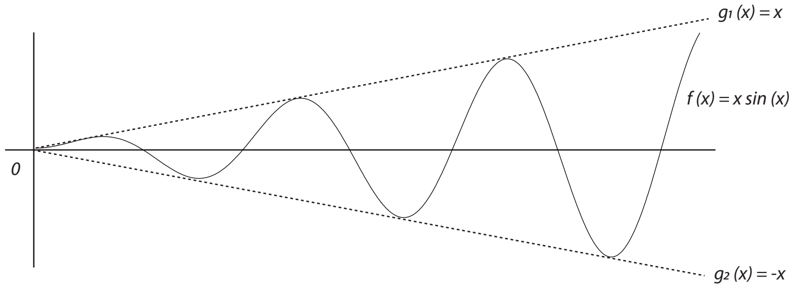
6. Το ολικό μέγιστο και το ολικό ελάχιστο της f καλούνται από κοινού ***ολικά ακρότατα*** της f.

Σημείωση 2.10.

1. Το ολικό μέγιστο της f, αν αυτό υπάρχει, είναι ταυτόχρονα και τοπικό μέγιστο της f. Ομοίως, το ολικό ελάχιστο της f, αν αυτό υπάρχει, είναι ταυτόχρονα και τοπικό ελάχιστο της f.

2. Το ολικό μέγιστο της f, αν αυτό υπάρχει, είναι μοναδικό. Μπορεί, όμως, να λαμβάνεται σε περισσότερα από ένα σημεία του πεδίου ορισμού της f. Ομοίως για το ολικό ελάχιστο.

3. Μια συνάρτηση μπορεί να έχει τοπικά μέγιστα και τοπικά ελάχιστα χωρίς να έχει ολικό μέγιστο και ολικό ελάχιστο. Για παράδειγμα, η $f(x) = x \sin x$, $x \in [0, +\infty)$, όπως φαίνεται από το γράφημα της, δεν έχει ολικό μέγιστο ούτε και ολικό ελάχιστο, αλλά σε κάθε διάστημα $[2\nu\pi, 2(\nu + 1)\pi]$, $\nu \in \mathbb{N}$, έχει τοπικό μέγιστο το $f(2\nu\pi + \frac{\pi}{2})$ και τοπικό ελάχιστο το $f(2\nu\pi + \frac{3\pi}{2})$.



Ορισμός 2.11. 1. Θεωρούμε το διάστημα (x_1, x_2). Τότε το τυχαίο $x \in (x_1, x_2)$ προφανώς γράφεται στη μορφή

$$x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2,$$

όπου

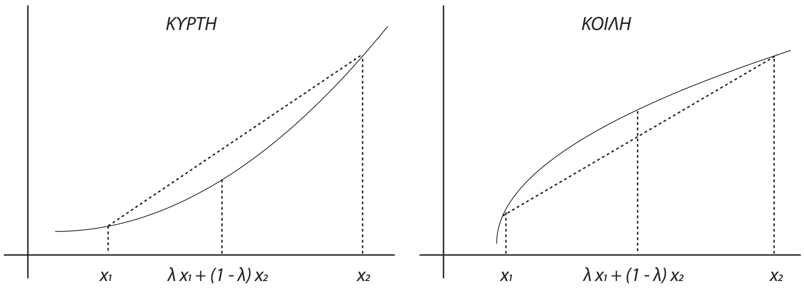
$$\lambda = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}.$$

Σε αυτήν την περίπτωση λέμε ότι το x παριστάνεται με έναν ***κυρτό συνδυασμό*** των άκρων x_1 και x_2. Παρατηρούμε επίσης ότι $0 < \lambda < 1$.

2. Έστω $I \subseteq \mathbb{R}$ ένα διάστημα. Μια συνάρτηση $f : I \to \mathbb{R}$ καλείται ***κυρτή*** στο I, αν για κάθε λ με $0 \leq \lambda \leq 1$ και οποιαδήποτε x_1, x_2 στο I ισχύει

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2).$$

3. Μια συνάρτηση f καλείται ***κοίλη*** αν η $-f$ είναι κυρτή.



Σημείωση 2.12. Αν η $f : I \to \mathbb{R}$ είναι κυρτή και $x_1, x_2 \in I$, τότε η χορδή που συνδέει τα σημεία $(x_1, f(x_1))$ και $(x_2, f(x_2))$ του γραφήματος της f βρίσκεται πάνω από το γράφημα της f, ενώ αν η f είναι κοίλη τότε αυτή η χορδή βρίσκεται κάτω από το γράφημα της f.

Παράδειγμα 2.13. Η συνάρτηση $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$, είναι κυρτή. Πράγματι, για τυχόντα $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ και $\lambda \in [0,1]$ έχουμε

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) = \lambda^2 x_1^2 + 2\lambda(1-\lambda)x_1x_2 + (1-\lambda)^2 x_2^2.$$

Όμως

$$(x_1 - x_2)^2 \geq 0 \Rightarrow x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 \geq 0 \Rightarrow 2x_1x_2 \leq x_1^2 + x_2^2$$

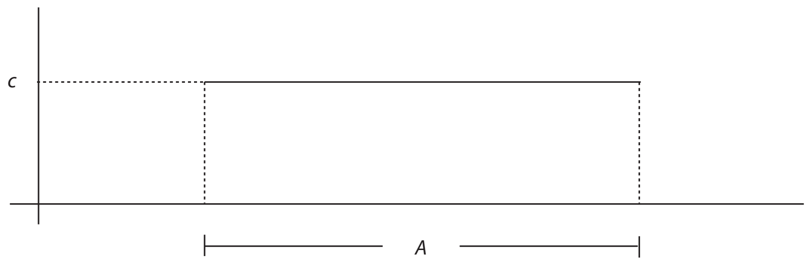
οπότε

$$\begin{aligned}
\lambda^2 x_1^2 + 2\lambda(1-\lambda)x_1x_2 + (1-\lambda)^2 x_2^2 &\leq \lambda^2 x_1^2 + \lambda(1-\lambda)(x_1^2 + x_2^2) + (1-\lambda)^2 x_2^2 \\
&= \lambda^2 x_1^2 + \lambda x_1^2 - \lambda^2 x_1^2 + \lambda x_2^2 - \lambda^2 x_2^2 + x_2^2 - 2\lambda x_2^2 + \lambda^2 x_2^2 \\
&= \lambda x_1^2 + (1-\lambda)x_2^2 \\
&= \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2),
\end{aligned}$$

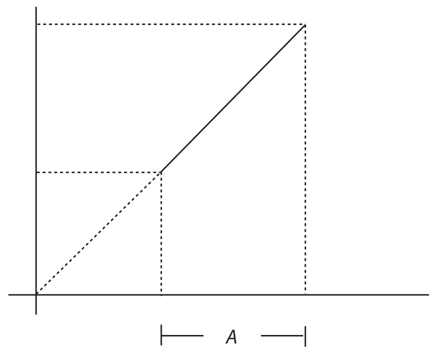
και τελικά έχουμε

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2).$$

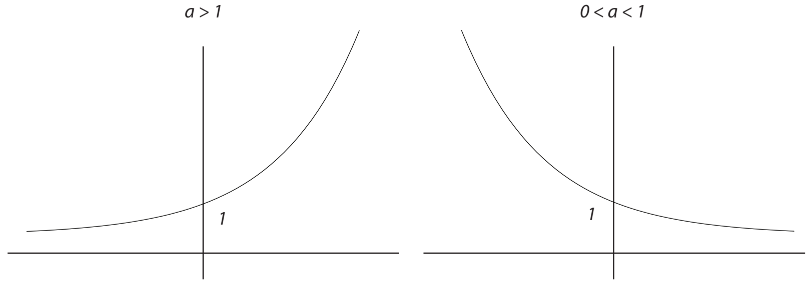
Ορισμός 2.14. 1. Ας είναι c τυχαίος πραγματικός αριθμός και A τυχαίο υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Η συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = c$, $\forall x \in A$, καλείται ***σταθερή***.



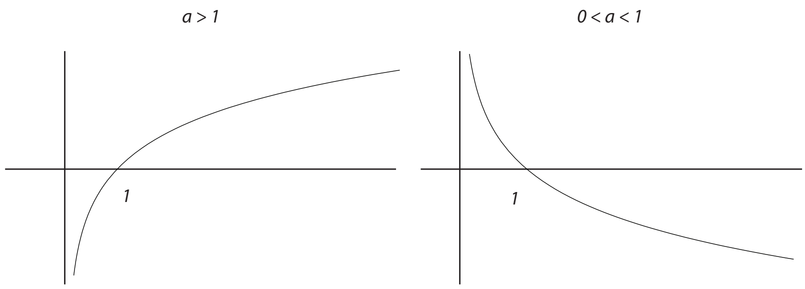
2. Ας είναι A τυχαίο υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Η συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x$, $\forall x \in A$, καλείται ***ταυτοτική***.



Ορισμός 2.15. 1. Αν $a \in \mathbb{R}$ με $a > 0$ και $a \neq 1$, τότε η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ με τύπο $f(x) = a^x$ καλείται ***εκθετική*** με βάση το a.



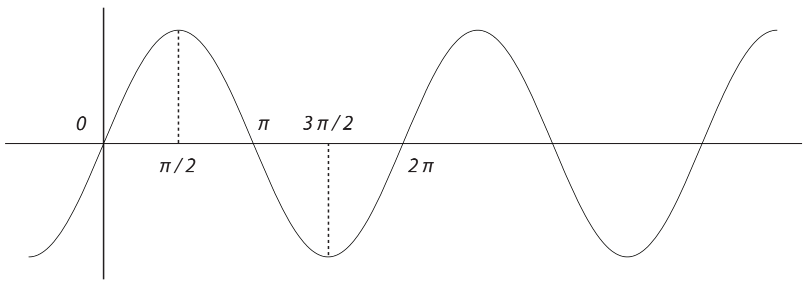
2. Η συνάρτηση $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \log_a x$ καλείται ***λογαριθμική*** με βάση το a και είναι η αντίστροφη της εκθετικής με την ίδια βάση.



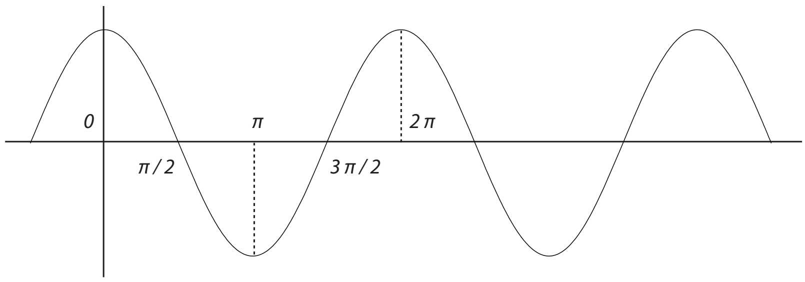
Σημείωση 2.16. 1. Ο συμβολισμός $\log$ αντιστοιχεί στο λογάριθμο με βάση το e.

2. Αν $a \in \mathbb{R}$ με $a > 0$ και $a \neq 1$, τότε για τυχόν $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι $a^x = e^{x \log a}$.

Ορισμός 2.17 (*Τριγωνομετρικές Συναρτήσεις*). 1. Η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ με τύπο $f(x) = \sin x$, $\forall x \in \mathbb{R}$, καλείται ***ημίτονο***. Η γραφική της παράσταση δίνεται από το επόμενο σχήμα.



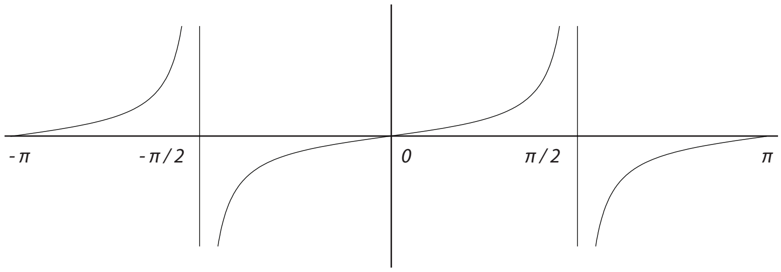
2. Η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ με τύπο $f(x) = \cos x$, $\forall x \in \mathbb{R}$, καλείται ***συνημίτονο***. Η γραφική της παράσταση δίνεται από το επόμενο σχήμα.



3. Η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \backslash \{x : \ x = k\pi + \frac{\pi}{2}, \ k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

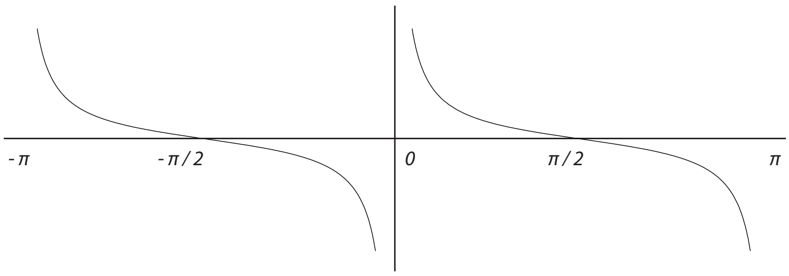
καλείται ***εφαπτομένη***. Η γραφική της παράσταση δίνεται από το επόμενο σχήμα.



4. Η συνάρτηση $f : \mathbb{R}\backslash\{x :\ x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

καλείται ***συνεφαπτομένη***. Η γραφική της παράσταση δίνεται από το επόμενο σχήμα.



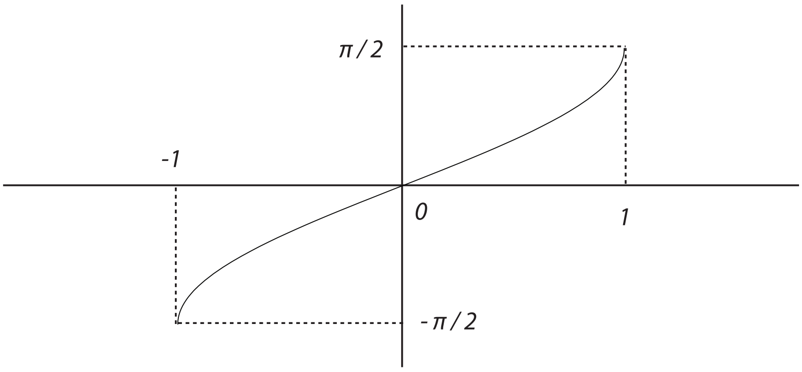
Ορισμός 2.18 (***Αντίστροφες Τριγωνομετρικές Συναρτήσεις***). 1. Η συνάρτηση $f(x) = \sin x,\ x \in \mathbb{R}$, δεν είναι αμφιμονοσήμαντη στο $\mathbb{R}$ άρα δεν υπάρχει η αντίστροφη της στο $\mathbb{R}$. Αν όμως περιοριστούμε σε διαστήματα της μορφής

$$\Delta_k = \left[k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}\right], \quad k \in \mathbb{Z},$$

τότε η f είναι αμφιμονοσήμαντη στο Δ_k. Σε αυτό το διάστημα υπάρχει η αντίστροφη συνάρτηση, η οποία ονομάζεται ***τόξο ημιτόνου*** και συμβολίζεται με $\mathrm{arc_k sin}$. Ειδικά για $k = 0$, δηλαδή για το διάστημα $\Delta_0 = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, έχουμε το ***βασικό κλάδο*** των αντιστρόφων συναρτήσεων της $\sin$ που συμβολίζεται με Arcsin, για τον οποίο ισχύει ότι

$$\mathrm{Arcsin} : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

Η γραφική παράσταση της Arcsin δίνεται από το επόμενο σχήμα



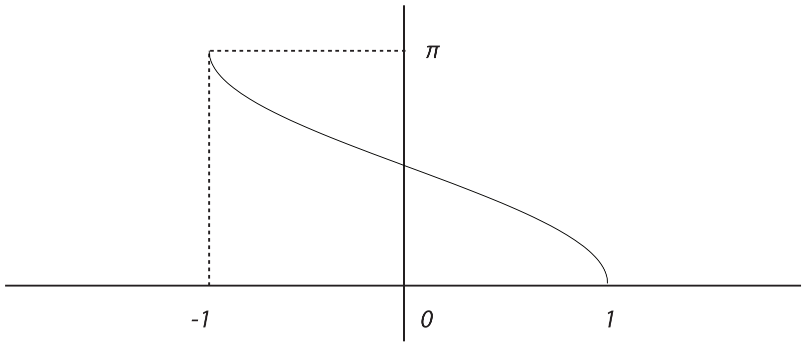
2. Η συνάρτηση $f(x) = \cos x$, $x \in \mathbb{R}$, δεν είναι αμφιμονοσήμαντη στο $\mathbb{R}$ άρα δεν υπάρχει η αντίστροφη της στο $\mathbb{R}$. Αν όμως περιοριστούμε σε διαστήματα της μορφής

$$\Delta_k = [k\pi, k\pi + \pi]\,, \quad k \in \mathbb{Z},$$

τότε η f είναι αμφιμονοσήμαντη στο Δ_k. Σε αυτό το διάστημα υπάρχει η αντίστροφη συνάρτηση, η οποία ονομάζεται ***τόξο συνημιτόνου*** και συμβολίζεται με $\mathrm{arc_k cos}$. Ειδικά για $k = 0$, δηλαδή για το διάστημα $\Delta_0 = [0, \pi]$, έχουμε το ***βασικό κλάδο*** των αντιστρόφων συναρτήσεων της $\cos$ που συμβολίζεται με Arccos, για τον οποίο ισχύει ότι

$$\mathrm{Arccos} : [-1, 1] \to [0, \pi].$$

Η γραφική παράσταση της Arccos δίνεται από το επόμενο σχήμα



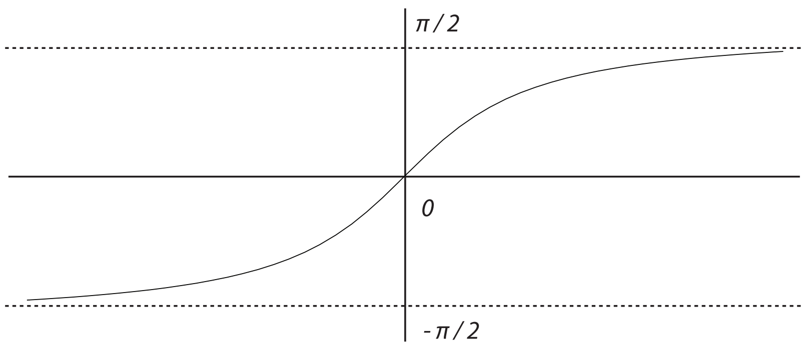
3. Η συνάρτηση $f(x) = \tan x$, $x \in \mathbb{R}$, δεν είναι αμφιμονοσήμαντη στο $\mathbb{R}$ άρα δεν υπάρχει η αντίστροφη της στο $\mathbb{R}$. Αν όμως περιοριστούμε σε διαστήματα της μορφής

$$\Delta_k = \left(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}\right), \quad k \in \mathbb{Z},$$

τότε η f είναι αμφιμονοσήμαντη στο Δ_k. Σε αυτό το διάστημα υπάρχει η αντίστροφη συνάρτηση, η οποία ονομάζεται ***τόξο εφαπτομένης*** και συμβολίζεται με $\mathrm{arc_k tan}$. Ειδικά για $k = 0$, δηλαδή για το διάστημα $\Delta_0 = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, έχουμε το ***βασικό κλάδο*** των αντιστρόφων συναρτήσεων της $\tan$ που συμβολίζεται με Arctan, για τον οποίο ισχύει ότι

$$\mathrm{Arctan} : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

Η γραφική παράσταση της Arctan δίνεται από το επόμενο σχήμα



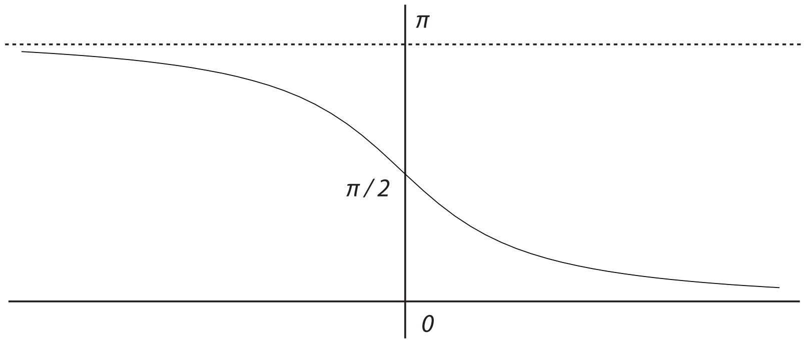
4. Η συνάρτηση $f(x) = \cot x$, $x \in \mathbb{R}$, δεν είναι αμφιμονοσήμαντη στο $\mathbb{R}$ άρα δεν υπάρχει η αντίστροφη της στο $\mathbb{R}$. Αν όμως περιοριστούμε σε διαστήματα της μορφής

$$\Delta_k = (k\pi, k\pi + \pi)\,, \quad k \in \mathbb{Z},$$

τότε η f είναι αμφιμονοσήμαντη στο Δ_k. Σε αυτό το διάστημα υπάρχει η αντίστροφη συνάρτηση, η οποία ονομάζεται ***τόξο συνεφαπτομένης*** και συμβολίζεται με $\mathrm{arc_k cot}$. Ειδικά για $k = 0$, δηλαδή για το διάστημα $\Delta_0 = (0, \pi)$, έχουμε το ***βασικό κλάδο*** των αντιστρόφων συναρτήσεων της $\cot$ που συμβολίζεται με Arccot, για τον οποίο ισχύει ότι

$$\mathrm{Arccot} : \mathbb{R} \to (0, \pi).$$

Η γραφική παράσταση της Arccot δίνεται από το επόμενο σχήμα



Ορισμός 2.19 (***Υπερβολικές Συναρτήσεις***).

1. ***Υπερβολικό Ημίτονο***: $\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$, $x \in \mathbb{R}$.
2. ***Υπερβολικό Συνημίτονο***: $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$, $x \in \mathbb{R}$.
3. ***Υπερβολική Εφαπτομένη***: $\tanh x = \dfrac{\sinh}{\cosh} = \dfrac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$, $x \in \mathbb{R}$.
4. ***Υπερβολική Συνεφαπτομένη***: $\coth x = \dfrac{\cosh}{\sinh} = \dfrac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1}$, $x \in \mathbb{R}$.

Ορισμός 2.20 (***Αντίστροφες Υπερβολικές Συναρτήσεις***). Οι συναρτήσεις που ακολουθούν προκύπτουν ως αντίστροφες των υπερβολικών συναρτήσεων.

1. ***Τόξο Υπερβολικού Ημιτόνου***: $\mathrm{Arcsinh}x = \log\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$, $x \in \mathbb{R}$.
2. ***Τόξο Υπερβολικού Συνημιτόνου***: Η συνάρτηση υπερβολικό συνημίτονο δεν είναι αμφιμονοσήμαντη στο $\mathbb{R}$, συνεπώς δεν υπάρχει η αντίστροφη της σε αυτό το σύνολο. Αν όμως περιοριστούμε στο διάστημα $(-\infty, 0]$ ή στο $[0, +\infty)$ τότε σε καθένα από αυτά η $\cosh$ είναι αμφιμονοσήμαντη, οπότε υπάρχει η αντίστροφη της. Η αντίστροφη που αντιστοιχεί στο διάστημα $(-\infty, 0]$ συμβολίζεται με $\mathrm{Arc_{-}cosh}$ και δίνεται από τον τύπο
   $$\mathrm{Arc_{-}cosh}x = \log\left(x - \sqrt{x^2 - 1}\right),\ x \in [1, +\infty),$$
   ενώ η αντίστροφη που αντιστοιχεί στο διάστημα $[0, +\infty)$ συμβολίζεται με $\mathrm{Arc_{+}cosh}$ και δίνεται από τον τύπο
   $$\mathrm{Arc_{+}cosh}x = \log\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right),\ x \in [1, +\infty).$$
3. ***Τόξο Υπερβολικής Εφαπτομένης***: $\mathrm{Arctanh}x = \dfrac{1}{2}\log\dfrac{1+x}{1-x}$, $x \in (-1, 1)$.
4. ***Τόξο Υπερβολικής Συνεφαπτομένης***: $\mathrm{Arccoth}x = \dfrac{1}{2}\log\dfrac{x+1}{x-1}$, $x \in \mathbb{R}\backslash[-1, 1]$.

Κεφάλαιο 3

ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ

Ορισμός 3.1. Μία συνάρτηση $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ καλείται ***ακολουθία*** πραγματικών αριθμών.

Σημείωση 3.2.

1. Η ακολουθία αντιστοιχεί σε κάθε φυσικό αριθμό ένα μονοσήμαντα ορισμένο πραγματικό αριθμό.
2. Η τιμή της ακολουθίας στο $\nu \in \mathbb{N}$ συμβολίζεται με a_ν αντί του $a(\nu)$ που χρησιμοποιείται στις συναρτήσεις.
3. Η ακολουθία συμβολίζεται με $(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ ή a_ν, $\nu \in \mathbb{N}$.
4. Ο αριθμός a_ν λέγεται ***ν-οστός όρος της ακολουθίας***.

Σημείωση 3.3. Μία ακολουθία μπορεί να οριστεί με δύο τρόπους:

1. Αναλυτικός τρόπος, π.χ. $a_\nu = \frac{1}{\nu}$.
2. Αναγωγικός τρόπος, π.χ. $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, $a_{\nu+1} = \frac{1}{2}(a_\nu + a_{\nu-1})$, $\nu = 2, 3, \ldots$

Ορισμός 3.4. Το ***πεδίο τιμών*** ή ***σύνολο τιμών*** μίας ακολουθίας συμβολίζεται με $a(\mathbb{N})$ και ορίζεται ως

$$a(\mathbb{N}) = \{x \in \mathbb{R} : (\exists \nu \in \mathbb{N}) \text{ τέτοιο ώστε } a_\nu = x\}.$$

Σημείωση 3.5. Το σύνολο τιμών μίας ακολουθίας και οι όροι μίας ακολουθίας είναι δύο διαφορετικές έννοιες. Έτσι, για την ακολουθία $a_\nu = k$, $k =$ σταθερά, $\nu = 1, 2, 3, \ldots$, η οποία ονομάζεται ***σταθερή***, έχουμε ότι το σύνολο τιμών της είναι το μονοσύνολο $\{k\}$, ενώ οι όροι της είναι οι

$$a_1 = k,\ a_2 = k,\ a_3 = k, \ldots$$

Ομοίως, για την ακολουθία $a_1 = 2$, $a_2 = 2$, $a_\nu = \frac{1}{\nu}$, $\nu = 3, 4, \ldots$, έχουμε ότι το σύνολο τιμών της είναι το

$$\left\{2, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\right\},$$

ενώ οι όροι της είναι οι

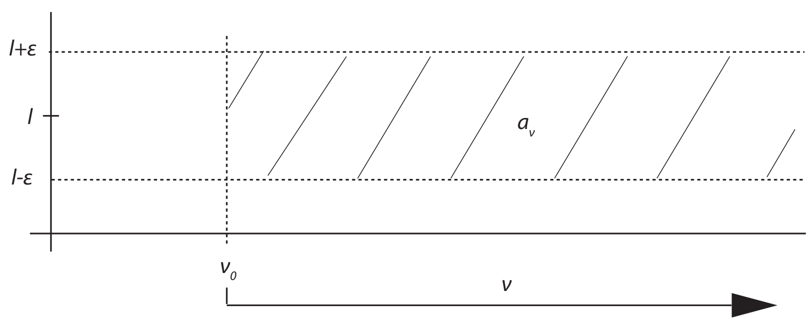
$$a_1 = 2,\ a_2 = 2,\ a_3 = \frac{1}{3},\ a_4 = \frac{1}{4}, \ldots$$

Ορισμός 3.6. Η ακολουθία a_ν, $\nu \in \mathbb{N}$, λέμε ότι ***συγκλίνει*** στο l ή ότι ***έχει όριο*** το l και γράφουμε

$$\lim a_\nu = l \in \mathbb{R}$$

αν ισχύει ότι

$$(\forall \epsilon > 0)\ (\exists \nu_0 \in \mathbb{N})\ (\forall \nu \in \mathbb{N})\ \nu \geq \nu_0 \Rightarrow |a_\nu - l| \leq \epsilon.$$



Σημείωση 3.7. 1. Το ν_0 εξαρτάται από το ϵ και είναι το ζητούμενο που πρέπει να προσδιοριστεί για να δείξουμε τη σύγκλιση μιας ακολουθίας.

2. Ο Ορισμός 3.6 αρκεί να αποδειχθεί για όλα τα ¨μικρά¨ $\epsilon > 0$, δηλαδή για $\epsilon > 0$ οσοδήποτε κοντά στο μηδέν.

3. Η ανισότητα $|a_\nu - l| \leq \epsilon$ μπορεί να αντικατασταθεί από την $|a_\nu - l| \leq k\epsilon$, όπου k είναι μια θετική σταθερά ανεξάρτητη του ϵ.

4. Αν μια ακολουθία συγκλίνει στο μηδέν, τότε αυτή καλείται ***μηδενική ακολουθία***.

5. Το όριο μιας ακολουθίας έχει νόημα μόνο όταν το ν τείνει στο $+\infty$.

Παράδειγμα 3.8. Η ακολουθία $a_\nu = \frac{1}{\nu}$, $\nu \in \mathbb{N}$, είναι μηδενική. Πράγματι, αρκεί να δείξουμε ότι

$$(\forall \epsilon > 0)\ (\exists \nu_0 \in \mathbb{N})\ (\forall \nu \in \mathbb{N})\ \nu \geq \nu_0 \Rightarrow \left|\frac{1}{\nu}\right| \leq \epsilon.$$

Έχουμε

$$\left|\frac{1}{\nu}\right| \leq \epsilon \Leftrightarrow \frac{1}{\nu} \leq \epsilon \Leftrightarrow \nu \geq \frac{1}{\epsilon},$$

συνεπώς για

$$\nu_0 = \left[\frac{1}{\epsilon}\right] + 1$$

έχουμε το ζητούμενο.

Παράδειγμα 3.9. Η ακολουθία

$$a_\nu = \frac{5\nu - 4}{2 - 3\nu}, \quad \nu \in \mathbb{N},$$

έχει όριο το $-\frac{5}{3}$. Πράγματι, έχουμε

$$\lim \frac{5\nu - 4}{2 - 3\nu} = -\frac{5}{3} \Leftrightarrow \left[(\forall \epsilon > 0)(\exists \nu_0 \in \mathbb{N})(\forall \nu \in \mathbb{N})\nu \geq \nu_0 \Rightarrow \left|\frac{5\nu - 4}{2 - 3\nu} + \frac{5}{3}\right| < \epsilon\right],$$

οπότε αφού

$$\left|\frac{5\nu - 4}{2 - 3\nu} + \frac{5}{3}\right| = \frac{2}{3(3\nu - 2)}$$

πρέπει να ισχύει ότι

$$\frac{2}{3(3\nu - 2)} < \epsilon$$

ή ισοδύναμα

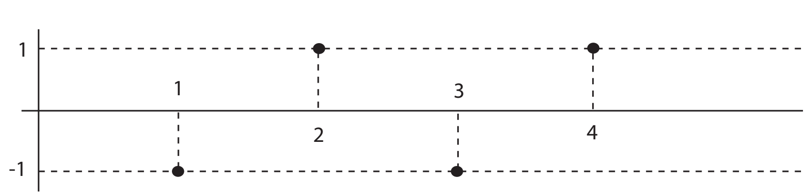
$$\nu > \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3\epsilon} + 2\right).$$

Επιλέγουμε λοιπόν

$$\nu_0 = \left[\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3\epsilon} + 2\right)\right] + 1$$

και έχουμε το ζητούμενο.

Παράδειγμα 3.10. Η ακολουθία $a_\nu = (-1)^\nu$, $\nu \in \mathbb{N}$, δε συγκλίνει.



Πράγματι, έστω ότι συγκλίνει στον πραγματικό αριθμό l. Θα καταλήξουμε σε άτοπο. Έχουμε

$$\lim(-1)^\nu = l \Leftrightarrow [(\forall \epsilon > 0)(\exists \nu_0 \in \mathbb{N})(\forall \nu \in \mathbb{N})\nu > \nu_0 \Rightarrow |(-1)^\nu - l| < \epsilon].$$

Αφού η παραπάνω σχέση ισχύει για κάθε $\epsilon > 0$, ισχύει και για $\epsilon = \frac{1}{4}$, οπότε έχουμε

$$|(-1)^\nu - l| < \frac{1}{4}.$$

1. Αν $\nu = 2k$, $k \in \mathbb{N}$, τότε $(-1)^\nu = (-1)^{2k} = 1$, οπότε
$$|(-1)^\nu - l| < \frac{1}{4} \Leftrightarrow |1 - l| < \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{3}{4} < l < \frac{5}{4}.$$
2. Αν $\nu = 2k+1$, $k \in \mathbb{N}$, τότε $(-1)^\nu = (-1)^{2k+1} = -1$, οπότε
$$|(-1)^\nu - l| < \frac{1}{4} \Leftrightarrow |-1 - l| < \frac{1}{4} \Leftrightarrow -\frac{5}{4} < l < -\frac{3}{4}.$$

Άρα το l πρέπει να ικανοποιεί ταυτόχρονα τις σχέσεις $\frac{3}{4} < l < \frac{5}{4}$ και $-\frac{5}{4} < l < -\frac{3}{4}$, το οποίο είναι άτοπο. Συνεπώς, η ακολουθία $(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ δεν έχει όριο.

Θεώρημα 3.11. *Αν μια ακολουθία έχει όριο, τότε αυτό είναι μοναδικό.*

Απόδειξη. Έστω ότι $\lim a_\nu = l$ και ταυτόχρονα $\lim a_\nu = m$, με $l \neq m$. Τότε έχουμε

$$\lim a_\nu = l \Leftrightarrow [(\forall \epsilon > 0)(\exists \nu_1 \in \mathbb{N})(\forall \nu \in \mathbb{N})\nu > \nu_1 \Rightarrow |a_\nu - l| < \epsilon]$$

καθώς και

$$\lim a_\nu = m \Leftrightarrow [(\forall \epsilon > 0)(\exists \nu_2 \in \mathbb{N})(\forall \nu \in \mathbb{N})\nu > \nu_2 \Rightarrow |a_\nu - m| < \epsilon].$$

Συνεπώς για $\nu_0 = \max\{\nu_1, \nu_2\}$ και $\epsilon = \frac{1}{4}|l - m| > 0$, έχουμε

$$|l - m| = |(l - a_\nu) + (a_\nu - m)| \leq |l - a_\nu| + |a_\nu - m| < 2\epsilon = \frac{1}{2}|l - m|,$$

δηλαδή $|l - m| < \frac{1}{2}|l - m|$ που είναι άτοπο. □

Ορισμός 3.12. Μια ακολουθία $(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ καλείται ***φραγμένη*** αν το πεδίο τιμών της είναι φραγμένο, δηλαδή αν $(\exists M \in \mathbb{R})$ τέτοιο ώστε $|a_\nu| \leq M$, $\forall \nu \in \mathbb{N}$.

Θεώρημα 3.13. *Κάθε συγκλίνουσα ακολουθία είναι φραγμένη.*

Απόδειξη. Έστω ότι $\lim a_\nu = l$. Τότε έχουμε

$$(\forall \epsilon > 0)\ (\exists \nu_0 \in \mathbb{N})\ (\forall \nu \in \mathbb{N})\ \nu > \nu_0 \Rightarrow |a_\nu - l| < \epsilon$$

οπότε για $\epsilon = 1$ ισχύει ότι

$$(\exists \nu_0 \in \mathbb{N})\ (\forall \nu \in \mathbb{N})\ \nu > \nu_0 \Rightarrow |a_\nu - l| < 1.$$

Συνεπώς για $\nu > \nu_0$ έχουμε

$$|a_\nu| = |(a_\nu - l) + l| \leq |a_\nu - l| + |l| < 1 + |l|.$$

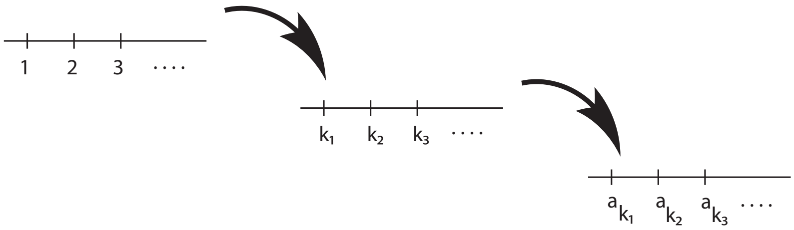
Θέτουμε $M = \max\{|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{\nu_0}|, 1 + |l|\}$. Τότε, σύμφωνα με τα παραπάνω, έχουμε $|a_\nu| \leq M$, για όλα τα $\nu \in \mathbb{N}$, δηλαδή η $(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ είναι φραγμένη. □

Σημείωση 3.14.

1. Το αντίστροφο του Θεωρήματος 3.13 δεν ισχύει γενικά, π.χ. η ακολουθία $a_\nu = (-1)^\nu$, $\nu \in \mathbb{N}$, ενώ είναι φραγμένη (αφού $|(-1)^\nu| \leq 1, \forall \nu \in \mathbb{N}$) δε συγκλίνει.
2. Το Θεώρημα 3.13 μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως αρνητικό κριτήριο, δηλαδή αν μια ακολουθία δεν είναι φραγμένη τότε σίγουρα δε συγκλίνει.

Παράδειγμα 3.15. Οι ακολουθίες $a_\nu = \sqrt{\nu}$, $\nu \in \mathbb{N}$, και $b_\nu = (-1)^\nu \nu$, $\nu \in \mathbb{N}$, δεν συγκλίνουν. Πράγματι, για την ακολουθία a_ν, $\nu \in \mathbb{N}$, παρατηρούμε ότι δεν είναι φραγμένη, αφού αν ήταν θα έπρεπε να υπάρχει $M \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $|a_\nu| = |\sqrt{\nu}| \leq M$, $\forall \nu \in \mathbb{N}$, ή ισοδύναμα $\sqrt{\nu} \leq M$, $\forall \nu \in \mathbb{N}$, που είναι άτοπο μιας και δεν ισχύει π.χ. για $\nu = [M^2] + 1$. Άρα, αφού δεν είναι φραγμένη, δεν είναι ούτε συγκλίνουσα. Ομοίως, η ακολουθία b_ν, $\nu \in \mathbb{N}$, δεν είναι φραγμένη, αφού αν ήταν θα έπρεπε να υπάρχει $M \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $|b_\nu| = |(-1)^\nu \nu| \leq M$, $\forall \nu \in \mathbb{N}$, ή ισοδύναμα $\nu \leq M$, $\forall \nu \in \mathbb{N}$, που είναι άτοπο μιας και δεν ισχύει π.χ. για $\nu = [M] + 1$. Άρα, αφού δεν είναι φραγμένη, δεν είναι ούτε συγκλίνουσα.

Ορισμός 3.16. Έστω $(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία πραγματικών αριθμών και $(k_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$, μια ακολουθία φυσικών αριθμών τέτοια ώστε $k_1 < k_2 < \ldots < k_\nu < \ldots$. Τότε η ακολουθία $b_\nu = a_{k_\nu}$, $\nu \in \mathbb{N}$, καλείται ***υπακολουθία*** της $(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$.



Σημείωση 3.17.

1. Αν από μια ακολουθία παραλείψουμε μερικούς όρους κατά τρόπο ώστε αυτοί που θα απομείνουν να είναι άπειροι στο πλήθος, τότε οι όροι που απομένουν αποτελούν μια υπακολουθία της αρχικής.
2. Για την $(k_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ ισχύει ότι $k_\nu \geq \nu$, $\forall \nu \in \mathbb{N}$.

Παράδειγμα 3.18. Η ακολουθία $a_\nu = (-1)^\nu$, $\nu \in \mathbb{N}$, έχει ως υπακολουθίες, μεταξύ άλλων, τις

$$a_{2\nu} = (-1)^{2\nu} = 1, \nu \in \mathbb{N}$$

και

$$a_{2\nu-1} = (-1)^{2\nu-1} = -1, \nu \in \mathbb{N}.$$

Επίσης, η ακολουθία

$$b_\nu = \cos\frac{\nu\pi}{2},\ \nu \in \mathbb{N},$$

έχει ως υπακολουθίες, μεταξύ άλλων, τις

$$b_{4\nu} = \cos\frac{4\nu\pi}{2} = 1,\ \nu \in \mathbb{N},$$

$$b_{4\nu-1} = \cos\frac{(4\nu-1)\pi}{2} = 0,\ \nu \in \mathbb{N},$$

$$b_{4\nu-2} = \cos\frac{(4\nu-2)\pi}{2} = -1,\ \nu \in \mathbb{N}$$

και

$$b_{4\nu-3} = \cos\frac{(4\nu-3)\pi}{2} = 0, \nu \in \mathbb{N}.$$

Θεώρημα 3.19. *Αν $\lim a_\nu = l$ και $(a_{k_\nu})_{\nu\in\mathbb{N}}$ είναι μια υπακολουθία της $(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$, τότε $\lim a_{k_\nu} = l$.*

Απόδειξη. Έχουμε

$$\lim a_\nu = l \Leftrightarrow [(\forall\epsilon > 0)(\exists\nu_0 \in \mathbb{N})(\forall\nu \in \mathbb{N})\nu > \nu_0 \Rightarrow |a_\nu - l| < \epsilon].$$

Όμως ισχύει ότι $k_\nu \geq \nu$, $\forall\nu \in \mathbb{N}$, οπότε έχουμε

$$\nu > \nu_0 \Rightarrow k_\nu \geq \nu > \nu_0,$$

συνεπώς

$$(\forall\epsilon > 0)(\exists\nu_0 \in \mathbb{N})(\forall\nu \in \mathbb{N})\nu > \nu_0 \Rightarrow |a_{k_\nu} - l| < \epsilon,$$

δηλαδή $\lim a_{k_\nu} = l$. □

Σημείωση 3.20.

1. Αν $\lim a_{k_\nu} = l$ τότε δε συνεπάγεται αναγκαστικά ότι και $\lim a_\nu = l$. Πράγματι, για την ακολουθία $a_\nu = (-1)^\nu$, $\nu \in \mathbb{N}$, και την υπακολουθία της $a_{2\nu} = (-1)^{2\nu} = 1$, $\nu \in \mathbb{N}$, έχουμε $\lim a_{2\nu} = 1$ ενώ το όριο της $(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ δεν υπάρχει, όπως δείξαμε στο Παράδειγμα 3.10.
2. Το Θεώρημα 3.19 μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως αρνητικό κριτήριο, δηλαδή αν μια υπακολουθία της $(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ δε συγκλίνει, τότε και η $(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ δε συγκλίνει.

3. Αν υπάρχουν δυο υπακολουθίες της $(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ που συγκλίνουν σε διαφορετικά όρια, τότε η $(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ δε συγκλίνει, π.χ. η $a_\nu=(-1)^\nu$, $\nu\in\mathbb{N}$, δε συγκλίνει γιατί
$$\lim a_{2\nu}=\lim(-1)^{2\nu}=1$$
ενώ
$$\lim a_{2\nu-1}=(-1)^{2\nu-1}=-1.$$
4. Αν μια ακολουθία είναι φραγμένη, τότε κάθε υπακολουθία της είναι επίσης φραγμένη.
5. Κάθε ακολουθία είναι υπακολουθία του εαυτού της (για $k_\nu=\nu$, $\nu\in\mathbb{N}$).
6. Αν γνωρίζουμε ότι μια ακολουθία συγκλίνει, τότε για να βρούμε το όριο της αρκεί να βρούμε το όριο μιας οποιασδήποτε υπακολουθίας της.

Θεώρημα 3.21. *Μία ακολουθία $(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει αν και μόνο αν οι υπακολουθίες $(a_{2\nu})_{\nu\in\mathbb{N}}$ και $(a_{2\nu-1})_{\nu\in\mathbb{N}}$ συγκλίνουν στο ίδιο όριο.*

Απόδειξη. Έστω ότι $\lim a_\nu=l$. Τότε γνωρίζουμε ότι όλες οι υπακολουθίες της $(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ συγκλίνουν στο l, οπότε $\lim a_{2\nu}=\lim a_{2\nu-1}=l$.

Αντίστροφα, έστω ότι $\lim a_{2\nu}=\lim a_{2\nu-1}=l$. Θα δείξουμε ότι $\lim a_\nu=l$. Έχουμε
$$\lim a_{2\nu}=l\Leftrightarrow[(\forall\epsilon>0)(\exists\nu_1\in\mathbb{N})(\forall\nu\in\mathbb{N})\nu>\nu_1\Rightarrow|a_{2\nu}-l|<\epsilon]$$
και
$$\lim a_{2\nu-1}=l\Leftrightarrow[(\forall\epsilon>0)(\exists\nu_2\in\mathbb{N})(\forall\nu\in\mathbb{N})\nu>\nu_2\Rightarrow|a_{2\nu-1}-l|<\epsilon].$$
Θέτουμε $\nu_0=\max\{2\nu_1,2\nu_2-1\}$. Έτσι $(\forall\epsilon>0)(\exists\nu_0\in\mathbb{N})(\forall\nu\in\mathbb{N})$ με $\nu>\nu_0$ ισχύει

1. αν $\nu=2k$ τότε $\nu>\nu_0\Rightarrow 2k>\nu_0\geq 2\nu_1\Rightarrow k>\nu_1\Rightarrow|a_{2k}-l|<\epsilon\Rightarrow|a_\nu-l|<\epsilon$.
2. αν $\nu=2k-1$ τότε $\nu>\nu_0\Rightarrow 2k-1>\nu_0\geq 2\nu_2-1\Rightarrow k>\nu_2\Rightarrow|a_{2k-1}-l|<\epsilon\Rightarrow|a_\nu-l|<\epsilon$.

Άρα σε κάθε περίπτωση έχουμε $|a_\nu-l|<\epsilon$, $\forall\nu>\nu_0$, οπότε $\lim a_\nu=l$. □

Θεώρημα 3.22. *Αν οι ακολουθίες $(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ και $(b_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ είναι συγκλίνουσες και επιπλέον $(\exists\nu_1\in\mathbb{N})$ τέτοιο ώστε $(\forall\nu\in\mathbb{N})$ με $\nu>\nu_1$ συνεπάγεται ότι $a_\nu\leq b_\nu$, τότε $\lim a_\nu\leq\lim b_\nu$.*

Απόδειξη. Έχουμε
$$\lim a_\nu=l\Leftrightarrow[(\forall\epsilon>0)(\exists\nu_2\in\mathbb{N})(\forall\nu\in\mathbb{N})\nu>\nu_2\Rightarrow|a_\nu-l|<\epsilon]$$
και
$$\lim b_\nu=m\Leftrightarrow[(\forall\epsilon>0)(\exists\nu_3\in\mathbb{N})(\forall\nu\in\mathbb{N})\nu>\nu_3\Rightarrow|b_\nu-m|<\epsilon].$$
Έτσι, για $\nu>\max\{\nu_1,\nu_2,\nu_3\}$ έχουμε
$$l-\epsilon<a_\nu\leq b_\nu<\epsilon+m\Rightarrow l-\epsilon<\epsilon+m\Rightarrow l-m<2\epsilon.$$
Συνεπώς ισχύει ότι $(\forall\epsilon>0)$ $l-m<2\epsilon$. Από τη σχέση αυτή προκύπτει ότι $l\leq m$. Πράγματι, έστω ότι $l-m>0$. Τότε για $\epsilon=\frac{l-m}{4}$ έχουμε
$$l-m<2\frac{l-m}{4}=\frac{l-m}{2}\Leftrightarrow 0<l-m<\frac{l-m}{2}$$
που είναι άτοπο. Άρα $l-m\leq 0$, δηλαδή $\lim a_\nu\leq\lim b_\nu$. □

Θεώρημα 3.23. *Αν $\lim a_\nu=l$ και $\lim b_\nu=m$, τότε*

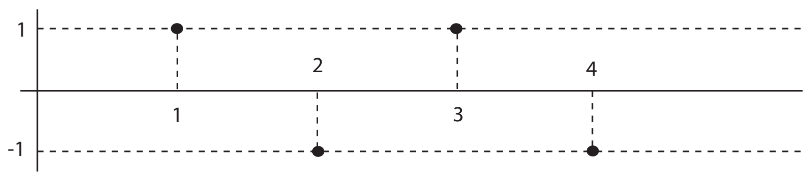
1. $\lim(a_\nu\pm b_\nu)=l\pm m$.

2. $\lim(ka_\nu)=kl,\forall k\in\mathbb{R}$.

3. $\lim(a_\nu b_\nu)=lm$.

4. $\lim\frac{a_\nu}{b_\nu}=\frac{l}{m}$, *αν* $b_\nu\neq 0$, $\forall\nu\in\mathbb{N}$, *και* $m\neq 0$. *Σημειώνουμε εδώ ότι το* $\lim\frac{a_\nu}{b_\nu}$ *μπορεί να υπάρχει ακόμα και αν* $\lim b_\nu=m=0$, *π.χ. αν* $a_\nu=\frac{1}{\nu}$, $\nu\in\mathbb{N}$, *και* $b_\nu=\frac{1}{\nu}$, $\nu\in\mathbb{N}$. *Τότε* $\lim\frac{a_\nu}{b_\nu}=1$, *αλλά προφανώς δεν ισχύει η ισότητα, αφού το* $\frac{l}{m}$ *δεν ορίζεται.*

5. $\lim |a_\nu| = |l|$. *Σημειώνουμε ότι το αντίστροφο ισχύει μόνο αν* $l = 0$, *γιατί π.χ. για την ακολουθία* $a_\nu = (-1)^{\nu+1}$, $\nu \in \mathbb{N}$, *έχουμε*
$$\lim |a_\nu| = \lim |(-1)^{\nu+1}| = 1,$$
ενώ το $\lim a_\nu$ *δεν υπάρχει, αφού* $\lim a_{2\nu-1} = 1$ *και* $\lim a_{2\nu} = -1$.

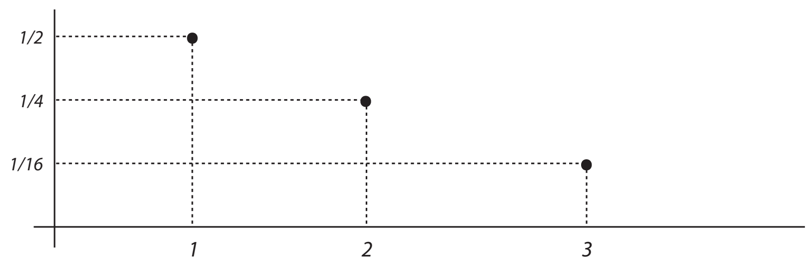


6. $\lim \sqrt{a_\nu} = \sqrt{l}$, *αν* $a_\nu \geq 0$, $\forall \nu \in \mathbb{N}$.

Σημείωση 3.24. Είναι απαραίτητο να εξασφαλίσουμε ότι τα $\lim a_\nu$ και $\lim b_\nu$ υπάρχουν πριν εφαρμόσουμε το Θεώρημα 3.23, γιατί π.χ. για τις ακολουθίες $a_\nu = (-1)^\nu$, $\nu \in \mathbb{N}$, και $b_\nu = (-1)^{\nu+1}$, $\nu \in \mathbb{N}$, έχουμε
$$\lim(a_\nu + b_\nu) = \lim\left((-1)^\nu + (-1)^{\nu+1}\right) = \lim 0 = 0,$$
ενώ τα $\lim(-1)^\nu$ και $\lim(-1)^{\nu+1}$ δεν υπάρχουν.

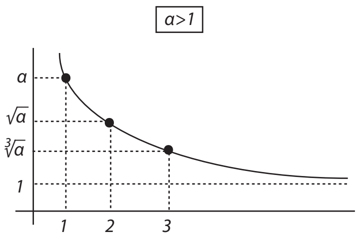
Παράδειγμα 3.25. Έχουμε
$$\lim \frac{7\nu^3 - 6\nu^2 + 5\nu + 4}{5\nu^3 + 2\nu^2 + \nu} = \lim \frac{7 - \frac{6}{\nu} + \frac{5}{\nu^2} + \frac{4}{\nu^3}}{5 + \frac{2}{\nu} + \frac{1}{\nu^2}} = \frac{7}{5}.$$
Ομοίως έχουμε
$$\lim \frac{2\nu}{\nu^2 + 1} = \lim \frac{\frac{2}{\nu}}{1 + \frac{1}{\nu^2}} = 0.$$

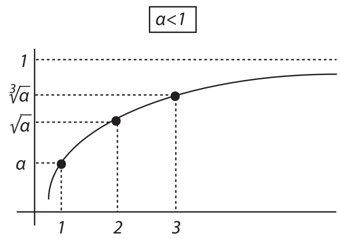
Παράδειγμα 3.26. Αν $a \in \mathbb{R}$ με $|a| < 1$, τότε $\lim |a|^\nu = 0$.



Πράγματι, αν $a = 0$ τότε προφανώς $\lim 0^\nu = 0$. Αν $a \neq 0$ τότε $\frac{1}{|a|} > 1$, οπότε $(\exists \theta > 0)$ τέτοιο ώστε
$$\frac{1}{|a|} = 1 + \theta$$
και έτσι, χρησιμοποιώντας την ανισότητα Bernoulli, έχουμε για τυχόν $\nu \in \mathbb{N}$ ότι
$$\frac{1}{|a|^\nu} = (1+\theta)^\nu \geq 1 + \nu\theta > \nu\theta \Rightarrow |a|^\nu < \frac{1}{\theta}\frac{1}{\nu}.$$
Όμως $\lim \frac{1}{\nu} = 0$ οπότε αφού $|a|^\nu \geq 0$ έχουμε $\lim |a|^\nu = 0$. Συνεπώς, αν $|a| < 1$, τότε ισχύει ότι $\lim |a|^\nu = 0$.

Παράδειγμα 3.27. Αν $a \in (0, +\infty)$, τότε $\lim \sqrt[\nu]{a} = 1$.





Πράγματι, αν $a = 1$, τότε προφανώς $\lim \sqrt[\nu]{1} = 1$.

Αν $a > 1$, τότε $\sqrt[\nu]{a} > 1$ συνεπώς $(\exists \omega_\nu > 0)$ τέτοιο ώστε $\sqrt[\nu]{a} = 1 + \omega_\nu$ οπότε από την ανισότητα Bernoulli έχουμε

$$a = (1 + \omega_\nu)^\nu \geq 1 + \nu\omega_\nu \Rightarrow \omega_\nu \leq \frac{a-1}{\nu}.$$

Όμως

$$\lim \frac{a-1}{\nu} = (a-1) \lim \frac{1}{\nu} = 0$$

οπότε αφού $\omega_\nu \geq 0$ ισχύει ότι $\lim \omega_\nu = 0$ και έτσι

$$\lim \sqrt[\nu]{a} = \lim(1 + \omega_\nu) = 1.$$

Αν $0 < a < 1$ τότε $(\exists \delta_\nu > 0)$ τέτοιο ώστε

$$\sqrt[\nu]{a} = \frac{1}{1 + \delta_\nu}$$

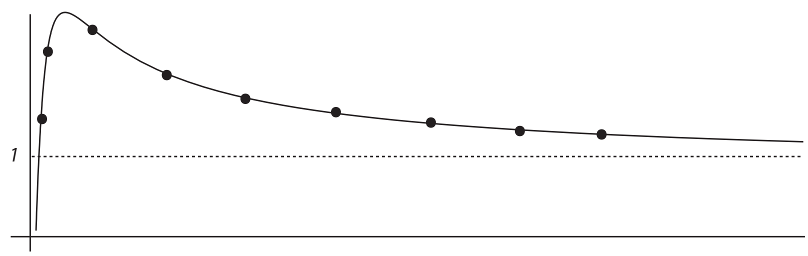
οπότε από την ανισότητα Bernoulli έχουμε

$$a = \left(\frac{1}{1+\delta_\nu}\right)^\nu \leq \frac{1}{1 + \nu\delta_\nu} < \frac{1}{\nu\delta_\nu} \Rightarrow 0 < \delta_\nu < \frac{1}{\nu a}$$

οπότε $\lim \delta_\nu = 0$ και έτσι $\lim \sqrt[\nu]{a} = 1$.

Συνεπώς, αν $a \in (0, +\infty)$, τότε ισχύει ότι $\lim \sqrt[\nu]{a} = 1$.

Παράδειγμα 3.28. Ισχύει ότι $\lim \sqrt[\nu]{\nu} = 1$.



Πράγματι, για τυχόν $\nu \in \mathbb{N}$ έχουμε $\sqrt[2\nu]{\nu} \geq 1$ οπότε $\sqrt[2\nu]{\nu} = 1 + \delta_\nu$ για κάποιο $\delta_\nu \geq 0$. Έτσι από την ανισότητα Bernoulli έχουμε

$$\left(\sqrt[2\nu]{\nu}\right)^\nu = (1 + \delta_\nu)^\nu \Rightarrow \sqrt{\nu} = (1 + \delta_\nu)^\nu \geq 1 + \nu\delta_\nu > \nu\delta_\nu \Rightarrow \delta_\nu < \frac{1}{\sqrt{\nu}}.$$

Όμως $\frac{1}{\sqrt{\nu}} \to 0$ οπότε $\delta_\nu \to 0$ και έτσι έχουμε

$$\sqrt[2\nu]{\nu} = 1 + \delta_\nu \Rightarrow \sqrt[\nu]{\nu} = (1 + \delta_\nu)^2 = 1 + 2\delta_\nu + \delta_\nu^2 \Rightarrow \lim \sqrt[\nu]{\nu} = \lim(1 + 2\delta_\nu + \delta_\nu^2) = 1.$$

Σημειώνουμε εδώ ότι, για να υπολογίσουμε το όριο ν-οστής ρίζας, θεωρούμε την $k\nu$ ρίζα, όπου k είναι ένας φυσικός αριθμός μεγαλύτερος κατά 1 από τον βαθμό της υπόριζης ποσότητας, π.χ. για να υπολογίσουμε το $\lim \sqrt[\nu]{\nu^2 + \nu}$ παίρνουμε την $\sqrt[3\nu]{\nu^2 + \nu} > 1$. Παρατηρούμε ότι $\nu^2 + \nu \geq 1$.

Παράδειγμα 3.29. Ισχύει ότι

$$\begin{aligned}\lim(\sqrt{(\nu+2)(\nu+3)}-\nu) &= \lim \frac{(\nu+2)(\nu+3)-\nu^2}{\sqrt{(\nu+2)(\nu+3)}+\nu} = \lim \frac{5\nu+6}{\sqrt{\nu^2+5\nu+6}+\nu} \\ &= \lim \frac{\nu\left(5+\frac{6}{\nu}\right)}{\nu\left[\sqrt{1+\frac{5}{\nu}+\frac{6}{\nu^2}}+1\right]} = \frac{5}{2}.\end{aligned}$$

Ομοίως έχουμε

$$\lim(\sqrt{\nu+\sqrt{\nu}}-\sqrt{\nu-\sqrt{\nu}}) = \lim \frac{\nu+\sqrt{\nu}-\nu+\sqrt{\nu}}{\sqrt{\nu+\sqrt{\nu}}+\sqrt{\nu-\sqrt{\nu}}} = \lim \frac{2\sqrt{\nu}}{\sqrt{\nu}\left[\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{\nu}}}+\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{\nu}}}\right]} = 1.$$

Θεώρημα 3.30. *Έστω $(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία πραγματικών αριθμών, $\nu_0 \in \mathbb{N}$, $(b_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ η ακολουθία που ορίζεται από τον τύπο $b_\nu = a_{\nu_0+\nu}$, $\nu \in \mathbb{N}$, και $\lim b_\nu = l$. Τότε $\lim a_\nu = l$.*

Απόδειξη. Έχουμε

$$\lim b_\nu = l \Leftrightarrow [(\forall\epsilon > 0)(\exists\nu_1 \in \mathbb{N})(\forall\nu \in \mathbb{N})\nu > \nu_1 \Rightarrow |b_\nu - l| < \epsilon].$$

Έτσι, για $\nu > \nu_0 + \nu_1$ έχουμε $|a_\nu - l| = |b_{\nu-\nu_0} - l| < \epsilon$, δηλαδή $\lim a_\nu = l$. □

Παράδειγμα 3.31. Αν $a_\nu \neq 0$, $\forall \nu \in \mathbb{N}$, και

$$\lim \left|\frac{a_{\nu+1}}{a_\nu}\right| = k < 1,$$

τότε $\lim a_\nu = 0$. Πράγματι, για $\lambda \in \mathbb{R}$ με $k < \lambda < 1$ και $\epsilon = \lambda - k$ έχουμε

$$\lim \left|\frac{a_{\nu+1}}{a_\nu}\right| = k \Rightarrow \left[(\exists\nu_0 \in \mathbb{N})(\forall\nu \in \mathbb{N})\nu \geq \nu_0 \Rightarrow \left|\left|\frac{a_{\nu+1}}{a_\nu}\right| - k\right| < \lambda - k\right],$$

οπότε για κάθε $\nu \geq \nu_0$ ισχύει

$$\left|\frac{a_{\nu+1}}{a_\nu}\right| = \left|\left|\frac{a_{\nu+1}}{a_\nu}\right| - k + k\right| \leq \left|\left|\frac{a_{\nu+1}}{a_\nu}\right| - k\right| + |k| < \lambda - k + k = \lambda,$$

δηλαδή

$$|a_{\nu+1}| \leq \lambda|a_\nu|, \ \forall\nu \geq \nu_0.$$

Συνεπώς, για τυχόν $\rho \in \mathbb{N}$, έχουμε

$$|a_{\nu_0+1}| < \lambda|a_{\nu_0}|, \ |a_{\nu_0+2}| < \lambda|a_{\nu_0+1}|, \ \ldots\ , |a_{\nu_0+\rho}| < \lambda|a_{\nu_0+\rho-1}|.$$

Πολλαπλασιάζοντας τις προηγούμενες σχέσεις κατά μέλη, έχουμε

$$|a_{\nu_0+\rho}| < \lambda^\rho|a_{\nu_0}|.$$

Όμως $\lambda^\rho \to 0$, όταν $\rho \to +\infty$, αφού $\lambda < 1$, οπότε

$$\lim_{\rho\to+\infty} a_{\nu_0+\rho} = 0,$$

συνεπώς από το Θεώρημα 3.30 έχουμε ότι $\lim a_\nu = 0$. Εφαρμόζοντας το παραπάνω για την ακολουθία

$$a_\nu = \frac{2^\nu}{\nu!}, \ \nu \in \mathbb{N},$$

έχουμε

$$\left|\frac{\frac{2^{\nu+1}}{(\nu+1)!}}{\frac{2^\nu}{(\nu)!}}\right| = \frac{\frac{2^\nu 2}{(\nu)!(\nu+1)}}{\frac{2^\nu}{(\nu)!}} = \frac{2}{\nu+1} \to 0,$$

οπότε

$$\lim \frac{2^\nu}{\nu!} = 0.$$

Θεώρημα 3.32 (*Θεώρημα Ισοσυγκλινουσών Ακολουθιών*). *Αν $(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$, $(b_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ και $(c_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ είναι ακολουθίες τέτοιες ώστε*

$$a_\nu \leq b_\nu \leq c_\nu,\ \nu \in \mathbb{N},$$

και

$$\lim a_\nu = l = \lim c_\nu,$$

τότε η $(b_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ είναι συγκλίνουσα και $\lim b_\nu = l$.

Απόδειξη. Έχουμε

$$\lim a_\nu = l \Leftrightarrow [(\forall\epsilon > 0)(\exists\nu_1 \in \mathbb{N})(\forall\nu \in \mathbb{N})\nu > \nu_1 \Rightarrow |a_\nu - l| < \epsilon]$$

και

$$\lim c_\nu = l \Leftrightarrow [(\forall\epsilon > 0)(\exists\nu_2 \in \mathbb{N})(\forall\nu \in \mathbb{N})\nu > \nu_2 \Rightarrow |c_\nu - l| < \epsilon].$$

Έτσι, για $\nu_0 = \max\{\nu_1, \nu_2\}$ και τυχόν $\nu > \nu_0$ έχουμε ότι

$$l - \epsilon < a_\nu \leq b_\nu \leq c_\nu < l + \epsilon \Rightarrow l - \epsilon < b_\nu < l + \epsilon \Rightarrow |b_\nu - l| < \epsilon,$$

δηλαδή $\lim b_\nu = l$. □

Παράδειγμα 3.33. Ισχύει ότι $\lim \frac{[\nu a]}{\nu} = a$, $a \in \mathbb{R}$. Πράγματι, έχουμε

$$\nu a - 1 \leq [\nu a] \leq \nu a \Leftrightarrow a - \frac{1}{\nu} \leq \frac{[\nu a]}{\nu} \leq a.$$

Όμως $\lim\left(a - \frac{1}{\nu}\right) = a$ και $\lim a = a$, άρα από το Θεώρημα Ισοσυγκλινουσών Ακολουθιών έχουμε ότι $\lim \frac{[\nu a]}{\nu} = a$.

Παράδειγμα 3.34. Έστω ότι $\lim a_\nu = l > 0$. Τότε $\lim \sqrt[\nu]{a_\nu} = 1$. Πράγματι

$$\lim a_\nu = l \Rightarrow \left[(\exists\nu_0 \in \mathbb{N})(\forall\nu \in \mathbb{N})\nu > \nu_0 \Rightarrow |a_\nu - l| < \frac{l}{2}\right].$$

Όμως

$$|a_\nu - l| < \frac{l}{2} \Leftrightarrow \frac{l}{2} < a_\nu < \frac{3l}{2} \Leftrightarrow \sqrt[\nu]{\frac{l}{2}} < \sqrt[\nu]{a_\nu} < \sqrt[\nu]{\frac{3l}{2}}$$

ενώ

$$\lim \sqrt[\nu]{\frac{l}{2}} = 1 = \lim \sqrt[\nu]{\frac{3l}{2}}.$$

Σύμφωνα με το Θεώρημα 3.30 και το Θεώρημα Ισοσυγκλινουσών Ακολουθιών, έχουμε ότι $\lim \sqrt[\nu]{a_\nu} = 1$.

Ορισμός 3.35. Η ακολουθία $(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ καλείται

1. ***αύξουσα*** αν $a_{\nu+1} \geq a_\nu$, $\forall\nu \in \mathbb{N}$.
2. ***γνησίως αύξουσα*** αν $a_{\nu+1} > a_\nu$, $\forall\nu \in \mathbb{N}$.
3. ***φθίνουσα*** αν $a_{\nu+1} \leq a_\nu$, $\forall\nu \in \mathbb{N}$.
4. ***γνησίως φθίνουσα*** αν $a_{\nu+1} < a_\nu$, $\forall\nu \in \mathbb{N}$.
5. ***μονότονη*** αν είναι αύξουσα ή φθίνουσα.
6. ***γνησίως μονότονη*** αν είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα.

Παράδειγμα 3.36. Η ακολουθία

$$a_\nu = \frac{2\nu - 7}{3\nu + 2},\ \nu \in \mathbb{N},$$

είναι αύξουσα αφού για τυχόν $\nu \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$\Delta_\nu = a_{\nu+1} - a_\nu = \frac{2(\nu+1) - 7}{3(\nu+1) + 2} - \frac{2\nu - 7}{3\nu + 2} = \frac{25}{(3\nu+5)(3\nu+2)} > 0,$$

άρα

$$\Delta_\nu > 0 \Leftrightarrow a_{\nu+1} - a_\nu > 0 \Leftrightarrow a_{\nu+1} > a_\nu,\ \forall\nu \in \mathbb{N}.$$

Παράδειγμα 3.37. Η ακολουθία
$$a_\nu = \frac{1}{2^\nu},\ \nu \in \mathbb{N},$$
είναι φθίνουσα, αφού για τυχόν $\nu \in \mathbb{N}$ έχουμε
$$\frac{a_{\nu+1}}{a_\nu} = \frac{\frac{1}{2^{\nu+1}}}{\frac{1}{2^\nu}} = \frac{1}{2} < 1,$$
άρα $a_{\nu+1} < a_\nu$, $\forall \nu \in \mathbb{N}$. Σημειώνουμε εδώ ότι αυτός ο τρόπος μπορεί να χρησιμοποιηθεί μόνο αν όλοι οι όροι της ακολουθίας έχουν το ίδιο πρόσημο.

Παράδειγμα 3.38. Η ακολουθία $(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$, με $a_1 = 1$ και $a_{\nu+1} = \frac{1}{4}(2a_\nu+3)$, $\nu \in \mathbb{N}$, είναι γνησίως αύξουσα. Πράγματι, έχουμε
$$a_1 = 1 < \frac{5}{4} = a_2.$$
Επίσης, έστω ότι ισχύει $a_\nu < a_{\nu+1}$. Τότε
$$2a_\nu < 2a_{\nu+1} \Rightarrow \frac{1}{4}(2a_\nu+3) < \frac{1}{4}(2a_{\nu+1}+3) \Rightarrow a_{\nu+1} < a_{\nu+2}.$$
Άρα σύμφωνα με τη μαθηματική επαγωγή έχουμε ότι η $(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ είναι γνησίως αύξουσα.

Παράδειγμα 3.39. Η ακολουθία $(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$, με $a_1 = 1$ και
$$a_{\nu+1} = \frac{4+3a_\nu}{3+2a_\nu},\ \nu \in \mathbb{N},$$
είναι γνησίως αύξουσα. Πράγματι, παρατηρούμε ότι
$$\Delta_{\nu+1} = a_{\nu+2} - a_{\nu+1} = \frac{4+3a_{\nu+1}}{3+2a_{\nu+1}} - \frac{4+3a_\nu}{3+2a_\nu} = \frac{1}{(3+2a_{\nu+1})(3+2a_\nu)}\Delta_\nu,$$
δηλαδή δυο διαδοχικές διαφορές διατηρούν πρόσημο και μηδενίζονται ταυτόχρονα, άρα η ακολουθία είναι μονότονη. Επιπλέον, έχουμε ότι
$$\Delta_1 = a_2 - a_1 = \frac{2}{5} > 0,$$
οπότε η ακολουθία είναι αύξουσα. Ακόμη, ισχύει ότι
$$a_{\nu+1} = a_\nu \Leftrightarrow \frac{4+3a_\nu}{3+2a_\nu} = a_\nu \Leftrightarrow a_\nu = \sqrt{2},$$
το οποίο όμως είναι αδύνατο, αφού όπως προκύπτει από τον τύπο της ακολουθίας, όλοι οι οροι της είναι ρητοί αριθμοί. Συνεπώς η ακολουθία είναι γνησίως αύξουσα.

Θεώρημα 3.40. *Έστω $(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ μια μονότονη ακολουθία πραγματικών αριθμών. Η $(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει αν και μόνο αν είναι φραγμένη. Ειδικότερα,*

1. *αν η $(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ είναι αύξουσα και φραγμένη, τότε $\lim a_\nu = \sup\{a_\nu, \nu \in \mathbb{N}\}$.*
2. *αν η $(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ είναι φθίνουσα και φραγμένη, τότε $\lim a_\nu = \inf\{a_\nu, \nu \in \mathbb{N}\}$.*

Απόδειξη. Αν η $(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ είναι συγκλίνουσα τότε, σύμφωνα με το Θεώρημα 3.13, η $(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ είναι φραγμένη.

Αντίστροφα, έστω ότι η $(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ είναι φραγμένη. Θα εξετάσουμε την περίπτωση η $(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ να είναι αύξουσα. Η περίπτωση να είναι φθίνουσα εξετάζεται θεωρώντας την $(-a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$. Αφού η $(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ είναι φραγμένη, το σύνολο $\{a_\nu, \nu \in \mathbb{N}\}$ είναι φραγμένο, συνεπώς έχει supremum και έστω ότι $\sup\{a_\nu, \nu \in \mathbb{N}\} = l$. Τότε, για τυχόν $\epsilon > 0$ υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $a_k > l - \epsilon$. Όμως η $(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ είναι αύξουσα, οπότε για τυχόν $\nu > k$ έχουμε
$$l - \epsilon < a_k \le a_\nu \le l + \epsilon \Rightarrow |a_\nu - l| < \epsilon,$$
δηλαδή $\lim a_\nu = l$. □

Σημείωση 3.41.

1. Αν η $(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ είναι φθίνουσα, τότε η ακολουθία $(-a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ είναι αύξουσα.
2. Αν μια ακολουθία δεν είναι μονότονη, τότε μπορεί να είναι φραγμένη χωρίς να συγκλίνει, π.χ. η $a_\nu = (-1)^\nu$, $\nu \in \mathbb{N}$. Αν όμως συγκλίνει, τότε υποχρεωτικά είναι φραγμένη.
3. Μια ακολουθία μπορεί να συγκλίνει χωρίς να είναι μονότονη, π.χ. η $a_\nu = \frac{(-1)^\nu}{\nu}$, $\nu \in \mathbb{N}$.

Παράδειγμα 3.42. Η ακολουθία $(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$, με $a_1 = 1$ και

$$a_{\nu+1} = 1 + \frac{1}{1+a_\nu},\ \nu \geq 1,$$

συγκλίνει και μάλιστα $\lim a_\nu = \sqrt{2}$. Πράγματι, παρατηρούμε ότι ισχύει $1 \leq a_\nu \leq 2$, $\forall \nu \in \mathbb{N}$. Επιπλέον, έχουμε

$$a_{\nu+2} - a_{\nu+1} = \left(1 + \frac{1}{1+a_{\nu+1}}\right) - \left(1 + \frac{1}{1+a_\nu}\right) = -\frac{(a_{\nu+1} - a_\nu)}{(1+a_\nu)(1+a_{\nu+1})},$$

δηλαδή δύο διαδοχικές διαφορές έχουν αντίθετο πρόσημο, συνεπώς η $(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ δεν είναι μονότονη. Όμως ισχύει ότι

$$a_{\nu+2} - a_\nu = \left(1 + \frac{1}{1+a_{\nu+1}}\right) - \left(1 + \frac{1}{1+a_{\nu-1}}\right) = \frac{a_\nu - a_{\nu-2}}{(3+2a_\nu)(3+2a_{\nu-2})},$$

δηλαδή οι υπακολουθίες $(a_{2\nu})_{\nu\in\mathbb{N}}$ και $(a_{2\nu-1})_{\nu\in\mathbb{N}}$ είναι μονότονες. Ειδικότερα, έχουμε

$$a_4 - a_2 = -\frac{1}{12} < 0,$$

άρα η $(a_{2\nu})_{\nu\in\mathbb{N}}$ είναι φθίνουσα ενώ από την

$$a_3 - a_1 = \frac{2}{5} > 0$$

προκύπτει ότι η $(a_{2\nu-1})_{\nu\in\mathbb{N}}$ είναι αύξουσα. Συνεπώς η $(a_{2\nu})_{\nu\in\mathbb{N}}$ είναι φθίνουσα και φραγμένη, άρα συγκλίνει και έστω ότι $\lim a_{2\nu} = l$. Ομοίως η $(a_{2\nu-1})_{\nu\in\mathbb{N}}$ είναι αύξουσα και φραγμένη, άρα συγκλίνει και έστω ότι $\lim a_{2\nu-1} = m$. Τότε έχουμε

$$a_{2\nu} = 1 + \frac{1}{1+a_{2\nu-1}} \Rightarrow l = 1 + \frac{1}{1+m} \Rightarrow lm - 2 = m - l$$

και

$$a_{2\nu-1} = 1 + \frac{1}{1+a_{2\nu-2}} \Rightarrow m = 1 + \frac{1}{1+l} \Rightarrow lm - 2 = -(m - l).$$

Από τις δυο τελευταίες σχέσεις έχουμε $m - l = -(m - l)$ οπότε $m - l = 0$, δηλαδή $m = l$. Άρα $\lim a_{2\nu} = \lim a_{2\nu-1} = l = m$, συνεπώς σύμφωνα με το Θεώρημα 3.21 έχουμε ότι $\lim a_\nu = l$. Επίσης έχουμε

$$l = 1 + \frac{1}{1+l} \Leftrightarrow l = \sqrt{2},$$

οπότε τελικά ισχύει ότι $\lim a_\nu = \sqrt{2}$.

Θεώρημα 3.43. *Αν $(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ είναι μια μονότονη ακολουθία πραγματικών αριθμών και $(a_{k_\nu})_{\nu\in\mathbb{N}}$ είναι μια υπακολουθία της που συγκλίνει στο l, τότε $\lim a_\nu = l$.*

Ορισμός 3.44. Μια ακολουθία $(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ λέμε ότι έχει όριο το $+\infty$ (αντ. το $-\infty$) και γράφουμε $\lim a_\nu = +\infty$ (αντ. $\lim a_\nu = -\infty$) αν και μόνο αν

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \nu_0 \in \mathbb{N})(\forall \nu \in \mathbb{N})\nu > \nu_0 \Rightarrow a_\nu > \frac{1}{\epsilon} \left(\text{αντ. } a_\nu < -\frac{1}{\epsilon}\right).$$

Θεώρημα 3.45. *Έστω $(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ και $(b_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ δυο ακολουθίες πραγματικών αριθμών τέτοιες ώστε $a_\nu \leq b_\nu$, $\forall \nu \in \mathbb{N}$. Τότε*

1. *αν $\lim a_\nu = +\infty$ ισχύει ότι $\lim b_\nu = +\infty$.*
2. *αν $\lim b_\nu = -\infty$ ισχύει ότι $\lim a_\nu = -\infty$.*

Απόδειξη. Θα κάνουμε την απόδειξη για το (1), ενώ η απόδειξη για το (2) είναι ανάλογη. Έχουμε

$$\lim a_\nu = +\infty \Leftrightarrow \left[(\forall \epsilon > 0)(\exists \nu_0 \in \mathbb{N})(\forall \nu \in \mathbb{N})\nu > \nu_0 \Rightarrow a_\nu > \frac{1}{\epsilon}\right].$$

Όμως

$$\frac{1}{\epsilon} < a_\nu \leq b_\nu,\ \text{για } \nu > \nu_0,$$

οπότε $\lim b_\nu = +\infty$. □

Παράδειγμα 3.46. Αν $a > 1$ τότε $\lim a^\nu = +\infty$. Πράγματι, αφού $a > 1$, υπάρχει $b > 0$ τέτοιο ώστε $a = 1 + b$, οπότε με τη βοήθεια της ανισότητας Bernoulli έχουμε

$$a^\nu = (1+b)^\nu \geq 1 + \nu b > \nu b.$$

Όμως $\lim(b\nu) = +\infty$ άρα ισχύει ότι $\lim a^\nu = +\infty$.

Θεώρημα 3.47. *Αν $(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ και $(b_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ είναι τέτοιες ώστε $b_\nu \neq 0, \forall \nu \in \mathbb{N}$, και επιπλέον*

$$\lim \frac{a_\nu}{b_\nu} = l,\ l > 0,$$

τότε ισχύει ότι

$$\lim a_\nu = +\infty \Leftrightarrow \lim b_\nu = +\infty.$$

Ορισμός 3.48. Η $(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ καλείται ***ακολουθία του Cauchy*** ή ***βασική ακολουθία*** αν ισχύει το ακόλουθο

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \nu_0 \in \mathbb{N})(\forall \nu, \mu \in \mathbb{N})\nu > \nu_0, \mu > \nu_0 \Rightarrow |a_\nu - a_\mu| < \epsilon.$$

Σημείωση 3.49. Ο Ορισμός 3.48 μπορεί να πάρει την ισοδύναμη μορφή:

$$(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}} \text{ βασική } \Leftrightarrow [(\forall \epsilon > 0)(\exists \nu_0 \in \mathbb{N})(\forall \nu \in \mathbb{N})\nu > \nu_0(\forall k \in \mathbb{N}) \Rightarrow |a_{\nu+k} - a_\nu| < \epsilon].$$

Θεώρημα 3.50. *Η $(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει αν και μόνο αν είναι ακολουθία του Cauchy.*

Σημείωση 3.51.

1. Με βάση το Θεώρημα 3.50, για να δείξουμε ότι μια ακολουθία συγκλίνει αρκεί να δείξουμε ότι είναι ακολουθία του Cauchy. Από τον ορισμό της βασικής ακολουθίας, παρατηρούμε ότι δεν χρειάζεται να έχουμε καμία εκ των προτέρων γνώση για την τιμή του ορίου. Συνεπώς, το Θεώρημα 3.50 μας δίνει έναν τρόπο να αποδείξουμε ότι μια ακολουθία συγκλίνει χωρίς να γνωρίζουμε την τιμή του ορίου της, κάτι που αποτελεί πλεονέκτημα σε σχέση με τον ορισμό του ορίου.
2. Αν αποδείξουμε ότι μια ακολουθία είναι βασική τότε για να βρούμε το όριο της αρκεί να βρούμε το όριο μιας οποιασδήποτε υπακολουθίας της.

Παράδειγμα 3.52. Η ακολουθία

$$a_\nu = \frac{\nu+1}{\nu},\ \nu \in \mathbb{N},$$

είναι βασική. Πράγματι, έστω $\epsilon > 0$. Τότε

$$|a_\nu - a_\mu| = |1 + \frac{1}{\nu} - 1 - \frac{1}{\mu}| = \frac{|\mu - \nu|}{|\nu\mu|} \leq \frac{|\mu| + |\nu|}{\nu\mu} = \frac{\mu+\nu}{\nu\mu}.$$

Χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\mu > \nu$, οπότε

$$|a_\nu - a_\mu| \leq \frac{\mu+\nu}{\mu\nu} = \frac{1}{\nu} + \frac{1}{\mu} < \frac{1}{\nu} + \frac{1}{\nu} = \frac{2}{\nu} < \epsilon \Leftrightarrow \nu > \frac{2}{\epsilon}.$$

Συνεπώς, επιλέγουμε

$$\nu_0 = \left[\frac{2}{\epsilon}\right] + 1$$

και έχουμε το ζητούμενο.

Παράδειγμα 3.53. Η ακολουθία

$$a_\nu = \nu + \frac{(-1)^\nu}{\nu},\ \nu \in \mathbb{N},$$

δεν είναι βασική. Πράγματι, παρατηρούμε ότι

$$|a_{2\nu-1} - a_{2\nu}| = \left|2\nu - 1 - \frac{1}{2\nu-1} - 2\nu - \frac{1}{2\nu}\right| = 1 + \frac{1}{2\nu-1} + \frac{1}{2\nu} > 1.$$

Έστω ότι είναι βασική. Τότε, από τον ορισμό της βασικής ακολουθίας αν επιλέξουμε τυχόν $0 < \epsilon < 1$, καταλήγουμε σε άτοπο.

Παράδειγμα 3.54. Η ακολουθία $(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ με $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ και

$$a_\nu = \frac{1}{3}(a_{\nu-1} + 2a_{\nu-2}),\ \nu \geq 2,$$

συγκλίνει. Πράγματι, αρχικά παρατηρούμε ότι

$$a_{\nu+1} - a_\nu = -\frac{2}{3}(a_\nu - a_{\nu-1}),$$

άρα η ακολουθία δεν είναι μονότονη. Όμως, έχουμε ότι

$$|a_{\nu+1} - a_\nu| = \frac{2}{3}|a_\nu - a_{\nu-1}|,\ \forall \nu \in \mathbb{N},$$

οπότε ισχύει ότι

$$|a_2 - a_1| = \frac{2}{3}|a_1 - a_0|,\ |a_3 - a_2| = \frac{2}{3}|a_2 - a_1|,\ \ldots\ ,|a_{\nu+1} - a_\nu| = \frac{2}{3}|a_\nu - a_{\nu-1}|.$$

Πολλαπλασιάζοντας τις προηγούμενες σχέσεις κατά μέλη, έχουμε

$$|a_{\nu+1} - a_\nu| = \left(\frac{2}{3}\right)^\nu |a_1 - a_0| = \left(\frac{2}{3}\right)^\nu.$$

Έστω $\mu, \nu \in \mathbb{N}$, με $\mu > \nu$. Τότε έχουμε

$$\begin{aligned}
|a_\mu - a_\nu| &\leq |a_\mu - a_{\mu-1}| + |a_{\mu-1} - a_{\mu-2}| + \ldots + |a_{\nu+2} - a_{\nu+1}| + |a_{\nu+1} - a_\nu| \\
&= \left(\frac{2}{3}\right)^{\mu-1} + \left(\frac{2}{3}\right)^{\mu-2} + \ldots + \left(\frac{2}{3}\right)^{\nu+1} + \left(\frac{2}{3}\right)^{\nu} \\
&= \left(\frac{2}{3}\right)^{\nu}\left[1 + \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{2}{3}\right)^{\mu-\nu-1}\right] \\
&= \left(\frac{2}{3}\right)^{\nu}\frac{\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{\mu-\nu} - 1\right]}{\frac{2}{3} - 1} \\
&= \left(\frac{2}{3}\right)^{\nu}\frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{\mu-\nu}}{1 - \frac{2}{3}} \\
&< \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{\nu}}{1 - \frac{2}{3}} \to 0.
\end{aligned}$$

Άρα η $(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ είναι Cauchy, οπότε συγκλίνει. Για να βρούμε το όριο, παρατηρούμε ότι

$$l = \frac{1}{3}(l + 2l) \Leftrightarrow 3l = 3l,$$

συνεπώς με αυτόν τον τρόπο δε μπορούμε να προσδιορίσουμε το l. Ισχύει όμως ότι

$$3a_2 = a_1 + 2a_0,\ 3a_3 = a_2 + 2a_1,\ \ldots\ ,\ 3a_{\nu+1} = a_\nu + 2a_{\nu-1},\ 3a_{\nu+2} = a_{\nu+1} + 2a_\nu.$$

Προσθέτοντας τις παραπάνω σχέσεις κατά μέλη, έχουμε

$$3a_{\nu+1} + 3a_{\nu+2} = a_{\nu+1} + 3a_1 + 2a_0,$$

οπότε

$$3a_{\nu+2} + 2a_{\nu+1} = 3$$

και έτσι

$$5l = 3 \Leftrightarrow l = \frac{3}{5}.$$

Άρα

$$\lim a_\nu = \frac{3}{5}.$$

Παράδειγμα 3.55. Η ακολουθία $(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ με

$$a_\nu = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{\nu^2},\ \nu \in \mathbb{N},$$

συγκλίνει. Πράγματι, αν $\nu, \mu \in \mathbb{N}$ με $\mu > \nu$, έχουμε

$$\begin{aligned} |a_\mu - a_\nu| &= \left|1 + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{\nu^2} + \frac{1}{(\nu+1)^2} + \ldots + \frac{1}{\mu^2} - 1 - \frac{1}{2^2} - \ldots - \frac{1}{\nu^2}\right| \\ &= \frac{1}{(\nu+1)^2} + \frac{1}{(\nu+2)^2} + \ldots + \frac{1}{\mu^2}. \end{aligned}$$

Όμως για τυχόν $\nu \in \mathbb{N}$ ισχύει

$$\frac{1}{\nu^2} < \frac{1}{(\nu-1)\nu} = \frac{\nu-(\nu-1)}{\nu(\nu-1)} = \frac{1}{\nu-1} - \frac{1}{\nu},$$

οπότε

$$|a_\mu - a_\nu| < \left(\frac{1}{\nu} - \frac{1}{\nu+1}\right) + \left(\frac{1}{\nu+1} - \frac{1}{\nu+2}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{\mu-1} - \frac{1}{\mu}\right) = \frac{1}{\nu} - \frac{1}{\mu} < \frac{1}{\nu} \to 0.$$

Άρα η $(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει.

Κεφάλαιο 4

ΣΕΙΡΕΣ

Ορισμός 4.1. Αν $(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ είναι μια ακολουθία πραγματικών αριθμών και $(\sigma_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ είναι η ακολουθία που ορίζεται ως

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &= a_1 \\
\sigma_2 &= a_1 + a_2 \\
\sigma_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\
&\vdots \\
\sigma_\nu &= a_1 + a_2 + \ldots + a_\nu = \sum_{k=1}^{\nu} a_k \\
&\vdots
\end{aligned}$$

τότε

1. η ακολουθία $(\sigma_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ ονομάζεται ***ακολουθία μερικών αθροισμάτων*** της ακολουθίας $(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$.

2. ονομάζουμε ***σειρά πραγματικών αριθμών*** την ακολουθία $(\sigma_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$. Ο συμβολισμός $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$ χρησιμοποιείται για να δηλώσει τόσο την ίδια την σειρά όσο και το όριο της ακολουθίας $(\sigma_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$, εφόσον αυτό υπάρχει.

3. κάθε όρος της ακολουθίας $(\sigma_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ ονομάζεται ***μερικό άθροισμα*** της σειράς. Συγκεκριμένα, το σ_1 ονομάζεται ***πρώτο μερικό άθροισμα*** της σειράς, το σ_2 ονομάζεται ***δεύτερο μερικό άθροισμα*** της σειράς κ.ο.κ.

Σημείωση 4.2.

1. Αν γνωρίζουμε την ακολουθία $(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ τότε γνωρίζουμε και την ακολουθία $(\sigma_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$, αφού

$$\sigma_1 = a_1,\ \sigma_2 = a_1 + a_2,\ \ldots\ ,\ \sigma_\nu = a_1 + a_2 + \ldots + a_\nu,\ \ldots$$

Αντίστροφα, αν γνωρίζουμε την ακολουθία $(\sigma_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ τότε γνωρίζουμε και την ακολουθία $(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$, αφού

$$a_1 = \sigma_1,\ a_2 = \sigma_2 - a_1 = \sigma_2 - \sigma_1,\ \ldots\ ,\ a_\nu = \sigma_\nu - \sigma_{\nu-1},\ \ldots$$

2. Κάθε όρος της ακολουθίας $(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ καλείται ***όρος της σειράς*** ενώ κάθε όρος της ακολουθίας $(\sigma_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ καλείται ***μερικό άθροισμα της σειράς***.

3. Στο συμβολισμό $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$, το $\sum$ δεν αντιπροσωπεύει άθροισμα, αφού το άθροισμα ορίζεται μόνο για πεπερασμένο πλήθος όρων, ενώ η σειρά αντιστοιχεί σε άπειρους το πλήθος όρους. Έτσι, για παράδειγμα, ο προσεταιριστικός νόμος δεν ισχύει, ενώ ο αντιμεταθετικός νόμος ισχύει μόνο σε ειδικές περιπτώσεις.

Παράδειγμα 4.3.

1. Η ***σειρά των φυσικών αριθμών*** είναι η

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \nu = 1 + 2 + \ldots + \nu + \ldots$$

με

$$a_\nu = \nu,\ \nu \in \mathbb{N}$$

και
$$\sigma_\nu = \frac{\nu(\nu+1)}{2},\ \nu \in \mathbb{N}.$$

2. Η ***αριθμητική σειρά*** με πρώτο όρο a και λόγο ω είναι η
$$\sum_{\nu=1}^{\infty}(a+(\nu-1)\omega) = a + (a+\omega) + (a+2\omega) + \ldots + (a+(\nu-1)\omega) + \ldots$$
με
$$a_\nu = a + (\nu-1)\omega,\ \nu \in \mathbb{N}$$
και
$$\sigma_\nu = \frac{2a+(\nu-1)\omega}{2}\nu,\ \nu \in \mathbb{N}.$$

3. Η ***γεωμετρική σειρά*** με πρώτο όρο a και λόγο ω είναι η
$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a\omega^\nu = a + a\omega + a\omega^2 + \ldots + a\omega^\nu + \ldots$$
με
$$a_\nu = a\omega^\nu,\ \nu \in \mathbb{N}$$
και
$$\sigma_\nu = \frac{a(\omega^{\nu+1}-1)}{\omega-1},\ \omega \neq 1,\ \nu \in \mathbb{N}.$$

4. Η ***αρμονική σειρά*** είναι η
$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{\nu} + \ldots$$
με
$$a_\nu = \frac{1}{\nu},\ \nu \in \mathbb{N}$$
και
$$\sigma_\nu = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{\nu},\ \nu \in \mathbb{N}.$$
Παρατηρούμε ότι
$$\frac{2}{a_\nu} = \frac{1}{a_{\nu-1}} + \frac{1}{a_{\nu+1}},\ \nu \geq 2.$$

5. Η σειρά που αντιστοιχεί στην ακολουθία μερικών αθροισμάτων
$$\sigma_\nu = \frac{\nu}{2\nu+1},\ \nu \in \mathbb{N},$$
είναι η
$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{(2\nu+1)(2\nu-1)},$$
αφού για τυχόν $\nu \in \mathbb{N}$ έχουμε
$$a_\nu = \sigma_\nu - \sigma_{\nu-1} = \frac{\nu}{2\nu+1} - \frac{\nu-1}{2(\nu-1)+1} = \frac{1}{(2\nu+1)(2\nu-1)}.$$

Ορισμός 4.4. 1. Η σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$ ***συγκλίνει*** στον πραγματικό αριθμό l αν $\lim \sigma_\nu = l$. Στην περίπτωση αυτή γράφουμε
$$\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu = a_1 + a_2 + \ \ldots\ + a_\nu + \ \ldots = l$$
και
$$\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu < +\infty.$$

2. Η σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$ ***συγκλίνει κατ' εκδοχή*** αν $\lim \sigma_\nu = \pm\infty$. Αν $\lim \sigma_\nu = +\infty$ λέμε ότι η σειρά ***απειρίζεται θετικά***, ενώ αν $\lim \sigma_\nu = -\infty$ λέμε ότι η σειρά ***απειρίζεται αρνητικά***.

3. Η σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$ ***αποκλίνει*** ή ***κυμαίνεται*** αν το $\lim \sigma_\nu$ δεν υπάρχει.

Παράδειγμα 4.5. Για τη γεωμετρική σειρά
$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{2^\nu}$$
έχουμε
$$\sigma_\nu = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^\nu} = 1 - \frac{1}{2^\nu},$$
οπότε
$$\lim \sigma_\nu = \lim \left(1 - \frac{1}{2^\nu}\right) = 1,$$
συνεπώς
$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{2^\nu} = 1.$$

Παράδειγμα 4.6. Για τη σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} a\omega^{\nu-1}$, $a, \omega \in \mathbb{R}$, $\omega \neq 0$, έχουμε
$$\sigma_\nu = a + a\omega + \ldots + a\omega^{\nu-1} = \begin{cases} a\nu, & \text{αν } \omega = 1, \\ a\frac{\omega^\nu - 1}{\omega - 1}, & \text{αν } \omega \neq 1, \end{cases}$$
οπότε

1. αν $|\omega| < 1$, τότε
$$\lim \sigma_\nu = \lim \left(a\frac{\omega^\nu - 1}{\omega - 1}\right) = \frac{a}{1-\omega}.$$
2. αν $\omega > 1$, τότε
$$\lim \sigma_\nu = \lim \left(a\frac{\omega^\nu - 1}{\omega - 1}\right) = \begin{cases} +\infty, & \text{αν } a > 0 \\ -\infty, & \text{αν } a < 0 \end{cases}.$$
3. αν $\omega = 1$, τότε
$$\lim \sigma_\nu = \lim(a\nu) = \begin{cases} +\infty, & \text{αν } a > 0 \\ -\infty, & \text{αν } a < 0 \end{cases}.$$
4. αν $\omega = -1$, τότε
$$\lim \sigma_\nu = \lim \left(a\frac{(-1)^\nu - 1}{-2}\right) = \lim\left(-\frac{a}{2}((-1)^\nu - 1)\right),$$
το οποίο δεν υπάρχει (αρκεί να θεωρήσουμε τις υπακολουθίες των άρτιων και περιττών), συνεπώς η σειρά αποκλίνει.
5. αν $\omega < -1$, τότε
$$\lim \sigma_\nu = \lim \left(a\frac{\omega^\nu - 1}{\omega - 1}\right).$$
Όμως το $\lim \omega^\nu$ δεν υπάρχει (αρκεί να θεωρήσουμε τις υπακολουθίες των άρτιων και περιττών), οπότε η σειρά αποκλίνει.

Συνοψίζοντας, έχουμε
$$\sum_{\nu=1}^{\infty} a\omega^{\nu-1} = \begin{cases} \frac{a}{1-\omega}, & |\omega| < 1, \\ +\infty, & \omega \geq 1 \text{ και } a > 0, \\ -\infty, & \omega \geq 1 \text{ και } a < 0, \\ \text{αποκλίνει}, & \omega \leq -1. \end{cases}$$

Παράδειγμα 4.7. Για την αρμονική σειρά πρώτης τάξης $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu}$ έχουμε
$$\sigma_\nu = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{\nu},$$
οπότε παρατηρούμε ότι
$$|\sigma_{2\nu} - \sigma_\nu| = \frac{1}{\nu+1} + \frac{1}{\nu+2} + \ldots + \frac{1}{\nu+\nu} \geq \frac{1}{2\nu} + \frac{1}{2\nu} + \ldots + \frac{1}{2\nu} = \nu\frac{1}{2\nu} = \frac{1}{2}.$$

Άρα η ακολουθία $(\sigma_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ δεν είναι βασική και συνεπώς δε συγκλίνει. Επιπλέον, έχουμε ότι

$$\sigma_{\nu+1} - \sigma_\nu = \frac{1}{\nu+1} \geq 0,$$

άρα $\lim \sigma_\nu = +\infty$ οπότε $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu} = +\infty$.

Θεώρημα 4.8. *Αν μια σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$ συγκλίνει, τότε η ακολουθία μερικών αθροισμάτων $(\sigma_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ είναι φραγμένη και η $(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ είναι μηδενική. Γενικά, τα αντίστροφα δεν ισχύουν.*

Απόδειξη. Αφού $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu < +\infty$, το $\lim \sigma_\nu$ υπάρχει και συνεπώς η $(\sigma_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ είναι φραγμένη. Το αντίστροφο δεν ισχύει αφού η $\sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^\nu$ δε συγκλίνει, παρότι η αντίστοιχη $(\sigma_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ είναι φραγμένη.

Για την $(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$, έχουμε $a_\nu = \sigma_\nu - \sigma_{\nu-1}$, οπότε $\lim a_\nu = \lim \sigma_\nu - \lim \sigma_{\nu-1} = 0$. Το αντίστροφο δεν ισχύει αφού $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu} = +\infty$ ενώ $\lim \frac{1}{\nu} = 0$. □

Σημείωση 4.9. Από το Θεώρημα 4.8 προκύπτει το ακόλουθο αρνητικό κριτήριο: Αν για τη $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$ ισχύει ότι $\lim a_\nu \neq 0$, τότε η σειρά δε συγκλίνει. Για παράδειγμα, η σειρά

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{2\nu}{\nu+1}$$

δε συγκλίνει, αφού

$$\lim \frac{2\nu}{\nu+1} = 2.$$

Θεώρημα 4.10. *Αν $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu = l \in \mathbb{R}$, $\sum_{\nu=1}^{\infty} b_\nu = m \in \mathbb{R}$ και $\xi, \eta \in \mathbb{R}$ τότε*

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}(\xi a_\nu + \eta b_\nu) = \xi l + \eta m.$$

Απόδειξη. Αν $\sigma_\nu = \sum_{k=1}^{\nu} a_k$, $\tau_\nu = \sum_{k=1}^{\nu} b_k$ και $s_\nu = \sum_{k=1}^{\nu}(\xi a_k + \eta b_k)$, τότε για τυχόν $\nu \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$s_\nu = \sum_{k=1}^{\nu}(\xi a_k + \eta b_k) = \xi \sum_{k=1}^{\nu} a_k + \eta \sum_{k=1}^{\nu} b_k = \xi\sigma_\nu + \eta\tau_\nu,$$

οπότε

$$\lim s_\nu = \xi \lim \sigma_\nu + \eta \lim \tau_\nu = \xi l + \eta m.$$

□

Σημείωση 4.11. Το αντίστροφο του Θεωρήματος 4.10 δεν ισχύει, δηλαδή αν το άθροισμα δυο σειρών είναι συγκλίνουσα σειρά, τότε κάθε μια από αυτές δεν είναι αναγκαίο να συγκλίνει, π.χ. $\sum_{\nu=1}^{\infty} 1 = +\infty$, $\sum_{\nu=1}^{\infty}(-1) = -\infty$ ενώ $\sum_{\nu=1}^{\infty}(1 + (-1)) = 0$.

Θεώρημα 4.12 (*Κριτήριο του Cauchy*). *Η σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$ συγκλίνει αν και μόνο αν η ακολουθία μερικών αθροισμάτων $(\sigma_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ είναι ακολουθία του Cauchy.*

Ορισμός 4.13. Η $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$ καλείται ***σειρά μη αρνητικών όρων*** αν και μόνο αν $a_\nu \geq 0$, $\forall \nu \in \mathbb{N}$.

Σημείωση 4.14. Αν η $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$ είναι σειρά μη αρνητικών όρων, τότε $\sigma_{\nu+1} - \sigma_\nu = a_{\nu+1} \geq 0$, $\forall \nu \in \mathbb{N}$, οπότε η ακολουθία μερικών αθροισμάτων $(\sigma_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ είναι αύξουσα.

Θεώρημα 4.15. *Η σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$, με $a_\nu \geq 0$, $\forall \nu \in \mathbb{N}$, συγκλίνει αν η $(\sigma_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ είναι φραγμένη ενώ απειρίζεται θετικά αν η $(\sigma_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ δεν είναι φραγμένη.*

Απόδειξη. Προφανής, αφού η $(\sigma_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ είναι αύξουσα. □

Θεώρημα 4.16 (*Κριτήριο σύγκρισης σειρών*). *Αν οι $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$ και $\sum_{\nu=1}^{\infty} b_\nu$ είναι σειρές μη αρνητικών όρων, τέτοιες ώστε $0 \leq a_\nu \leq M b_\nu$, $\forall \nu \geq \nu_0$, όπου $M \geq 0$ δεδομένος πραγματικός αριθμός και $\nu_0 \in \mathbb{N}$, τότε*

1. $\sum_{\nu=1}^{\infty} b_\nu < +\infty \Rightarrow \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu < +\infty$,
2. $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu = +\infty \Rightarrow \sum_{\nu=1}^{\infty} b_\nu = +\infty$.

Απόδειξη. Έστω ότι $\sigma_\nu = \sum_{k=1}^{\nu} a_k$, $\nu \in \mathbb{N}$, και $\tau_\nu = \sum_{k=1}^{\nu} b_k$, $\nu \in \mathbb{N}$. Τότε, για $\nu > \nu_0$ έχουμε

$$\begin{aligned}\sigma_\nu &= \sum_{k=1}^{\nu} a_k = \sum_{k=1}^{\nu_0-1} a_k + \sum_{k=\nu_0}^{\nu} a_k \leq \sum_{k=1}^{\nu_0-1} a_k + M \sum_{k=\nu_0}^{\nu} b_k \leq \sum_{k=1}^{\nu_0-1} a_k + M \sum_{k=1}^{\nu} b_k \\ &= \sum_{k=1}^{\nu_0-1} a_k + M\tau_\nu.\end{aligned}$$

Επίσης, αν $\nu \leq \nu_0$ τότε προφανώς ισχύει ότι $\sigma_\nu \leq \sum_{k=1}^{\nu_0-1} a_k + M\tau_\nu$, δηλαδή για τυχόν $\nu \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$\sigma_\nu \leq \sum_{k=1}^{\nu_0-1} a_k + M\tau_\nu. \tag{$*$}$$

1. Αν $\sum_{\nu=1}^{\infty} b_\nu < +\infty$ τότε η $(\tau_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ είναι φραγμένη, οπότε από την $(*)$ έχουμε ότι και η $(\sigma_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ είναι φραγμένη, συνεπώς αφού η $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$ είναι σειρά μη αρνητικών όρων, συγκλίνει.
2. Αν $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu = +\infty$ τότε η $(\sigma_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ δεν είναι φραγμένη, οπότε από την $(*)$ και η $(\tau_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ δεν είναι φραγμένη, δηλαδή η $\sum_{\nu=1}^{\infty} b_\nu$ απειρίζεται θετικά.

□

Θεώρημα 4.17 (*Οριακό κριτήριο σύγκρισης σειρών*). *Έστω ότι $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$ και $\sum_{\nu=1}^{\infty} b_\nu$ είναι δυο σειρές με θετικούς όρους, τέτοιες ώστε $b_\nu \neq 0$, $\forall \nu \in \mathbb{N}$, και*

$$\lim \frac{a_\nu}{b_\nu} = l.$$

1. *Αν $0 < l < +\infty$ τότε*
$$\sum_{\nu=1}^{\infty} b_\nu < +\infty \Leftrightarrow \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu < +\infty,$$
και
$$\sum_{\nu=1}^{\infty} b_\nu = +\infty \Leftrightarrow \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu = +\infty.$$
2. *Αν $l = 0$ τότε*
$$\sum_{\nu=1}^{\infty} b_\nu < +\infty \Rightarrow \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu < +\infty,$$
και
$$\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu = +\infty \Rightarrow \sum_{\nu=1}^{\infty} b_\nu = +\infty.$$
3. *Αν $l = +\infty$ τότε*
$$\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu < +\infty \Rightarrow \sum_{\nu=1}^{\infty} b_\nu < +\infty,$$
και
$$\sum_{\nu=1}^{\infty} b_\nu = +\infty \Rightarrow \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu = +\infty.$$

Απόδειξη. Αν $0 < l < +\infty$ τότε έχουμε

$$\lim \frac{a_\nu}{b_\nu} = l \Rightarrow \left[(\exists \nu_0 \in \mathbb{N})(\forall \nu \in \mathbb{N})\nu > \nu_0 \Rightarrow \left|\frac{a_\nu}{b_\nu} - l\right| < \frac{l}{2}\right],$$

οπότε

$$\left|\frac{a_\nu}{b_\nu} - l\right| < \frac{l}{2} \Leftrightarrow \frac{l}{2} b_\nu < a_\nu < \frac{3l}{2} b_\nu, \ \forall \nu > \nu_0.$$

Το υπόλοιπο της απόδειξης είναι προφανές. Για την περίπτωση $l = 0$, η αντίστοιχη σχέση είναι η

$$\lim \frac{a_\nu}{b_\nu} = 0 \Rightarrow \left[(\exists \nu_0 \in \mathbb{N})(\forall \nu \in \mathbb{N})\nu > \nu_0 \Rightarrow \left|\frac{a_\nu}{b_\nu}\right| < 1\right],$$

οπότε

$$\left|\frac{a_\nu}{b_\nu}\right| < 1 \Rightarrow 0 < a_\nu < b_\nu, \ \forall \nu > \nu_0,$$

ενώ για την περίπτωση $l = +\infty$ έχουμε

$$\lim \frac{a_\nu}{b_\nu} = +\infty \Rightarrow \left[(\exists \nu_0 \in \mathbb{N})(\forall \nu \in \mathbb{N})\nu > \nu_0 \Rightarrow \frac{a_\nu}{b_\nu} > 1\right],$$

οπότε

$$\frac{a_\nu}{b_\nu} > 1 \Rightarrow 0 < b_\nu < a_\nu, \ \forall \nu > \nu_0.$$

□

Σημείωση 4.18. Για να εξετάσουμε αν η σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$ συγκλίνει ή απειρίζεται θετικά χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 4.17, κατασκευάζουμε την $(b_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ από την $(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ παίρνοντας από αυτή τις μεγαλύτερες δυνάμεις του ν, π.χ. αν

$$a_\nu = \frac{(2\nu+1)\sqrt[3]{\nu^3+1}}{5\nu^6+1}$$

τότε επιλέγουμε

$$b_\nu = \frac{\nu\sqrt[3]{\nu^3}}{\nu^6} = \frac{1}{\nu^4}.$$

Θεώρημα 4.19. *Ισχύει ότι*

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^\rho} \begin{cases} = +\infty, & \text{αν } \rho \leq 1, \\ < +\infty, & \text{αν } \rho > 1. \end{cases}$$

*Η σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^\rho}$ καλείται **αρμονική σειρά** ρ-**τάξης**.*

Παράδειγμα 4.20. Για τη σειρά

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\nu^2}{\nu^3+1}$$

έχουμε

$$\frac{\frac{\nu^2}{\nu^3+1}}{\frac{\nu^2}{\nu^3}} = \frac{\nu^3}{\nu^3+1} \to 1.$$

Όμως

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\nu^2}{\nu^3} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu} = +\infty,$$

οπότε

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\nu^2}{\nu^3+1} = +\infty.$$

Παράδειγμα 4.21. Για τη σειρά

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(2\nu+5)\sqrt{\nu^4+\nu}}{3\nu^5+1}$$

έχουμε

$$\frac{\frac{(2\nu+5)\sqrt{\nu^4+\nu}}{3\nu^5+1}}{\frac{\nu\sqrt{\nu^4}}{\nu^5}} = \frac{\nu^5(2\nu+5)\sqrt{\nu^4+\nu}}{(3\nu^5+1)\nu\sqrt{\nu^4}} \to \frac{2}{3}.$$

Όμως

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\nu\sqrt{\nu^4}}{\nu^5} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^2} < +\infty,$$

οπότε

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(2\nu+5)\sqrt{\nu^4+\nu}}{3\nu^5+1} < +\infty.$$

Παράδειγμα 4.22. Για τη σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} \sin\frac{\pi}{\nu}$ έχουμε

$$\frac{\sin\frac{\pi}{\nu}}{\frac{\pi}{\nu}} \to 1,$$

αφού

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1.$$

Όμως

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\pi}{\nu} = \pi\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu} = +\infty,$$

οπότε

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{\nu} = +\infty.$$

Παρατηρούμε ότι

$$\nu \geq 1 \Rightarrow 0 < \frac{1}{\nu} \leq 1 \Rightarrow 0 < \frac{\pi}{\nu} \leq \pi,$$

οπότε για τυχόν $\nu \in \mathbb{N}$ ισχύει ότι $\frac{\pi}{\nu} \in [0,\pi]$, συνεπώς $\sin\frac{\pi}{\nu} \geq 0$, $\forall \nu \in \mathbb{N}$, δηλαδή η $\sum_{\nu=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{\nu}$ είναι σειρά μη αρνητικών όρων.

Θεώρημα 4.23 (*Κριτήριο πηλίκων του D' Alembert*). *Αν για τη σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$, όπου $a_\nu > 0$, $\forall \nu \in \mathbb{N}$, ισχύει*

$$\lim\frac{a_{\nu+1}}{a_\nu} = k \in \mathbb{R},$$

τότε

1. *αν $0 \leq k < 1$, τότε η σειρά συγκλίνει,*
2. *αν $k > 1$, τότε η σειρά απειρίζεται θετικά,*
3. *αν $k = 1$, τότε αυτό το θεώρημα δε δίνει απάντηση.*

Θεώρημα 4.24 (*Κριτήριο ν-οστής ρίζας του Cauchy*). *Αν για τη σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$, με $a_\nu \geq 0$, $\forall \nu \in \mathbb{N}$, ισχύει ότι*

$$\lim\sqrt[\nu]{a_\nu} = k \in \mathbb{R},$$

τότε

1. *αν $0 \leq k < 1$, τότε η σειρά συγκλίνει,*
2. *αν $k > 1$, τότε η σειρά απειρίζεται θετικά,*
3. *αν $k = 1$, τότε αυτό το θεώρημα δε δίνει απάντηση.*

Θεώρημα 4.25 (*Κριτήριο δυνάμεων του* 2). *Αν η $(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ είναι φθίνουσα ακολουθία θετικών όρων, τότε οι σειρές $\sum_{\nu=1}^{\infty} 2^{\nu-1}a_{2^{\nu-1}}$ και $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$ συγκλίνουν (όχι αναγκαστικά στο ίδιο όριο) ή απειρίζονται θετικά συγχρόνως.*

Παράδειγμα 4.26. Για τη σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty}(\sqrt[\nu]{\nu}-1)^\nu$, εφαρμόζοντας το κριτήριο ν-οστής ρίζας του Cauchy, έχουμε

$$\lim\sqrt[\nu]{(\sqrt[\nu]{\nu}-1)^\nu} = \lim(\sqrt[\nu]{\nu}-1) = 1-1 = 0,$$

οπότε η σειρά συγκλίνει.

Παράδειγμα 4.27. Για τη σειρά

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{2^\nu \nu!}{\nu^\nu},$$

εφαρμόζοντας το κριτήριο πηλίκων του D' Alembert, έχουμε

$$\lim\frac{2^{\nu+1}(\nu+1)!\nu^\nu}{(\nu+1)^{\nu+1}2^\nu\nu!} = \lim\frac{2\nu^\nu}{(\nu+1)^\nu} = \lim\frac{2}{(1+\frac{1}{\nu})^\nu}.$$

Όμως γνωρίζουμε ότι

$$\lim(1+\frac{1}{\nu})^{\nu}=e$$

οπότε

$$\lim\frac{2}{(1+\frac{1}{\nu})^{\nu}}=\frac{2}{e}<1,$$

συνεπώς η σειρά συγκλίνει.

Παράδειγμα 4.28. Για τη σειρά

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(\nu!)^2}{2^{\nu^2}},$$

εφαρμόζοντας το κριτήριο πηλίκων του D' Alembert, έχουμε

$$\lim\frac{((\nu+1)!)^2 2^{\nu^2}}{2^{(\nu+1)^2}(\nu!)^2}=\lim\frac{(\nu!)^2(\nu+1)^2 2^{\nu^2}}{2^{\nu^2}2^{2\nu+1}(\nu!)^2}=\lim\frac{(\nu+1)^2}{2\cdot 4^{\nu}}.$$

Όμως για τη σειρά

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(\nu+1)^2}{2\cdot 4^{\nu}}$$

παρατηρούμε ότι

$$\lim\sqrt[\nu]{\frac{(\nu+1)^2}{2\cdot 4^{\nu}}}=\lim\frac{1}{4}\sqrt[\nu]{\frac{1}{2}(\nu+1)^2}=\frac{1}{4}<1,$$

οπότε εφαρμόζοντας το κριτήριο ν-οστής ρίζας του Cauchy έχουμε ότι

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(\nu+1)^2}{2\cdot 4^{\nu}}<+\infty,$$

συνεπώς

$$\lim\frac{(\nu+1)^2}{2\cdot 4^{\nu}}=0,$$

δηλαδή

$$\lim\frac{a_{\nu+1}}{a_{\nu}}=0<1,$$

οπότε

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(\nu!)^2}{2^{\nu^2}}<+\infty.$$

Παράδειγμα 4.29. Προκειμένου να εξετάσουμε ως προς τη σύγκλιση τη σειρά

$$\sum_{\nu=2}^{\infty}\frac{1}{\nu(\log\nu)^{\rho}},$$

θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(x)=\frac{1}{x(\log x)^{\rho}},\ x\geq 2,$$

για την οποία έχουμε ότι $f'(x)<0$, συνεπώς η f είναι φθίνουσα άρα και η ακολουθία

$$a_{\nu}=\frac{1}{\nu(\log\nu)^{\rho}},\ \nu\geq 2,$$

είναι φθίνουσα. Επίσης είναι προφανές ότι $a_{\nu}>0$, $\nu\geq 2$. Εφαρμόζουμε το κριτήριο δυνάμεων του 2 και έχουμε

$$\sum_{\nu=2}^{\infty}2^{\nu}a_{2^{\nu}}=\sum_{\nu=2}^{\infty}2^{\nu}\frac{1}{2^{\nu}(\log 2^{\nu})^{\rho}}=\sum_{\nu=2}^{\infty}\frac{1}{(\log 2)^{\rho}\nu^{\rho}}=\frac{1}{(\log 2)^{\rho}}\sum_{\nu=2}^{\infty}\frac{1}{\nu^{\rho}}.$$

Οπότε, αν $\rho>1$, η

$$\sum_{\nu=2}^{\infty}\frac{1}{\nu(\log\nu)^{\rho}}$$

συγκλίνει, ενώ αν $\rho\leq 1$ τότε η σειρά απειρίζεται θετικά.

Παράδειγμα 4.30. Για να εξετάσουμε ως προς τη σύγκλιση τη σειρά

$$\sum_{\nu=2}^{\infty} e^{-(\log\nu)^2},$$

θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(x) = e^{-(\log x)^2},\ x \geq 2,$$

για την οποία έχουμε ότι $f'(x) < 0$, συνεπώς η f είναι φθίνουσα άρα και η ακολουθία

$$a_\nu = e^{-(\log\nu)^2},\ \nu \geq 2,$$

είναι φθίνουσα. Επίσης είναι προφανές ότι $a_\nu > 0$, $\nu \geq 2$. Εφαρμόζουμε το κριτήριο δυνάμεων του 2 και έχουμε

$$\sum_{\nu=2}^{\infty} 2^\nu e^{-(\log 2^\nu)^2} = \sum_{\nu=2}^{\infty} 2^\nu e^{-(\log 2)^2\nu^2}.$$

Θέτουμε

$$b_\nu = 2^\nu e^{-(\log 2)^2\nu^2},\ \nu \geq 2,$$

και παρατηρούμε ότι

$$\frac{b_{\nu+1}}{b_\nu} = \frac{2^\nu 2 e^{(\log 2)^2}}{e^{(\log 2)^2(\nu+1)^2} 2^\nu} = \frac{2}{e^{(\log 2)^2(2\nu+1)}} \to 0 < 1,$$

συνεπώς $\sum_{\nu=2}^{\infty} b_\nu < +\infty$, άρα και $\sum_{\nu=2}^{\infty} a_\nu < +\infty$.

Ορισμός 4.31. Μια σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$ καλείται ***εναλλασσόμενη*** αν και μόνο αν $a_\nu a_{\nu+1} < 0$, $\forall \nu \in \mathbb{N}$.

Παράδειγμα 4.32. Η σειρά

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu+1}\frac{1}{\nu} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2\nu-1} - \frac{1}{2\nu} + \ldots$$

είναι εναλλασσόμενη.

Θεώρημα 4.33 (*Κριτήριο του Leibnitz*). *Αν η $(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ είναι φθίνουσα και μηδενική ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών, τότε η σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu+1}a_\nu$ συγκλίνει.*

Ορισμός 4.34.

1. Αν $\sum_{\nu=1}^{\infty} |a_\nu| < +\infty$, τότε λέμε ότι η σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$ ***συγκλίνει απόλυτα***.
2. Αν $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu < +\infty$ αλλά η σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} |a_\nu|$ δε συγκλίνει, τότε λέμε ότι η σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$ ***συγκλίνει υπό συνθήκη***.

Θεώρημα 4.35. *Η απόλυτη σύγκλιση μιας σειράς συνεπάγεται την απλή σύγκλιση, δηλαδή*

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} |a_\nu| < +\infty \Rightarrow \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu < +\infty.$$

Επίσης, ισχύει ότι

$$\left|\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu\right| \leq \sum_{\nu=1}^{\infty} |a_\nu|.$$

Παράδειγμα 4.36. Η σειρά

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu+1}\sin\frac{1}{\nu}$$

συγκλίνει υπό συνθήκη. Πράγματι, έχουμε

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \left|(-1)^{\nu+1}\sin\frac{1}{\nu}\right| = \sum_{\nu=1}^{\infty} \left|\sin\frac{1}{\nu}\right|.$$

Όμως για τυχόν $\nu \in \mathbb{N}$ ισχύει

$$0 < \frac{1}{\nu} \leq 1 < \frac{\pi}{2},$$

δηλαδή $\frac{1}{\nu} \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\forall \nu \in \mathbb{N}$, συνεπώς $\sin\frac{1}{\nu} \in [0,1]$, $\forall \nu \in \mathbb{N}$. Άρα

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \left|\sin\frac{1}{\nu}\right| = \sum_{\nu=1}^{\infty} \sin\frac{1}{\nu}.$$

Σε αυτό το σημείο εφαρμόζουμε το οριακό κριτήριο σύγκρισης σειρών και έχουμε

$$\lim \frac{\sin\frac{1}{\nu}}{\frac{1}{\nu}} = 1,$$

αφού

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

οπότε αφού $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu} = +\infty$ ισχύει ότι $\sum_{\nu=1}^{\infty} \sin\frac{1}{\nu} = +\infty$. Άρα η σειρά δε συγκλίνει απόλυτα.

Επιπλέον, όπως δείξαμε προηγούμενα, ισχύει ότι $\sin\frac{1}{\nu} \geq 0$, $\forall \nu \in \mathbb{N}$, ενώ προφανώς ισχύει ότι

$$\lim \sin\frac{1}{\nu} = 0.$$

Επίσης, για τυχόν $\nu \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$0 < \frac{1}{\nu+1} < \frac{1}{\nu} \leq 1 < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin\frac{1}{\nu+1} < \sin\frac{1}{\nu},$$

δηλαδή η ακολουθία $\sin\frac{1}{\nu}$ είναι φθίνουσα. Σύμφωνα, λοιπόν, με το κριτήριο του Leibnitz, η σειρά

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu+1} \sin\frac{1}{\nu}$$

συγκλίνει.

Δείξαμε λοιπόν ότι η σειρά συγκλίνει υπό συνθήκη. Σημειώνουμε εδώ ότι για τη μονοτονία της ακολουθίας $\sin\frac{1}{\nu}$, $\nu \in \mathbb{N}$, θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε την παράγωγο της συνάρτησης

$$f(x) = \sin\frac{1}{x},\ x \geq 1,$$

η οποία είναι η

$$f'(x) = -\frac{\cos\frac{1}{x}}{x^2} < 0,\ x \geq 1.$$

Κεφάλαιο 5

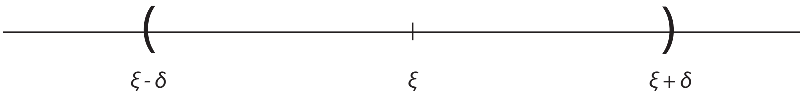
ΟΡΙΟ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Ορισμός 5.1. Έστω $\xi \in \mathbb{R}$.

1. ***Περιοχή του*** ξ ορίζεται να είναι το σύνολο

$$N_\delta(\xi) = \{x \in \mathbb{R} : |x - \xi| < \delta\} = (\xi - \delta, \xi + \delta),$$

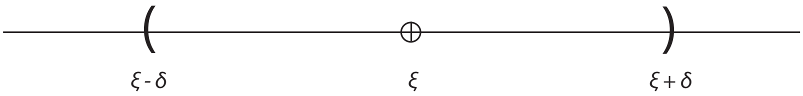
όπου δ θετικός πραγματικός αριθμός.



2. ***Δακτυλική περιοχή του*** ξ ορίζεται να είναι το σύνολο

$$N_\delta^\star(\xi) = \{x \in \mathbb{R} : 0 < |x - \xi| < \delta\} = (\xi - \delta, \xi) \cup (\xi, \xi + \delta) = N_\delta(\xi) \backslash \{\xi\},$$

όπου δ θετικός πραγματικός αριθμός.



3. ***Γενικευμένη ευθεία των πραγματικών αριθμών*** ονομάζεται το σύνολο

$$\widetilde{\mathbb{R}} = \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{+\infty\}.$$

4. ***Δεξιά περιοχή*** του $\xi \in \mathbb{R}$ ονομάζεται το σύνολο

$$N_{\delta+}(\xi) = \{x \in \mathbb{R} : \xi \leq x < \xi + \delta\} = [\xi, \xi + \delta),$$

όπου δ θετικός πραγματικός αριθμός.

5. ***Δεξιά δακτυλική περιοχή*** του $\xi \in \mathbb{R}$ ονομάζεται το σύνολο

$$N_{\delta+}^\star(\xi) = \{x \in \mathbb{R} : \xi < x < \xi + \delta\} = (\xi, \xi + \delta),$$

όπου δ θετικός πραγματικός αριθμός.

6. ***Αριστερή περιοχή*** του $\xi \in \mathbb{R}$ ονομάζεται το σύνολο

$$N_{\delta-}(\xi) = \{x \in \mathbb{R} : \xi - \delta < x \leq \xi\} = (\xi - \delta, \xi],$$

όπου δ θετικός πραγματικός αριθμός.

7. ***Αριστερή δακτυλική περιοχή*** του $\xi \in \mathbb{R}$ ονομάζεται το σύνολο

$$N^{\star}_{\delta-}(\xi) = \{x \in \mathbb{R} : \xi - \delta < x < \xi\} = (\xi - \delta, \xi),$$

όπου δ θετικός πραγματικός αριθμός.

8. ***Περιοχή του*** $+\infty$ ορίζεται να είναι το σύνολο

$$N(+\infty) = \{x \in \widetilde{\mathbb{R}} : x > a\} = \{+\infty\} \cup (a, +\infty),$$

όπου $a \in \mathbb{R}$.

9. ***Περιοχή του*** $-\infty$ ορίζεται να είναι το σύνολο

$$N(-\infty) = \{x \in \widetilde{\mathbb{R}} : x < a\} = \{-\infty\} \cup (-\infty, a),$$

όπου $a \in \mathbb{R}$.

10. ***Δακτυλική περιοχή του*** $+\infty$ ορίζεται να είναι το σύνολο

$$N^{\star}(+\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > a\} = (a, +\infty),$$

όπου $a \in \mathbb{R}$.

11. ***Δακτυλική περιοχή του*** $-\infty$ ορίζεται να είναι το σύνολο

$$N^{\star}(-\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x < a\} = (-\infty, a),$$

όπου $a \in \mathbb{R}$.

12. ***Πλευρικές περιοχές*** του $\xi \in \mathbb{R}$ ονομάζονται από κοινού η δεξιά και η αριστερή περιοχή του ξ.

Παράδειγμα 5.2. 1. Το σύνολο $(1, 3)$ είναι περιοχή του πραγματικού αριθμού 2.

2. Το σύνολο $(1, 2) \cup (2, 3)$ είναι δακτυλική περιοχή του πραγματικού αριθμού 2.
3. Το σύνολο $[2, 3)$ είναι δεξιά περιοχή του πραγματικού αριθμού 2.
4. Το σύνολο $(2, 3)$ είναι δεξιά δακτυλική περιοχή του 2.
5. Το σύνολο $(1, 2]$ είναι αριστερή περιοχή του 2.
6. Το σύνολο $(1, 2)$ είναι αριστερή δακτυλική περιοχή του 2.
7. Το σύνολο $(1, +\infty) \cup \{+\infty\}$ είναι περιοχή του $+\infty$.
8. Το σύνολο $(1, +\infty)$ είναι δακτυλική περιοχή του $+\infty$.
9. Το σύνολο $(-\infty, 1) \cup \{-\infty\}$ είναι περιοχή του $-\infty$.
10. Το σύνολο $(-\infty, 1)$ είναι δακτυλική περιοχή του $-\infty$.

Ορισμός 5.3. 1. Ένα $\xi \in \mathbb{R}$ καλείται ***σημείο συσσωρεύσεως (σ.σ.)*** ενός συνόλου $A \subseteq \mathbb{R}$, αν

$$N^{\star}_{\delta}(\xi) \cap A \neq \emptyset, \ \forall \delta > 0.$$

2. Ένα $\xi \in \mathbb{R}$ καλείται ***σημείο συσσωρεύσεως από αριστερά*** ενός συνόλου $A \subseteq \mathbb{R}$, αν

$$N^{\star}_{\delta-}(\xi) \cap A \neq \emptyset, \ \forall \delta > 0.$$

3. Ένα $\xi \in \mathbb{R}$ καλείται ***σημείο συσσωρεύσεως από δεξιά*** ενός συνόλου $A \subseteq \mathbb{R}$, αν

$$N^{\star}_{\delta+}(\xi) \cap A \neq \emptyset, \ \forall \delta > 0.$$

4. Ένα $\xi \in \mathbb{R}$ καλείται ***μεμονωμένο σημείο*** ενός συνόλου $A \subseteq \mathbb{R}$, αν $(\exists \delta > 0)$ τέτοιο ώστε

$$N_\delta(\xi) \cap A = \{\xi\}.$$

Σημείωση 5.4. 1. Αν $\xi \in \mathbb{R}$ είναι σημείο συσσωρεύσεως ενός συνόλου $A \subseteq \mathbb{R}$, τότε το ξ μπορεί να ανήκει ή να μην ανήκει στο A.

2. Αν $\xi \in \mathbb{R}$ είναι μεμονωμένο σημείο ενός συνόλου $A \subseteq \mathbb{R}$, τότε το ξ υποχρεωτικά ανήκει στο A.

Παράδειγμα 5.5. 1. Ο πραγματικός αριθμός 1 είναι σημείο συσσωρεύσεως του διαστήματος $(0, 2)$.

2. Ο πραγματικός αριθμός 2 είναι σημείο συσσωρεύσεως από αριστερά του διαστήματος $(0, 2)$.

3. Ο πραγματικός αριθμός 0 είναι σημείο συσσωρεύσεως από δεξιά του διαστήματος $(0, 2)$.

4. Ο πραγματικός αριθμός 3 είναι μεμονωμένο σημείο του συνόλου $(0, 2) \cup \{3\}$.

Θεώρημα 5.6. *Έστω $\xi \in \mathbb{R}$ και $A \subseteq \mathbb{R}$. Το ξ είναι σημείο συσσωρεύσεως του A αν και μόνο αν υπάρχει ακολουθία $(x_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ στοιχείων του $A\backslash\{\xi\}$ με $\lim x_\nu = \xi$.*

Απόδειξη. Αν το ξ είναι σημείο συσσώρευσης του A, τότε

$$N^\star_\delta(\xi) \cap A \neq \emptyset, \ \forall \delta > 0.$$

Έτσι για τυχόν $\nu \in \mathbb{N}$ υπάρχει

$$x_\nu \in N^\star_{\frac{1}{\nu}}(\xi) \cap A,$$

δηλαδή $x_\nu \in A$ και

$$x_\nu \in (\xi - \frac{1}{\nu}, \xi) \cup (\xi, \xi + \frac{1}{\nu}).$$

Συνεπώς, $(\forall \nu \in \mathbb{N})$ $(\exists x_\nu \in A)$ τέτοιο ώστε $|x_\nu - \xi| < \frac{1}{\nu}$. Η ακολουθία $(x_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ είναι η ζητούμενη ακολουθία, αφού $x_\nu \in A$, $\forall \nu \in \mathbb{N}$, και επιπλέον λόγω της σχέσης

$$|x_\nu - \xi| < \frac{1}{\nu}, \ \forall \nu \in \mathbb{N}$$

έχουμε $\lim x_\nu = \xi$.

Αντίστροφα, αν $\lim x_\nu = \xi$, τότε

$$(\forall \epsilon > 0) \ (\exists \nu_0 \in \mathbb{N}) \ (\forall \nu \in \mathbb{N}) \text{ με } \nu > \nu_0 \Rightarrow 0 < |x_\nu - \xi| < \epsilon$$

ή ισοδύναμα $x_\nu \in (\xi - \epsilon, \xi + \epsilon)\backslash\{\xi\}$. Επειδή το τελευταίο ισχύει για τυχόν $\epsilon > 0$, έχουμε το ζητούμενο. □

Ορισμός 5.7. Ένα $\xi \in \widetilde{\mathbb{R}}$ καλείται ***σημείο συσσωρεύσεως (σ.σ.)*** του πεδίου ορισμού $\mathcal{D}(f)$ μιας συνάρτησης f, αν υπάρχει ακολουθία $(x_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ στοιχείων του $\mathcal{D}(f)\backslash\{\xi\}$ τέτοια ώστε $\lim x_\nu = \xi$.

Ορισμός 5.8. Ας είναι f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού το $\mathcal{D}(f)$ και $(x_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία στοιχείων του $\mathcal{D}(f)$. Τότε η ακολουθία $(f(x_\nu))_{\nu\in\mathbb{N}}$ καλείται ***ακολουθία των τιμών της*** f, αντίστοιχη της $(x_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$.

Θεώρημα 5.9. *Έστω ξ σημείο συσσωρεύσεως του πεδίου ορισμού $\mathcal{D}(f)$ μιας συνάρτησης f. Αν για κάθε ακολουθία $(x_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ με $x_\nu \in \mathcal{D}(f)\backslash\{\xi\}$, $\forall \nu \in \mathbb{N}$, και $\lim x_\nu = \xi$, η αντίστοιχη ακολουθία $(f(x_\nu))_{\nu\in\mathbb{N}}$ των τιμών της f συγκλίνει, τότε θα συγκλίνει σε ένα και μοναδικό όριο.*

Ορισμός 5.10 (*Ακολουθιακός ορισμός σύγκλισης*). Έστω ξ ένα σημείο συσσώρευσης του πεδίου ορισμού $\mathcal{D}(f)$ μιας συνάρτησης f. Λέμε ότι η f έχει όριο το $l \in \widetilde{\mathbb{R}}$, όταν το x τείνει στο ξ, και γράφουμε

$$\lim_{x\to\xi} f(x) = l,$$

αν ισχύει ότι

$$[(\forall (x_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}) \text{ με } x_\nu \in \mathcal{D}(f)\backslash\{\xi\} \text{ και } \lim x_\nu = \xi] \Rightarrow \lim f(x_\nu) = l.$$

Σημείωση 5.11. 1. Όταν γράφουμε $x \to \xi \in \widetilde{\mathbb{R}}$ εννοούμε ότι το x πλησιάζει οσοδήποτε κοντά στο ξ χωρίς όμως ποτέ να γίνει ίσο με ξ. Συνεπώς στον ορισμό του ορίου δε μας ενδιαφέρει η τιμή της f στο ξ, αν αυτή υπάρχει, αλλά μόνο οι τιμές της f οσοδήποτε κοντά στο ξ. Αυτό σημαίνει πρακτικά ότι το όριο $\lim_{x\to\xi} f(x)$ μπορεί να είναι ίσο ή και διάφορο του $f(\xi)$, εφόσον υπάρχει το $f(\xi)$.

2. Το ξ πρέπει να είναι σ.σ. του $\mathcal{D}(f)$, συνεπώς η f πρέπει να ορίζεται τουλάχιστον σε ένα διάστημα της μορφής $(a,\xi)\cup(\xi,b)\subseteq\mathcal{D}(f)$. Το ξ δε χρειάζεται να ανήκει στο $\mathcal{D}(f)$.

3. Αν το ξ είναι μεμονωμένο σημείο του $\mathcal{D}(f)$, τότε δεν έχει νόημα το $\lim_{x\to\xi} f(x)$. Για το λόγο αυτό, στις ακολουθίες εξετάζουμε το όριο μόνο όταν $\nu\to+\infty$, αφού το μοναδικό σ.σ. του $\mathbb{N}$ είναι το $+\infty$.

4. Από τον ορισμό προκύπτει άμεσα ότι, αν υπάρχουν δυο ακολουθίες $(x_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ και $(y_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ στοιχείων του $\mathcal{D}(f)\backslash\{\xi\}$ με $\lim x_\nu=\xi=\lim y_\nu$ και τέτοιες ώστε $\lim f(x_\nu)\neq\lim f(y_\nu)$, τότε το όριο $\lim_{x\to\xi} f(x)$ δεν υπάρχει.

Ορισμός 5.12. Έστω ξ σ.σ. του πεδίου ορισμού $\mathcal{D}(f)$ μιας συνάρτησης f. Λέμε ότι η f έχει ***όριο*** το $l\in\widetilde{\mathbb{R}}$, στο σημείο $\xi\in\mathbb{R}$, ***από αριστερά*** (αντίστοιχα ***από δεξιά***) αν και μόνο αν, για κάθε ακολουθία $(x_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ στοιχείων του $\mathcal{D}(f)\backslash\{\xi\}$ τέτοια ώστε $x_\nu<\xi$, $\forall\nu\in\mathbb{N}$, (αντίστοιχα $x_\nu>\xi$, $\forall\nu\in\mathbb{N}$) και $\lim x_\nu=\xi$, η αντίστοιχη ακολουθία των τιμών της συνάρτησης $(f(x_\nu))_{\nu\in\mathbb{N}}$, συγκλίνει στο l. Συμβολίζουμε $\lim_{x\to\xi-} f(x)$ (αντίστοιχα $\lim_{x\to\xi+} f(x)$). Το από αριστερά και το από δεξιά όριο της f ονομάζονται από κοινού ***πλευρικά όρια*** της f.

Θεώρημα 5.13. *Αν $\xi\in\mathbb{R}$ είναι σ.σ. του πεδίου ορισμού $\mathcal{D}(f)$ μιας συνάρτησης f, τότε ισχύει η ισοδυναμία*

$$\lim_{x\to\xi} f(x)=l \Leftrightarrow \lim_{x\to\xi-} f(x)=l=\lim_{x\to\xi+} f(x).$$

Παράδειγμα 5.14. Ισχύει ότι

$$\lim_{x\to-\infty} x(x+\sqrt{x^2+x+1})=+\infty.$$

Πράγματι, η διακρίνουσα του x^2+x+1 ισούται με $-3<0$, άρα $x^2+x+1>0$, $\forall x\in\mathbb{R}$, συνεπώς αν συμβολίσουμε

$$f(x)=x(\sqrt{x^2+x+1}+x),\ x\in\mathbb{R},$$

τότε το πεδίο ορισμού της f είναι ολόκληρο το $\mathbb{R}$ και προφανώς το $-\infty$ είναι σ.σ. του $\mathbb{R}$. Θεωρούμε τυχούσα ακολουθία $(x_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ στοιχείων του $\mathbb{R}$, με $\lim x_\nu=-\infty$. Μπορούμε μάλιστα, χωρίς βλάβη της γενικότητας, να υποθέσουμε ότι όλοι οι όροι της $(x_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ ανήκουν στο $(-\infty,0)$. Τότε έχουμε

$$\begin{aligned} f(x_\nu) &= x_\nu(\sqrt{x_\nu^2+x_\nu+1}+x_\nu)=x_\nu\frac{x_\nu+1}{\sqrt{x_\nu^2+x_\nu+1}-x_\nu}=x_\nu\frac{x_\nu+1}{\sqrt{x_\nu^2(1+\frac{1}{x_\nu}+\frac{1}{x_\nu^2})}-x_\nu}\\ &= x_\nu\frac{x_\nu+1}{-x_\nu\sqrt{1+\frac{1}{x_\nu}+\frac{1}{x_\nu^2}}-x_\nu}=\frac{x_\nu+1}{-\sqrt{1+\frac{1}{x_\nu}+\frac{1}{x_\nu^2}}-1}\to+\infty. \end{aligned}$$

Παράδειγμα 5.15. Το όριο $\lim_{x\to0}\frac{1}{x}$ δεν υπάρχει στο $\mathbb{R}$. Πράγματι, αν $(x_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ είναι τυχούσα ακολουθία στοιχείων του $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, με $\lim x_\nu=0$, τότε

$$\lim f(x_\nu)=\lim\frac{1}{x_\nu}.$$

Ειδικότερα, για την ακολουθία $x_\nu=\frac{1}{\nu}$, $\nu\in\mathbb{N}$, έχουμε

$$\lim f(x_\nu)=\lim\frac{1}{\frac{1}{\nu}}=\lim\nu=+\infty\notin\mathbb{R}.$$

Παράδειγμα 5.16. Το όριο

$$\lim_{x\to0}\sin\frac{1}{x^2}$$

δεν υπάρχει στο $\mathbb{R}$. Πράγματι, για τις ακολουθίες

$$x_\nu=\frac{1}{\sqrt{2\nu\pi}},\ \nu\in\mathbb{N},$$

και

$$y_\nu=\frac{1}{\sqrt{2\nu\pi+\frac{\pi}{2}}},\ \nu\in\mathbb{N},$$

έχουμε $\lim x_\nu=0=\lim y_\nu$ και

$$\lim\sin\frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{2\nu\pi}}\right)^2}=\lim(\sin(2\nu\pi))=\lim 0=0,$$

ενώ

$$\lim \sin \frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{2\nu\pi+\frac{\pi}{2}}}\right)^2} = \lim \left(\sin\left(2\nu\pi + \frac{\pi}{2}\right)\right) = \lim 1 = 1.$$

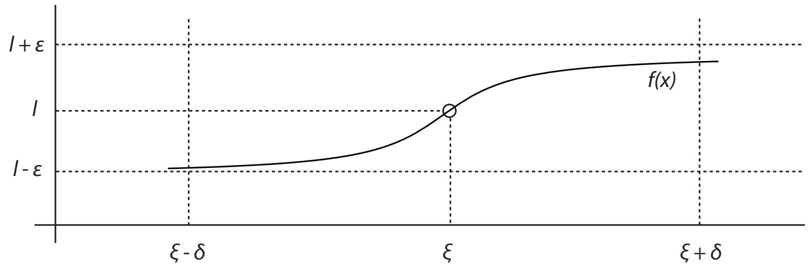
Βρήκαμε, λοιπόν, δύο ακολουθίες $(x_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ και $(y_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$, με $\lim x_\nu = 0 = \lim y_\nu$ και $\lim f(x_\nu) \neq \lim f(y_\nu)$. Άρα το $\lim_{x\to 0} f(x)$ δεν υπάρχει.

Ορισμός 5.17 (*Ορισμός σύγκλισης κατά Cauchy ή* $\epsilon - \delta$ *ορισμός σύγκλισης*). Έστω $\xi \in \mathbb{R}$ ένα σ.σ. του πεδίου ορισμού $\mathcal{D}(f)$ μιας συνάρτησης f. Λέμε ότι η f έχει όριο το $l \in \mathbb{R}$ στο σημείο ξ και γράφουμε

$$\lim_{x\to\xi} f(x) = l,$$

αν ισχύει ότι

$$(\forall\epsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall x \in \mathcal{D}(f)) \text{ με } 0 < |x - \xi| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon$$



Παράδειγμα 5.18. Ισχύει ότι $\lim_{x\to 3}(x^2 + 2x) = 15$. Πράγματι, θα δείξουμε ότι

$$(\forall\epsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall x \in \mathcal{D}(f) = \mathbb{R}) \text{ με } 0 < |x - 3| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon.$$

Όμως

$$|f(x) - l| < \epsilon \Leftrightarrow |x^2 + 2x - 15| < \epsilon \Leftrightarrow |x - 3||x + 5| < \epsilon.$$

Εμφανίσαμε λοιπόν την παράσταση $|x - 3|$, για την οποία γνωρίζουμε ότι $|x - 3| < \delta$. Πρέπει να βρούμε και ένα άνω φράγμα για την παράσταση $|x + 5|$. Χωρίς να κάνουμε την τελική επιλογή του δ, υποθέτουμε ότι $\delta \leq 1$, κάτι που δε δημιουργεί πρόβλημα, αφού ενδιαφερόμαστε για ¨μικρά¨ δ. Έτσι, έχουμε

$$|x - 3| < \delta \leq 1 \Rightarrow -1 \leq x - 3 \leq 1 \Rightarrow 2 \leq x \leq 4 \Rightarrow 7 \leq x + 5 \leq 9 \Rightarrow |x + 5| \leq 9,$$

οπότε $|x - 3||x + 5| < 9\delta$. Επιλέγουμε λοιπόν το δ να είναι τέτοιο ώστε $9\delta < \epsilon$, δηλαδή $\delta < \frac{\epsilon}{9}$. Τότε

$$|x - 3||x + 5| < 9\delta < \epsilon$$

και έχουμε το ζητούμενο. Άρα τελικά

$$\delta = \min\left\{1, \frac{\epsilon}{9}\right\}.$$

Παράδειγμα 5.19. Ισχύει ότι

$$\lim_{x\to 1} \frac{1}{x} = 1.$$

Πράγματι, θα δείξουμε ότι

$$(\forall\epsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall x \in \mathcal{D}(f) = \mathbb{R}\backslash\{0\}) \text{ με } 0 < |x - 1| < \delta \Rightarrow \left|\frac{1}{x} - 1\right| < \epsilon.$$

Όμως

$$\left|\frac{1}{x} - 1\right| < \epsilon \Leftrightarrow \frac{|x - 1|}{|x|} < \epsilon.$$

Εμφανίσαμε λοιπόν την παράσταση $|x - 1|$, για την οποία γνωρίζουμε ότι $|x - 1| < \delta$. Υποθέτουμε ότι $\delta < \frac{1}{2}$. Τότε έχουμε

$$|x - 1| < \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{2}{3} < \frac{1}{x} < 2.$$

Σημειώνουμε εδώ ότι η υπόθεση $\delta < 1$ δε μας δίνει κάποιο χρήσιμο αποτέλεσμα στο συγκεκριμένο όριο. Έτσι, έχουμε

$$\frac{|x-1|}{|x|} < 2\delta.$$

Άρα το ζητούμενο δ είναι το

$$\delta = \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{\epsilon}{2}\right\}.$$

Παράδειγμα 5.20. Ισχύει ότι

$$\lim_{x\to -1} \frac{x}{3x+1} = \frac{1}{2}.$$

Πράγματι, θα δείξουμε ότι

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)\left(\forall x \in \mathcal{D}(f) = \mathbb{R}\backslash\left\{-\frac{1}{3}\right\}\right) \text{ με } 0 < |x+1| < \delta \Rightarrow \left|\frac{x}{3x+1} - \frac{1}{2}\right| < \epsilon.$$

Όμως

$$\left|\frac{x}{3x+1} - \frac{1}{2}\right| < \epsilon \Leftrightarrow \frac{|x+1|}{2|3x+1|} < \epsilon.$$

Εμφανίσαμε λοιπόν την παράσταση $|x+1|$, για την οποία γνωρίζουμε ότι $|x+1| < \delta$. Αν υποθέσουμε ότι $\delta < 1$ τότε καταλήγουμε στη σχέση $-5 < 3x+1 < 1$, από την οποία παίρνουμε $|3x+1| < 5$, το οποίο όμως δε μας είναι χρήσιμο αφού χρειαζόμαστε κάτω φράγμα για την $|3x+1|$ μιας και αυτή βρίσκεται στον παρανομαστή. Υποθέτουμε λοιπόν ότι $\delta < \frac{1}{4}$. Τότε έχουμε

$$|x+1| < \frac{1}{4} \Rightarrow -\frac{1}{4} < x+1 < \frac{1}{4} \Rightarrow -\frac{11}{4} < 3x+1 < -\frac{5}{4}$$
$$\Rightarrow \frac{5}{4} < |3x+1| < \frac{11}{4} \Rightarrow \frac{4}{11} < \frac{1}{|3x+1|} < \frac{4}{5}.$$

Έτσι έχουμε

$$\frac{|x+1|}{2|3x+1|} < \frac{2}{5}\delta.$$

Άρα το ζητούμενο δ είναι το

$$\delta = \min\left\{\frac{1}{4}, \frac{5\epsilon}{2}\right\}.$$

Παράδειγμα 5.21. Το όριο

$$\lim_{x\to 0}\left(x + \frac{|x|}{x}\right)$$

δεν υπάρχει. Πράγματι, αρχικά παρατηρούμε ότι

$$\lim_{x\to 0}\left(x + \frac{|x|}{x}\right) = \lim f(x),$$

όπου

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & x > 0 \\ x-1, & x < 0 \end{cases}.$$

Υποθέτουμε ότι υπάρχει $l \in \mathbb{R}$ με $\lim_{x\to 0} f(x) = l$ και θα καταλήξουμε σε άτοπο. Έχουμε

$$\lim_{x\to 0} f(x) = l \Leftrightarrow [(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \mathcal{D}(f) = \mathbb{R}\backslash\{0\}) \text{ με } 0 < |x-0| = |x| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon].$$

Θεωρούμε δυο πραγματικούς αριθμούς $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με

$$-\delta < x_1 < 0 < x_2 < \delta$$

και για $\epsilon = 1$ έχουμε, σύμφωνα με το παραπάνω, ότι

$$|f(x_1) - l| < 1 \Rightarrow |x_1 - 1 - l| < 1 \Rightarrow -1 < x_1 - 1 - l < 1 \Rightarrow 0 < x_1 - l < 2$$
$$\Rightarrow -x_1 < -l < 2 - x_1 \Rightarrow x_1 - 2 < l < x_1 < 0.$$

Ανάλογα, από τη σχέση $|f(x_2) - l| < 1$ προκύπτει ότι

$$0 < x_2 < l < 2 + x_2,$$

συνεπώς συνδυάζοντας αυτές τις δυο σχέσεις έχουμε $0 < l < 0$, το οποίο είναι άτοπο. Άρα το όριο δεν υπάρχει.

Θεώρημα 5.22. *Ο ακολουθιακός ορισμός της σύγκλισης και ο $\epsilon - \delta$ ορισμός της σύγκλισης είναι ισοδύναμοι.*

Ορισμός 5.23.

1. Έστω $\xi \in \mathbb{R}$ ένα σ.σ. του συνόλου $\mathcal{D}(f) \cap (-\infty, \xi)$. Λέμε ότι ο αριθμός $l \in \mathbb{R}$ είναι ***όριο της*** f ***στο*** ξ ***από αριστερά***, και συμβολίζουμε με
$$\lim_{x \to \xi-} f(x) = l$$
αν και μόνο αν ισχύει
$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \mathcal{D}(f)) \text{ με } \xi - \delta < x < \xi \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon.$$

2. Έστω $\xi \in \mathbb{R}$ ένα σ.σ. του συνόλου $\mathcal{D}(f) \cap (\xi, +\infty)$. Λέμε ότι ο αριθμός $l \in \mathbb{R}$ είναι ***όριο της*** f ***στο*** ξ ***από δεξιά***, και συμβολίζουμε με
$$\lim_{x \to \xi+} f(x) = l$$
αν και μόνο αν ισχύει
$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \mathcal{D}(f)) \text{ με } \xi < x < \xi + \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon.$$

Σημείωση 5.24. Ισχύει ότι
$$\lim_{x \to \xi} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{x \to \xi-} f(x) = l = \lim_{x \to \xi+} f(x).$$

Ορισμός 5.25. Αν $\xi = \pm\infty$ ή $l = \pm\infty$ τότε το $\lim_{x \to \xi} f(x) = l$ ορίζεται ως ακολούθως

1. $\lim_{x \to \xi} f(x) = +\infty \Leftrightarrow [(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \mathcal{D}(f))$ με $0 < |x - \xi| < \delta \Rightarrow f(x) > \frac{1}{\epsilon}]$
2. $\lim_{x \to \xi} f(x) = -\infty \Leftrightarrow [(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \mathcal{D}(f))$ με $0 < |x - \xi| < \delta \Rightarrow f(x) < -\frac{1}{\epsilon}]$
3. $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l \Leftrightarrow [(\forall \epsilon > 0)(\exists r > 0)(\forall x \in \mathcal{D}(f))$ με $x > r \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon]$
4. $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow [(\forall \epsilon > 0)(\exists r > 0)(\forall x \in \mathcal{D}(f))$ με $x > r \Rightarrow f(x) > \frac{1}{\epsilon}]$
5. $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow [(\forall \epsilon > 0)(\exists r > 0)(\forall x \in \mathcal{D}(f))$ με $x > r \Rightarrow f(x) < -\frac{1}{\epsilon}]$
6. $\lim_{x \to -\infty} f(x) = l \Leftrightarrow [(\forall \epsilon > 0)(\exists r > 0)(\forall x \in \mathcal{D}(f))$ με $x < -r \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon]$
7. $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow [(\forall \epsilon > 0)(\exists r > 0)(\forall x \in \mathcal{D}(f))$ με $x < -r \Rightarrow f(x) > \frac{1}{\epsilon}]$
8. $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow [(\forall \epsilon > 0)(\exists r > 0)(\forall x \in \mathcal{D}(f))$ με $x < -r \Rightarrow f(x) < -\frac{1}{\epsilon}]$

Παράδειγμα 5.26. Ισχύει ότι
$$\lim_{x \to 1+} \frac{x}{x-1} = +\infty.$$
Πράγματι, θα δείξουμε ότι
$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in (1, +\infty)) \text{ με } 1 < x < 1 + \delta \Rightarrow \frac{x}{x-1} > \frac{1}{\epsilon}.$$
Σε αυτό το σημείο υποθέτουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $0 < \epsilon < 1$, δεδομένου ότι ενδιαφερόμαστε για τα ¨μικρά¨ ϵ. Έτσι, η ποσότητα $1 - \epsilon$ είναι θετική και έχουμε
$$\frac{x}{x-1} > \frac{1}{\epsilon} \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{x-1} > \frac{1}{\epsilon} \Leftrightarrow \frac{1}{x-1} > \frac{1}{\epsilon} - 1 = \frac{1-\epsilon}{\epsilon} \Leftrightarrow x < 1 + \frac{\epsilon}{1-\epsilon}.$$
Άρα αρκεί να επιλέξουμε
$$\delta = \frac{\epsilon}{1-\epsilon}.$$

Παράδειγμα 5.27. Ισχύει ότι
$$\lim_{x \to 0} \frac{x+2}{\sqrt{x}} = +\infty.$$
Πράγματι, θα δείξουμε ότι
$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \mathcal{D}(f) = (0, +\infty)) \text{ με } 0 < x < \delta \Rightarrow \frac{x+2}{\sqrt{x}} > \frac{1}{\epsilon}.$$

Όμως
$$\frac{x+2}{\sqrt{x}} > \frac{2}{\sqrt{x}},\ \forall x \in (0,+\infty).$$
Άρα αρκεί να ισχύει ότι
$$\frac{2}{\sqrt{x}} > \frac{1}{\epsilon},$$
δηλαδή $x < 4\epsilon^2$. Επιλέγουμε λοιπόν $\delta = 4\epsilon^2$ και έχουμε το ζητούμενο. Σημειώνουμε ότι η τεχνική που εφαρμόσαμε σε αυτό το παράδειγμα και ειδικότερα το βήμα
$$\frac{x+2}{\sqrt{x}} > \frac{2}{\sqrt{x}},\ \forall x \in (0,+\infty),$$
εφαρμόζεται μόνο για τις περιπτώσεις που το όριο είναι ίσο με $\pm\infty$ και ποτέ για τις περιπτώσεις που έχουμε $l \in \mathbb{R}$.

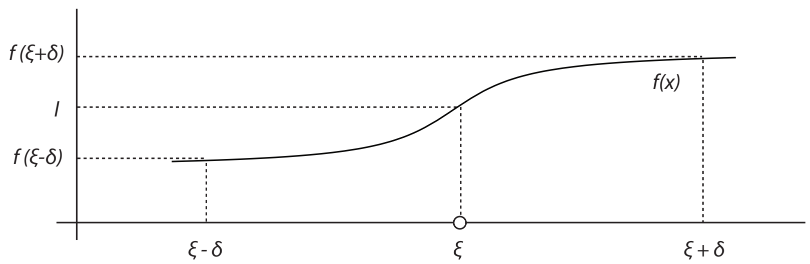
Παράδειγμα 5.28. Ισχύει ότι
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}+3} = 1.$$
Πράγματι, θα δείξουμε ότι
$$(\forall \epsilon > 0)(\exists r > 0)(\forall x \in \mathcal{D}(f) = (0,+\infty)) \text{ με } x > r \Rightarrow \left|\frac{\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}+3} - 1\right| < \epsilon.$$
Όμως
$$\left|\frac{\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}+3} - 1\right| < \epsilon \Leftrightarrow \frac{8}{\sqrt{x}+3} < \epsilon \Leftrightarrow \sqrt{x} > \frac{8}{\epsilon} - 3 \Leftrightarrow x > \left(\frac{8}{\epsilon} - 3\right)^2.$$
Επιλέγουμε λοιπόν
$$r = \left(\frac{8}{\epsilon} - 3\right)^2$$
και έχουμε το ζητούμενο.

Παράδειγμα 5.29. Θα υπολογίσουμε το
$$\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}}.$$
Δεδομένου ότι δεν έχουμε κάποια πληροφορία για την τιμή του ορίου, θεωρούμε την ακολουθία $x_\nu = \nu$, $\nu \in \mathbb{N}$, για την οποία έχουμε
$$\lim x_\nu^{\frac{1}{x_\nu}} = \lim \nu^{\frac{1}{\nu}} = \lim \sqrt[\nu]{\nu} = 1.$$
Άρα αν το όριο της $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$, $x \in (0,+\infty)$, υπάρχει, τότε αυτό θα είναι ίσο με 1. Θα εξετάσουμε λοιπόν αν ισχύει ότι
$$(\forall \epsilon > 0)(\exists r > 0)(\forall x \in \mathcal{D}(f) = (0,+\infty)) \text{ με } x > r \Rightarrow \left|x^{\frac{1}{x}} - 1\right| < \epsilon.$$
Αφού $x \to +\infty$ μπορούμε να υποθέσουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $x > 1$. Έτσι, για τυχόν $x > 1$ έχουμε ότι
$$[x] \le x < [x]+1 \Rightarrow \frac{1}{[x]+1} < \frac{1}{x} \le \frac{1}{[x]},$$
οπότε
$$[x]^{\frac{1}{[x]+1}} < [x]^{\frac{1}{x}} \le x^{\frac{1}{x}} < ([x]+1)^{\frac{1}{x}} \le ([x]+1)^{\frac{1}{[x]}},$$
δηλαδή
$$[x]^{\frac{1}{[x]+1}} < x^{\frac{1}{x}} < ([x]+1)^{\frac{1}{[x]}}.$$
Όμως, η παράσταση
$$[x]^{\frac{1}{[x]+1}}$$
για $x \in (0,+\infty)$ ορίζει μια ακολουθία πραγματικών αριθμών, η οποία είναι υπακολουθία της $\sqrt[\nu+1]{\nu}$, $\nu \in \mathbb{N}$. Ομοίως η παράσταση
$$([x]+1)^{\frac{1}{[x]}}$$
για $x \in (0,+\infty)$ ορίζει μια ακολουθία πραγματικών αριθμών, η οποία είναι υπακολουθία της $\sqrt[\nu]{\nu+1}$, $\nu \in \mathbb{N}$. Γνωρίζουμε ότι $\lim \sqrt[\nu+1]{\nu} = 1 = \lim \sqrt[\nu]{\nu+1}$, οπότε έχουμε
$$\lim \sqrt[\nu+1]{\nu} = 1 \Leftrightarrow [(\forall \epsilon > 0)(\exists \nu_1 > 0)(\forall \nu \in \mathbb{N}) \text{ με } \nu > \nu_1 \Rightarrow |\sqrt[\nu+1]{\nu} - 1| < \epsilon]$$

και
$$\lim \sqrt[\nu]{\nu+1} = 1 \Leftrightarrow [(\forall \epsilon > 0)(\exists \nu_2 > 0)(\forall \nu \in \mathbb{N}) \text{ με } \nu > \nu_2 \Rightarrow |\sqrt[\nu]{\nu+1} - 1| < \epsilon].$$
Θέτουμε $\nu_0 = \max\{\nu_1, \nu_2\}$ και $r = \nu_0 + 1$. Τότε για $\nu > r$ έχουμε
$$-\epsilon < \nu^{\frac{1}{\nu+1}} - 1 < \epsilon$$
και
$$-\epsilon < (\nu+1)^{\frac{1}{\nu}} - 1 < \epsilon,$$
συνεπώς για $x > r$ ισχύει
$$-\epsilon < [x]^{\frac{1}{[x]+1}} - 1 < x^{\frac{1}{x}} - 1 < ([x]+1)^{\frac{1}{[x]}} - 1 < \epsilon,$$
οπότε
$$-\epsilon < x^{\frac{1}{x}} - 1 < \epsilon$$
ή ισοδύναμα
$$|x^{\frac{1}{x}} - 1| < \epsilon.$$
Συνεπώς, για $r = \nu_0 + 1$, όπου το ν_0 εξαρτάται από το ϵ, έχουμε το ζητούμενο.

Θεώρημα 5.30. *Έστω $\xi \in \widetilde{\mathbb{R}}$ ένα σ.σ. του $\mathcal{D}(f)$ μιας συνάρτησης f. Αν το $\lim_{x\to\xi} f(x)$ υπάρχει στο $\widetilde{\mathbb{R}}$, τότε αυτό είναι μοναδικό.*

Θεώρημα 5.31. *Έστω ότι $\xi \in \widetilde{\mathbb{R}}$, $l \in \mathbb{R}$, και $\lim_{x\to\xi} f(x) = l$. Τότε, αν $l \neq 0$, υπάρχει δακτυλική περιοχή του ξ στην οποία ισχύει ότι $f(x) \neq 0$ και συνεπώς έχει νόημα η $\frac{1}{f}$, $\forall x \in \mathcal{D}(f) \cap N_\delta^\star(\xi)$.*



Παράδειγμα 5.32. Η συνάρτηση $f : [-1,1]\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ με τύπο
$$f(x) = \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}} \sin\frac{1}{x} - x^{-\frac{2}{3}} \cos\frac{1}{x}$$
δεν είναι φραγμένη. Πράγματι, θεωρούμε την ακολουθία
$$x_\nu = \frac{1}{2\nu\pi},\ \nu \in \mathbb{N},$$
για την οποία έχουμε
$$\lim x_\nu = \lim \frac{1}{2\nu\pi} = 0$$
και
$$\lim f(x_\nu) = \lim \left(\frac{4}{3} \left(\frac{1}{2\nu\pi}\right)^{\frac{1}{3}} \sin(2\nu\pi) - \left(\frac{1}{2\nu\pi}\right)^{-\frac{2}{3}} \cos(2\nu\pi) \right) = -\infty.$$
Άρα η f δεν είναι φραγμένη.

Σημειώνουμε εδώ ότι, σε ανάλογες περιπτώσεις, γενικά πρέπει να εξετάζουμε τα σημεία στα οποία η f δεν ορίζεται και τα άκρα του πεδίου ορισμού της.

Θεώρημα 5.33. *Αν Δ είναι το κοινό πεδίο ορισμού των συναρτήσεων f, g και ξ ένα σ.σ. του Δ και επιπλέον τα $\lim_{x\to\xi} f(x)$ και $\lim_{x\to\xi} g(x)$ υπάρχουν, τότε*

1. $\lim_{x\to\xi}(f+g)(x) = \lim_{x\to\xi} f(x) + \lim_{x\to\xi} g(x)$

2. $\lim_{x\to\xi}(fg)(x) = \lim_{x\to\xi} f(x) \lim_{x\to\xi} g(x)$
3. $\lim_{x\to\xi} |f(x)| = |\lim_{x\to\xi} f(x)|$
4. $\lim_{x\to\xi} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to\xi} f(x)}{\lim_{x\to\xi} g(x)}$, *αν* $\lim_{x\to\xi} g(x) \neq 0$,

με την προϋπόθεση ότι οι πράξεις που σημειώνονται στα όρια είναι επιτρεπτές.

Θεώρημα 5.34 (***Ισοσυγκλίνουσες συναρτήσεις***). *Αν οι συναρτήσεις* f_1, f_2, f_3 *είναι ορισμένες σε ένα σύνολο* Δ*,* ξ *είναι ένα σ.σ. του* Δ*,*

$$f_1(x) \leq f_2(x) \leq f_3(x),\ \forall x \in \Delta,$$

και

$$\lim_{x\to\xi} f_1(x) = l = \lim_{x\to\xi} f_3(x),$$

τότε το $\lim_{x\to\xi} f_2(x)$ *υπάρχει και μάλιστα* $\lim_{x\to\xi} f_2(x) = l$*.*

Θεώρημα 5.35 (***Μηδενική επί φραγμένη συνάρτηση***). *Αν οι συναρτήσεις* f_1, f_2 *είναι ορισμένες σε ένα σύνολο* Δ*,* ξ *είναι ένα σ.σ. του* Δ*, η* f_1 *είναι φραγμένη σε μια περιοχή του* ξ *και* $\lim_{x\to\xi} f_2(x) = 0$*, τότε ισχύει ότι*

$$\lim_{x\to\xi}(f_1(x)f_2(x)) = 0.$$

Σημείωση 5.36. Στο Θεώρημα 5.35 δεν απαιτείται η ύπαρξη του $\lim_{x\to\xi} f_1(x)$.

Θεώρημα 5.37 (***Όριο σύνθεσης συναρτήσεων***). *Έστω ότι οι συναρτήσεις* f *και* g *έχουν πεδία ορισμού τα* $\mathcal{D}(f)$ *και* $\mathcal{D}(g)$ *αντίστοιχα,* $\mathcal{R}(f) \subseteq \mathcal{D}(g)$*, τα* ξ *και* η *είναι σ.σ. των* $\mathcal{D}(f)$ *και* $\mathcal{D}(g)$ *αντίστοιχα,* $f(x) \neq \eta$ *για κάποια περιοχή του* ξ*,* $\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta$ *και* $\lim_{y\to\eta} g(y) = l$*. Τότε ισχύει ότι*

$$\lim_{x\to\xi}(g\circ f)(x) = \lim_{x\to\xi} g(f(x)) = l.$$

Παράδειγμα 5.38. Έστω $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$. Τότε ισχύει ότι

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{x\to0+} f\left(\frac{1}{x}\right) = l.$$

Πράγματι, αν θέσουμε $g(x) = f(\frac{1}{x})$ και $\omega(x) = \frac{1}{x}$, έχουμε $\lim_{x\to+\infty}\omega(x) = 0$, $\lim_{x\to0+}\omega(x) = +\infty$, $g(x) = (f\circ\omega)(x)$ και $f(x) = (g\circ\omega)(x)$. Έτσι, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{x\to0+} g(x) = l.$$

Έστω ότι $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$. Τότε

$$\lim_{x\to0+} g(x) = \lim_{x\to0+}(f\circ\omega)(x) = \lim_{x\to0+} f(\omega(x)) = \lim_{\omega(x)\to+\infty} f(\omega(x)) = \lim_{y\to+\infty} f(y) = l.$$

Αντίστροφα, έστω ότι $\lim_{x\to0+} g(x) = l$. Τότε

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}(g\circ\omega)(x) = \lim_{x\to+\infty}(g(\omega(x))) = \lim_{\omega(x)\to0+}(g(\omega(x))) = \lim_{y\to0+} g(y) = l.$$

Θεώρημα 5.39. *Έστω* $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ *μια αύξουσα συνάρτηση. Αν η* f *είναι άνω φραγμένη από έναν αριθμό* M*, τότε υπάρχει το* $\lim_{x\to b-} f(x)$ *και μάλιστα*

$$\lim_{x\to b-} f(x) \leq M.$$

Αν η f *δεν είναι άνω φραγμένη τότε* $\lim_{x\to b-} f(x) = +\infty$*.*

Θεώρημα 5.40. *Έστω* $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ *μια αύξουσα συνάρτηση. Αν η* f *είναι κάτω φραγμένη από έναν αριθμό* m*, τότε υπάρχει το* $\lim_{x\to a+} f(x)$ *και μάλιστα*

$$\lim_{x\to a+} f(x) \geq m.$$

Αν η f *δεν είναι κάτω φραγμένη τότε* $\lim_{x\to a+} f(x) = -\infty$*.*

Σημείωση 5.41. Για την περίπτωση που η συνάρτηση $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ είναι φθίνουσα, ισχύουν αντίστοιχα των Θεωρημάτων 5.39 και 5.40 αποτελέσματα.

Θεώρημα 5.42. *Έστω $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση.*

1. *Αν η f είναι αύξουσα, τότε*
$$\lim_{x\to b-} f(x) = \sup_{x\in(a,b)} f(x)$$
και
$$\lim_{x\to a+} f(x) = \inf_{x\in(a,b)} f(x).$$

2. *Αν η f είναι φθίνουσα, τότε*
$$\lim_{x\to b-} f(x) = \inf_{x\in(a,b)} f(x)$$
και
$$\lim_{x\to a+} f(x) = \sup_{x\in(a,b)} f(x).$$

Θεώρημα 5.43 (*Κριτήριο του Cauchy*). *Έστω $\xi \in \mathbb{R}$ ένα σ.σ. του πεδίου ορισμού μιας συνάρτησης f. Τότε το όριο $\lim_{x\to\xi} f(x)$ υπάρχει αν και μόνο αν*

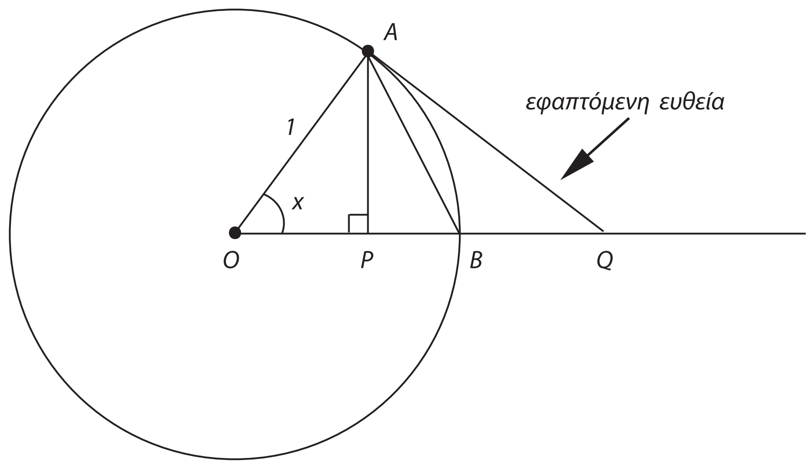
$$(\forall\epsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall x_1, x_2 \in \mathcal{D}(f)) \text{ με } 0 < |x_1 - \xi| < \delta \text{ και } 0 < |x_2 - \xi| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon.$$

Σημείωση 5.44.

1. Το κριτήριο του Cauchy μας δίνει έναν τρόπο να εξετάσουμε την ύπαρξη του ορίου μιας συνάρτησης χωρίς να χρειάζεται να γνωρίζουμε την τιμή του ορίου.

2. Το κριτήριο του Cauchy συνήθως χρησιμοποιείται ως αρνητικό κριτήριο, δηλαδή το όριο $\lim_{x\to\xi} f(x)$ δεν υπάρχει αν και μόνο αν
$$(\exists\epsilon > 0)(\forall\delta > 0)(\exists x_1, x_2 \in \mathcal{D}(f)) \text{ με } 0 < |x_1 - \xi| < \delta \text{ και } 0 < |x_2 - \xi| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| \geq \epsilon.$$

Παράδειγμα 5.45. Ισχύει ότι
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$



Γνωρίζουμε ότι το μήκος της AP είναι $\sin x$ και το μήκος της AQ είναι $\tan x$. Υποθέτουμε επίσης ότι $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Από το σχήμα είναι προφανές ότι το εμβαδό του τριγώνου OBA είναι μικρότερο του εμβαδού του κυκλικού τομέα OBA, το οποίο με τη σειρά του είναι μικρότερο του εμβαδού του τριγώνου OQA, δηλαδή
$$\frac{1}{2}\sin x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}\tan x.$$
Άρα με δεδομένο ότι $0 < x < \frac{\pi}{2}$, έχουμε
$$\sin x < x < \tan x \Rightarrow \frac{\cos x}{\sin x} < \frac{1}{x} < \frac{1}{\sin x} \Rightarrow \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

Όμως

$$0 < x < \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 < \frac{x}{2} < \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 < \sin\frac{x}{2} < \frac{x}{2}$$

και

$$\cos x = 1 - 2\sin^2\frac{x}{2} > 1 - 2\frac{x^2}{4} = 1 - \frac{x^2}{2}.$$

Άρα ισχύει ότι

$$1 - \frac{x^2}{2} < \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1, \text{ για } 0 < x < \frac{\pi}{2}.$$

Παρατηρούμε επίσης ότι $\cos(-x) = \cos x$ και $\sin(-x) = -\sin x$, οπότε η προηγούμενη σχέση ισχύει και για $-\frac{\pi}{2} < x < 0$, δηλαδή έχουμε

$$1 - \frac{x^2}{2} < \frac{\sin x}{x} < 1, \text{ για } 0 < |x| < \frac{\pi}{2}.$$

Όμως

$$\lim_{x\to 0}\left(1 - \frac{x^2}{2}\right) = 1 = \lim_{x\to 0} 1,$$

οπότε από το Θεώρημα Ισοσυγκλινουσών Συναρτήσεων έχουμε ότι

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1.$$

Παράδειγμα 5.46. Ισχύει ότι

$$\lim_{x\to b} a^x = a^b, \ a > 0, \ b \in \mathbb{R}.$$

Αρχικά θα δείξουμε ότι $\lim_{x\to 0} a^x = 1$ ή ισοδύναμα ότι

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \mathcal{D}(f)) \text{ με } 0 < |x| < \delta \Rightarrow |a^x - 1| < \epsilon.$$

Γνωρίζουμε ότι $\lim \sqrt[\nu]{a} = 1$, οπότε

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \nu_0 \in \mathbb{N})(\forall \nu \in \mathbb{N}) \text{ με } \nu > \nu_0 \Rightarrow \left|a^{\frac{1}{\nu}} - 1\right| < \epsilon.$$

Θέτουμε

$$\delta = \frac{1}{\nu_0 + 1},$$

συνεπώς

$$\left|a^\delta - 1\right| = \left|a^{\frac{1}{\nu_0+1}} - 1\right| < \epsilon.$$

1. Έστω ότι $a > 1$. Τότε

$$0 < x < \delta \Rightarrow 1 < a^x < a^\delta \Rightarrow 0 < a^x - 1 < a^\delta - 1 < \epsilon,$$

οπότε $\lim_{x\to 0+} a^x = 1$. Επίσης

$$-\delta < x < 0 \Rightarrow 0 < -x < \delta$$

και

$$\lim_{x\to 0-} a^x = \lim_{y\to 0+} a^{-y} = \lim_{y\to 0+}\frac{1}{a^y} = \frac{1}{\lim_{y\to 0+} a^y} = 1.$$

Άρα $\lim_{x\to 0} a^x = 1$.

2. Έστω ότι $a < 1$. Τότε $\frac{1}{a} > 1$ οπότε

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{a}\right)^x = 1 \Rightarrow \lim_{x\to 0} a^x = 1.$$

Δείξαμε λοιπόν ότι σε κάθε περίπτωση ισχύει ότι $\lim_{x\to 0} a^x = 1$. Έτσι, θέτοντας $x - \xi = \omega$, έχουμε

$$\lim_{x\to\xi} a^x = \lim_{\omega\to 0} a^{\xi+\omega} = \lim_{\omega\to 0} a^\xi a^\omega = a^\xi \lim_{\omega\to 0} a^\omega = a^\xi.$$

Παράδειγμα 5.47. Ισχύει ότι
$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$$
Ας είναι $(x_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ τυχούσα ακολουθία με $\lim x_\nu = +\infty$. Αφού $\lim x_\nu = +\infty$, μπορούμε χωρίς βλάβη της γενικότητας να υποθέσουμε ότι όλοι οι όροι της $(x_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ είναι αυστηρά θετικοί πραγματικοί αριθμοί. Με το ίδιο σκεπτικό, αφού $x\to+\infty$ μπορούμε να υποθέσουμε ότι $x>1$. Τότε, θεωρώντας γνωστό ότι
$$\lim\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^\nu = e,$$
έχουμε
$$\begin{aligned}[x_\nu]\le x_\nu<[x_\nu]+1 &\Rightarrow \frac{1}{[x_\nu]+1}<\frac{1}{x_\nu}\le\frac{1}{[x_\nu]}\\ &\Rightarrow \left(1+\frac{1}{[x_\nu]+1}\right)^{[x_\nu]}<\left(1+\frac{1}{x_\nu}\right)^{x_\nu}\le\left(1+\frac{1}{[x_\nu]}\right)^{[x_\nu]+1},\end{aligned}$$
αλλά
$$\left(1+\frac{1}{[x_\nu]+1}\right)^{[x_\nu]}=\left(1+\frac{1}{[x_\nu]+1}\right)^{[x_\nu]+1}\left(1+\frac{1}{[x_\nu]+1}\right)^{-1}\to e$$
και
$$\left(1+\frac{1}{[x_\nu]}\right)^{[x_\nu]+1}=\left(1+\frac{1}{[x_\nu]}\right)^{[x_\nu]}\left(1+\frac{1}{[x_\nu]}\right)^{1}\to e,$$
οπότε από το Θεώρημα Ισοσυγκλινουσών προκύπτει ότι
$$\lim\left(1+\frac{1}{x_\nu}\right)^{x_\nu}=e.$$
Επειδή η $(x_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ είναι τυχούσα αυτό σημαίνει ότι
$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Παράδειγμα 5.48. Ισχύει ότι
$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$$
Πράγματι, θέτουμε $x=-(y+1)$ και έχουμε
$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x &= \lim_{y\to+\infty}\left(1-\frac{1}{y+1}\right)^{-(y+1)} = \lim_{y\to+\infty}\left(\frac{y+1}{y}\right)^{y+1}\\ &= \lim_{y\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{y}\right)^y\left(1+\frac{1}{y}\right)\right]\\ &= e.\end{aligned}$$

Παράδειγμα 5.49. Ισχύει ότι
$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x = e^a.$$
Πράγματι, αν $a=0$, τότε προφανώς ισχύει. Για $a\neq0$, θέτοντας $y=\frac{x}{a}$, έχουμε
$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\left(1+\frac{1}{\frac{x}{a}}\right)^{\frac{x}{a}}\right)^a = \lim_{y\to\pm\infty}\left(\left(1+\frac{1}{y}\right)^y\right)^a = e^a.$$

Παράδειγμα 5.50. Ισχύει ότι
$$\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=1.$$
Πράγματι, έστω $x\in\mathbb{R}$. Τότε $(\exists\nu\in\mathbb{N})$ τέτοιο ώστε $x+\nu>0$, οπότε με τη βοήθεια της ανισότητας Bernoulli, για τυχόν $x\in\mathbb{R}$, έχουμε
$$\begin{aligned}1+\frac{x}{\nu}>0 &\Rightarrow \left(1+\frac{x}{\nu}\right)^\nu\ge1+\nu\frac{x}{\nu}=1+x\\ &\Rightarrow e^x=\lim\left(1+\frac{x}{\nu}\right)^\nu\ge\lim(1+x)=1+x\\ &\Rightarrow e^x\ge1+x.\end{aligned}$$

Περιοριζόμενοι στο διάστημα $(-1,1)$ και θέτοντας στην προηγούμενη σχέση όπου x το $-x$, έχουμε

$$e^x \leq \frac{1}{1-x}, \ \forall x \in (-1,1),$$

επομένως

$$1 + x \leq e^x \leq \frac{1}{1-x}, \ \forall x \in (-1,1),$$

ή ισοδύναμα

$$x \leq e^x - 1 \leq \frac{x}{x-1}, \ \forall x \in (-1,1).$$

1. Αν $x \in (0,1)$ τότε
$$1 \leq \frac{e^x - 1}{x} \leq \frac{1}{1-x} \Rightarrow \lim_{x\to 0+} \frac{e^x-1}{x} = 1.$$

2. Αν $x \in (-1,0)$ τότε
$$\frac{1}{1-x} \leq \frac{e^x - 1}{x} \leq 1 \Rightarrow \lim_{x\to 0-} \frac{e^x-1}{x} = 1.$$

Άρα ισχύει το ζητούμενο.

Παράδειγμα 5.51. Ισχύει ότι

$$\lim_{x\to 1} \frac{\log x}{x-1} = 1.$$

Πράγματι, αφού ενδιαφερόμαστε για το όριο όταν το x τείνει στο 1, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $x > 0$. Επίσης δείξαμε στο Παράδειγμα 5.50 ότι ισχύει

$$e^x \geq 1 + x, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Άρα έχουμε

$$x = e^{\log x} \geq 1 + \log x$$

και έτσι

$$\log x \leq x - 1,$$

οπότε θέτοντας όπου x το $\frac{1}{x}$ παίρνουμε

$$\log \frac{1}{x} \leq \frac{1}{x} - 1$$

ή ισοδύναμα

$$\log x \geq 1 - \frac{1}{x},$$

άρα τελικά έχουμε

$$1 - \frac{1}{x} \leq \log x \leq x - 1, \ \forall x > 0.$$

1. Αν $x > 1$ τότε
$$\frac{1}{x} \leq \frac{\log x}{x-1} \leq 1 \Rightarrow \lim_{x\to 1+} \frac{\log x}{x-1} = 1.$$

2. Αν $x < 1$ τότε
$$\frac{1}{x} \geq \frac{\log x}{x-1} \geq 1 \Rightarrow \lim_{x\to 1-} \frac{\log x}{x-1} = 1.$$

Άρα ισχύει το ζητούμενο.

Κεφάλαιο 6

ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Ορισμός 6.1 (**$\epsilon - \delta$ *ορισμός της συνέχειας***)**.** Μια συνάρτηση f καλείται ***συνεχής στο σημείο*** $\xi \in \mathcal{D}(f)$, αν και μόνο αν

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \mathcal{D}(f)) \text{ με } |x - \xi| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(\xi)| < \epsilon.$$

Ορισμός 6.2.

1. Μια συνάρτηση f καλείται ***συνεχής στο*** $\mathcal{D}(f)$, αν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της.
2. Μια συνάρτηση f καλείται ***συνεχής σε ένα σύνολο*** $A \subseteq \mathcal{D}(f)$, αν ο περιορισμός της στο A είναι συνεχής σε κάθε σημείο του A.

Σημείωση 6.3.

1. Σε αντίθεση με τον ορισμό του ορίου, στον ορισμό της συνέχειας υποθέτουμε ότι $\xi \in \mathcal{D}(f)$ ενώ δεν υποθέτουμε ότι το ξ είναι σ.σ. του $\mathcal{D}(f)$.
2. Σε αντίθεση με τον ορισμό του ορίου, στον ορισμό της συνέχειας δεν υποθέτουμε ότι $0 < |x - \xi|$ δηλαδή ότι $x \neq \xi$. Αντίθετα, εδώ ο ορισμός ισχύει και για $x = \xi$.
3. Αν το $\xi \in \mathcal{D}(f)$ είναι μεμονωμένο σημείο του $\mathcal{D}(f)$, τότε η f είναι συνεχής στο ξ.
4. Αν $f : \mathcal{D}(f) \to \mathbb{R}$, όπου $\mathcal{D}(f) \subseteq \mathbb{R}$, και $\xi \in \mathcal{D}(f)$ είναι σ.σ. του $\mathcal{D}(f)$, τότε η f είναι συνεχής στο ξ αν και μόνο αν
$$\lim_{x \to \xi} f(x) = f(\xi) = f(\lim_{x \to \xi} x).$$

Ορισμός 6.4 (***Ακολουθιακός ορισμός της συνέχειας***)**.** Έστω $f : \mathcal{D}(f) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και $\xi \in \mathcal{D}(f)$ σ.σ. του $\mathcal{D}(f)$. Η f καλείται ***συνεχής στο*** $\xi \in \mathcal{D}(f)$ αν και μόνο αν

$$[(\forall (x_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}) \text{ με } x_\nu \in \mathcal{D}(f), \forall \nu \in \mathbb{N}, \text{ και } \lim x_\nu = \xi] \Rightarrow \lim f(x_\nu) = f(\xi).$$

Θεώρημα 6.5. *Ο $\epsilon - \delta$ ορισμός της συνέχειας και ο ακολουθιακός ορισμός της συνέχειας είναι ισοδύναμοι.*

Απόδειξη. Έστω ότι ισχύει ο $\epsilon - \delta$ ορισμός και $(x_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ είναι τυχούσα ακολουθία στοιχείων του $\mathcal{D}(f)$ με $\lim x_\nu = \xi$. Τότε έχουμε

$$f \text{ συνεχής στο } \xi \Rightarrow [(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \mathcal{D}(f)) \text{ με } |x - \xi| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(\xi)| < \epsilon].$$

Επίσης

$$\lim x_\nu = \xi \Rightarrow [(\forall \epsilon^\star > 0)(\exists \nu_0 \in \mathbb{N})(\forall \nu \in \mathbb{N}) \nu > \nu_0 \Rightarrow |x_\nu - \xi| < \epsilon^\star].$$

Για $\epsilon^\star = \delta$ έχουμε ότι

$$(\exists \nu_0 \in \mathbb{N})(\forall \nu \in \mathbb{N}) \nu > \nu_0 \Rightarrow |x_\nu - \xi| < \delta,$$

οπότε, αφού $|x_\nu - \xi| < \delta$, από τον $\epsilon - \delta$ ορισμό της συνέχειας έχουμε $|f(x_\nu) - f(\xi)| < \epsilon$, συνεπώς δείξαμε ότι

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \nu_0 \in \mathbb{N})(\forall \nu \in \mathbb{N}) \nu > \nu_0 \Rightarrow |f(x_\nu) - f(\xi)| < \epsilon,$$

δηλαδή $\lim f(x_\nu) = f(\xi)$.

Αντίστροφα, έστω ότι ισχύει ο ακολουθιακός ορισμός της συνέχειας. Θα υποθέσουμε ότι ο $\epsilon - \delta$ ορισμός δεν ισχύει και θα καταλήξουμε σε άτοπο. Αφού ο $\epsilon - \delta$ ορισμός δεν ισχύει, έχουμε

$$(\exists \epsilon > 0)(\forall \delta > 0)(\exists x \in \mathcal{D}(f)) \text{ με } |x - \xi| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(\xi)| > \epsilon.$$

Εφαρμόζοντας το προηγούμενο για $\delta = \frac{1}{\nu}$, όπου ν είναι τυχαίος φυσικός αριθμός, έχουμε

$$(\exists \epsilon > 0)(\exists x_\nu \in \mathcal{D}(f)) \text{ με } |x_\nu - \xi| < \frac{1}{\nu} \Rightarrow |f(x_\nu) - f(\xi)| > \epsilon,$$

οπότε $\lim x_\nu = \xi$ ενώ $\lim f(x_\nu) \neq f(\xi)$, το οποίο είναι άτοπο αφού ισχύει ο ακολουθιακός ορισμός της συνέχειας στο $\xi \in \mathcal{D}(f)$. □

Παράδειγμα 6.6. Η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$, $x \in [0, +\infty)$, είναι συνεχής. Πράγματι, θα δείξουμε ότι για τυχαίο $\xi \in [0, +\infty)$ ισχύει ότι

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in [0, +\infty)) \text{ με } |x - \xi| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(\xi)| = |\sqrt{x} - \sqrt{\xi}| < \epsilon.$$

1. Αν $\xi > 0$ τότε έχουμε

$$|f(x) - f(\xi)| = |\sqrt{x} - \sqrt{\xi}| = \frac{|x - \xi|}{\sqrt{x} + \sqrt{\xi}} \leq \frac{|x - \xi|}{\sqrt{\xi}}.$$

Επιλέγουμε $\delta = \epsilon\sqrt{\xi}$, οπότε $|x - \xi| < \delta = \epsilon\sqrt{\xi}$ και έτσι

$$|f(x) - f(\xi)| \leq \frac{|x - \xi|}{\sqrt{\xi}} < \frac{\delta}{\sqrt{\xi}} = \frac{\epsilon\sqrt{\xi}}{\sqrt{\xi}} = \epsilon.$$

2. Αν $\xi = 0$, τότε για $\delta = \epsilon^2$ έχουμε $|x - \xi| = |x| < \delta = \epsilon^2$, οπότε

$$|f(x) - f(\xi)| = |\sqrt{x}| = \sqrt{x} < \sqrt{\epsilon^2} = \epsilon.$$

Άρα, σε κάθε περίπτωση έχουμε $|f(x) - f(\xi)| < \epsilon$, οπότε η f είναι πράγματι συνεχής.

Παράδειγμα 6.7. Η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \text{ ρητός} \\ 0, & x \text{ άρρητος} \end{cases}$$

είναι συνεχής μόνο για $x = 0$. Πράγματι, αρχικά θα δείξουμε ότι η f είναι συνεχής στο μηδέν. Για το σκοπό αυτό, θεωρούμε τυχούσα ακολουθία $(x_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ στοιχείων του $\mathbb{R}$, με $\lim x_\nu = 0$ και την αντίστοιχη ακολουθία των τιμών της f, $(f(x_\nu))_{\nu\in\mathbb{N}}$. Ας είναι $(x_{k_\nu})_{\nu\in\mathbb{N}}$ εκείνη η υπακολουθία της $(x_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ που αποτελείται από όλους τους ρητούς όρους και $(x_{\lambda_\nu})_{\nu\in\mathbb{N}}$ εκείνη η υπακολουθία της $(x_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ που αποτελείται από όλους τους άρρητους όρους. Τότε $f(x_{k_\nu}) = x_{k_\nu}$ και $f(x_{\lambda_\nu}) = 0$, οπότε

$$\lim f(x_{k_\nu}) = \lim x_{k_\nu} = 0$$

και

$$\lim f(x_{\lambda_\nu}) = 0,$$

δηλαδή ισχύει ότι $\lim f(x_\nu) = f(\lim x_\nu)$, οπότε η f είναι συνεχής στο μηδέν.

Ας είναι τώρα $\xi \in \mathbb{R}$ με $\xi \neq 0$. Τότε, για τυχούσα ακολουθία $(x_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ στοιχείων του $\mathbb{R}$ με $\lim x_\nu = \xi$ έχουμε, όπως και προηγούμενα, τις υπακολουθίες $(x_{k_\nu})_{\nu\in\mathbb{N}}$ των ρητών όρων και $(x_{\lambda_\nu})_{\nu\in\mathbb{N}}$ των άρρητων όρων και επιπλέον

$$\lim f(x_{k_\nu}) = \lim x_{k_\nu} = \xi$$

ενώ

$$\lim f(x_{\lambda_\nu}) = 0.$$

Όμως $\xi \neq 0$, δηλαδή το $\lim f(x_\nu)$ δεν υπάρχει, οπότε η f δεν είναι συνεχής για $\xi \neq 0$.

Θεώρημα 6.8. *Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\xi \in \mathcal{D}(f)$ και $f(\xi) \neq 0$, τότε υπάρχει περιοχή του ξ, η $N_\delta(\xi) \cap \mathcal{D}(f)$, στην οποία $f(x) \neq 0$. Ειδικότερα, αν $f(\xi) > 0$ τότε*

$$f(x) > 0, \ \forall x \in N_\delta(\xi) \cap \mathcal{D}(f),$$

και αν $f(\xi) < 0$ τότε

$$f(x) < 0, \ \forall x \in N_\delta(\xi) \cap \mathcal{D}(f).$$

Απόδειξη. Αφού η f είναι συνεχής στο ξ, αν θέσουμε $\epsilon = \frac{1}{2}|f(\xi)|$, ισχύει ότι

$$(\exists\delta > 0)(\forall x \in \mathcal{D}(f)) \text{ με } |x-\xi| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(\xi)| < \frac{1}{2}|f(\xi)|$$

οπότε

$$f(\xi) - \frac{1}{2}|f(\xi)| < f(x) < f(\xi) + \frac{1}{2}|f(\xi)|.$$

Άρα αν $f(\xi) > 0$ τότε

$$\frac{1}{2}f(\xi) < f(x) \Rightarrow f(x) > 0,\ \forall x \in \mathcal{D}(f) \text{ με } |x-\xi| < \delta,$$

ενώ αν $f(\xi) < 0$ τότε

$$f(x) < \frac{1}{2}f(\xi) \Rightarrow f(x) < 0,\ \forall x \in \mathcal{D}(f) \text{ με } |x-\xi| < \delta.$$

□

Θεώρημα 6.9. *Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\xi \in \mathcal{D}(f)$ και $f(\xi) \neq \eta$, για κάποιο $\eta \in \mathbb{R}$, τότε υπάρχει περιοχή του ξ, η $N_\delta(\xi) \cap \mathcal{D}(f)$, στην οποία ισχύει ότι $f(x) \neq \eta$. Ειδικότερα, αν $f(\xi) > \eta$, τότε*

$$f(x) > \eta,\ \forall x \in N_\delta(\xi) \cap \mathcal{D}(f),$$

και αν $f(\xi) < \eta$, τότε

$$f(x) < \eta,\ \forall x \in N_\delta(\xi) \cap \mathcal{D}(f).$$

Απόδειξη. Εφαρμόζουμε το Θεώρημα 6.8 για τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - \eta$. □

Θεώρημα 6.10. *Αν οι συναρτήσεις f και g είναι συνεχής στο σημείο ξ του κοινού πεδίου ορισμού τους, τότε οι συναρτήσεις*

$$f+g,\ f\cdot g,\ |f| \text{ και } \frac{f}{g},\ \text{ με } g(\xi) \neq 0$$

είναι επίσης συνεχείς στο ξ.

Σημείωση 6.11. Τα αντίστροφα του Θεωρήματος 6.10 γενικά δεν ισχύουν. Ισχύει όμως ότι αν η συνάρτηση f είναι συνεχής και το άθροισμα $f+g$ είναι συνεχής συνάρτηση, τότε και η g είναι συνεχής, αφού

$$g = (f+g) - f.$$

Θεώρημα 6.12. *Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\xi \in \mathcal{D}(f)$ και η συνάρτηση g, ορισμένη στο $\mathcal{R}(f)$, είναι συνεχής στο $f(\xi) \in \mathcal{R}(f)$, τότε η συνάρτηση $h = g \circ f$ είναι συνεχής στο ξ.*

Απόδειξη. Αφού η f είναι συνεχής στο ξ, έχουμε

$$(\forall\epsilon^\star > 0)(\exists\delta_1 > 0)(\forall x \in \mathcal{D}(f)) \text{ με } |x-\xi| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - f(\xi)| < \epsilon^\star.$$

Επίσης, αφού η g είναι συνεχής στο $f(\xi)$, έχουμε

$$(\forall\epsilon > 0)(\exists\delta_2 > 0)(\forall f(x) \in \mathcal{R}(f)) \text{ με } |f(x)-f(\xi)| < \delta_2 \Rightarrow |g(f(x)) - g(f(\xi))| < \epsilon.$$

Συνεπώς, για $\epsilon^\star = \delta_2$, έχουμε

$$(\exists\delta_1 > 0)(\forall x \in \mathcal{D}(f)) \text{ με } |x-\xi| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - f(\xi)| < \delta_2$$

και έτσι

$$|g(f(x)) - g(f(\xi))| < \epsilon.$$

Αυτό σημαίνει ότι η συνάρτηση $h = g \circ f$ είναι συνεχής στο ξ. □

Παράδειγμα 6.13. Η συνάρτηση

$$f(x) = \log x,\ x > 0,$$

είναι συνεχής. Πράγματι, ας είναι $(x_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ μια τυχούσα ακολουθία στοιχείων του $(0,+\infty)$, με $\lim x_\nu = \xi$ όπου ξ τυχαίος πραγματικός αριθμός. Δείξαμε στο Παράδειγμα 5.51 ότι ισχύει

$$1 - \frac{1}{x} \leq \log x \leq x - 1,\ \forall x > 0,$$

οπότε έχουμε

$$1 - \frac{\xi}{x_\nu} \leq \log\left(\frac{x_\nu}{\xi}\right) \leq \frac{x_\nu}{\xi} - 1.$$

Όμως $\lim x_\nu = \xi$, οπότε

$$\lim \frac{x_\nu}{\xi} = 1$$

και

$$\lim \frac{\xi}{x_\nu} = 1.$$

Έτσι, από το Θεώρημα Ισοσυγκλινουσών Ακολουθιών έχουμε ότι

$$\lim \log\left(\frac{x_\nu}{\xi}\right) = 0 \Leftrightarrow \lim(\log x_\nu - \log \xi) = 0 \Leftrightarrow \lim \log x_\nu = \log \xi.$$

Ορισμός 6.14. 1. Αν η f δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο $\xi \in \mathcal{D}(f)$ τότε η f καλείται ***ασυνεχής στο*** ξ και το ξ καλείται ***σημείο ασυνέχειας*** της f. Ειδικότερα, η f είναι ασυνεχής στο $\xi \in \mathcal{D}(f)$ αν και μόνο αν

   (α') το ξ είναι σ.σ. του $\mathcal{D}(f)$ και το $\lim_{x\to\xi} f(x)$ δεν υπάρχει.

   (β') το $\lim_{x\to\xi} f(x)$ υπάρχει και είναι πεπερασμένος πραγματικός αριθμός διαφορετικός του $f(\xi)$.

2. Αν $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ και $\xi \in [a, b]$, τότε το ξ καλείται ***σημείο ασυνέχειας*** της f αν

   (α') $\xi \in (a, b)$ και η f δεν είναι συνεχής στο ξ.

   (β') $\xi = a$ και η f δεν είναι συνεχής από δεξιά στο a.

   (γ') $\xi = b$ και η f δεν είναι συνεχής από αριστερά στο b.

3. Αν η f είναι ασυνεχής στο $\xi \in \mathcal{D}(f)$, αλλά τα όρια στο ξ από αριστερά και από δεξιά υπάρχουν, τότε η ασυνέχεια καλείται ***απλή ασυνέχεια*** ή ***ασυνέχεια πρώτου είδους***. Ειδικότερα, αν

$$\lim_{x\to\xi-} f(x) = \lim_{x\to\xi+} f(x) \neq f(\xi)$$

   τότε η ασυνέχεια καλείται ***εξουδετερώσιμη***, ενώ αν

$$\lim_{x\to\xi-} f(x) \neq \lim_{x\to\xi+} f(x)$$

   τότε λέμε ότι η f παρουσιάζει στο ξ ***άλμα***.

4. Αν η f είναι ασυνεχής στο $\xi \in \mathcal{D}(f)$, το ξ είναι σ.σ. του $\mathcal{D}(f)$ και τουλάχιστον ένα από τα $\lim_{x\to\xi-} f(x)$ και $\lim_{x\to\xi+} f(x)$ δεν υπάρχει, τότε η ασυνέχεια καλείται ***ουσιώδης*** ή ***ασυνέχεια δευτέρου είδους***.

5. Μια συνάρτηση f καλείται ***ασυνεχής*** στο σύνολο A αν δεν είναι συνεχής σε ένα τουλάχιστον σημείο του A.

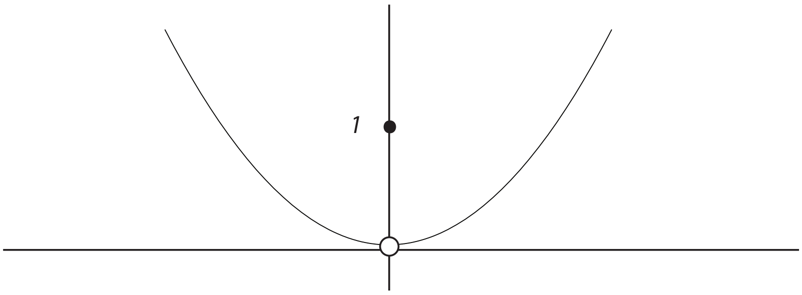
Σημείωση 6.15. Σύμφωνα με τον Ορισμό 6.14(1), μια συνάρτηση $f : \mathcal{D}(f) \to \mathbb{R}$ είναι ασυνεχής στο σημείο $\xi \in \mathcal{D}(f)$ αν και μόνο αν ισχύει ότι

$$(\exists \epsilon > 0)(\forall \delta > 0)(\exists x \in \mathcal{D}(f)) \text{ με } |x - \xi| < \delta \text{ και } |f(x) - f(\xi)| > \epsilon.$$

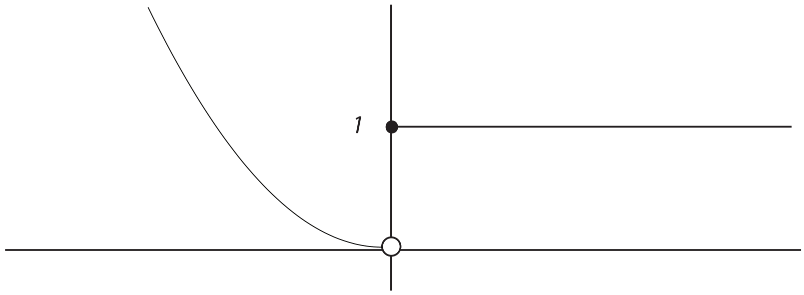
Παράδειγμα 6.16. 1. Η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in \mathbb{R}\backslash\{0\} \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

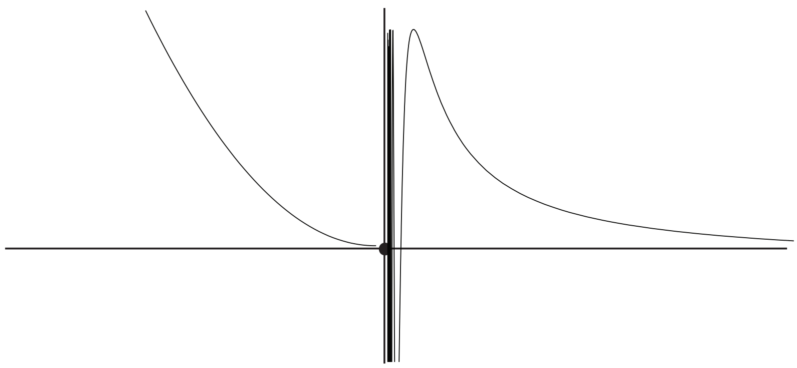
   παρουσιάζει στο σημείο 0 ασυνέχεια πρώτου είδους και συγκεκριμένα εξουδετερώσιμη ασυνέχεια.



2. Η συνάρτηση
$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in (-\infty, 0) \\ 1, & x \in [0, +\infty) \end{cases}$$
παρουσιάζει στο σημείο 0 ασυνέχεια πρώτου είδους και συγκεκριμένα άλμα.



3. Η συνάρτηση
$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in (-\infty, 0] \\ \sin\frac{1}{x}, & x \in (0, +\infty) \end{cases}$$
παρουσιάζει στο σημείο 0 ασυνέχεια δευτέρου είδους.



Θεώρημα 6.17. *Έστω ότι η συνάρτηση $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $[a, b]$. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα*

1. *η f είναι φραγμένη στο $[a, b]$.*
2. *η f παίρνει μέγιστο και ελάχιστο στο $[a, b]$.*
3. *η f έχει την ιδιότητα των ενδιαμέσων τιμών, δηλαδή αν $c, d \in [a, b]$ με $f(c) \neq f(d)$, τότε για κάθε $\eta \in (\min\{f(c), f(d)\}, \max\{f(c), f(d)\})$ υπάρχει $\xi \in (c, d)$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = \eta$.*

Σημείωση 6.18. Ως πόρισμα του Θεωρήματος 6.17 (3) λαμβάνουμε το γνωστό ως ***Θεώρημα του Bolzano***, το οποίο διατυπώνεται ως εξής: Αν η συνάρτηση $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $[a, b]$ και $f(a)f(b) < 0$, τότε υπάρχει $\xi \in (a, b)$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = 0$.

Θεώρημα 6.19. *Έστω I ένα διάστημα και $f : I \to \mathbb{R}$ συνεχής στο I. Τότε το σύνολο $f(I)$ είναι διάστημα.*

Θεώρημα 6.20 (*Θεώρημα Σταθερού Σημείου του Brouwer*). *Έστω $f : [a, b] \to [a, b]$ μια συνεχής συνάρτηση. Τότε υπάρχει $\xi \in [a, b]$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = \xi$.*

Σημείωση 6.21. Το σημείο ξ του Θεωρήματος 6.20 καλείται ***σταθερό σημείο της συνάρτησης*** f.

Ορισμός 6.22. Μια συνάρτηση f καλείται ***ομοιόμορφα συνεχής*** αν και μόνο αν
$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x, y \in \mathcal{D}(f))|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

Σημείωση 6.23.
1. Η ιδιότητα της συνέχειας αναφέρεται σε σημείο ενώ η ομοιόμορφη συνέχεια αναφέρεται σε διάστημα.
2. Στον ορισμό της συνέχειας το δ εξαρτάται από το ξ, ενώ στον ορισμό της ομοιόμορφης συνέχειας αυτό δεν συμβαίνει.
3. Η ομοιόμορφη συνέχεια συνεπάγεται τη συνέχεια, όπως προκύπτει εφαρμόζοντας τον Ορισμό 6.22 για $y = \xi$.
4. Μια συνάρτηση είναι ομοιόμορφα συνεχής σε ένα σύνολο A αν είναι συνεχής σε κάθε $\xi \in A$ και επιπλέον το γενικά διαφορετικό δ που προκύπτει από τον ορισμό της συνέχειας για τα διάφορα ξ, συμβαίνει να είναι το ίδιο για όλα τα ξ.

Θεώρημα 6.24. *Αν η συνάρτηση $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $[a, b]$ τότε είναι και ομοιόμορφα συνεχής.*

Θεώρημα 6.25. *Η $f : I \to \mathbb{R}$, όπου I διάστημα, είναι ομοιόμορφα συνεχής στο I αν και μόνο αν*

(για τυχούσες ακολουθίες $(x_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}, (y_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ στοιχείων του I) με $\lim(x_\nu - y_\nu) = 0 \Rightarrow \lim(f(x_\nu) - f(y_\nu)) = 0$.

Σημείωση 6.26. Από το Θεώρημα 6.25 προκύπτει το ακόλουθο κριτήριο μη ομοιόμορφης συνέχειας: Μία συνάρτηση f δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής σε ένα διάστημα I αν υπάρχει πραγματικός αριθμός $\epsilon > 0$ και ακολουθίες $(x_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$, $(y_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ στοιχείων του I τέτοιες ώστε

$$\lim(x_\nu - y_\nu) = 0$$

και

$$|f(x_\nu) - f(y_\nu)| \geq \epsilon, \ \forall \nu \in \mathbb{N}.$$

Παράδειγμα 6.27.
1. Η συνάρτηση $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x^2$ είναι ομοιόμορφα συνεχής. Πράγματι, θα δείξουμε ότι
$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x, y \in [0, 1]) \text{ με } |x - y| < \delta \Rightarrow |x^2 - y^2| < \epsilon.$$
Ισχύει ότι
$$|x^2 - y^2| = |x - y||x + y| \leq |x - y|(1 + 1) = 2|x - y|$$
οπότε για $\delta = \frac{\epsilon}{2}$ έχουμε το ζητούμενο.
2. Η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x^2$ δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής. Πράγματι, για τις ακολουθίες $x_\nu = \nu + \frac{1}{\nu}$, $\nu \in \mathbb{N}$, και $y_\nu = \nu$, $\nu \in \mathbb{N}$, έχουμε
$$\lim(x_\nu - y_\nu) = \lim \frac{1}{\nu} = 0$$
ενώ
$$|f(x_\nu) - f(y_\nu)| = 2 + \frac{1}{\nu^2} > 2, \ \ \forall \nu \in \mathbb{N}.$$
Άρα σύμφωνα με τη Σημείωση 6.26 η f δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής.
3. Η συνάρτηση $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \frac{1}{x}$ δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής. Πράγματι, για τις ακολουθίες $x_\nu = \frac{1}{\nu}$, $\nu \in \mathbb{N}$, και $y_\nu = \frac{1}{\nu+1}$, $\nu \in \mathbb{N}$, έχουμε
$$\lim(x_\nu - y_\nu) = \lim \frac{1}{\nu(\nu + 1)} = 0$$
ενώ $|f(x_\nu) - f(y_\nu)| = 1$, $\forall \nu \in \mathbb{N}$. Άρα σύμφωνα με τη Σημείωση 6.26 η f δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής.

Παράδειγμα 6.28.
1. Η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο
$$f(x) = \frac{1}{1 + x^2}, \ \ x \in \mathbb{R},$$
είναι ομοιόμορφα συνεχής. Πράγματι, θα δείξουμε ότι
$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x, y \in \mathbb{R}) \text{ με } |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

Για τυχόντα $x, y \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$\begin{aligned}|f(x) - f(y)| &= \frac{|x-y||x+y|}{(1+x^2)(1+y^2)} \\ &\leq |x-y| \frac{|x|+|y|}{(1+x^2)(1+y^2)} \\ &= |x-y| \left[\frac{|x|}{(1+x^2)(1+y^2)} + \frac{|y|}{(1+x^2)(1+y^2)} \right].\end{aligned}$$

Όμως

$$\begin{aligned}\frac{|x|}{(1+x^2)(1+y^2)} \leq 1 &\Leftrightarrow (1+x^2)(1+y^2) \geq |x| \\ &\Leftrightarrow |x|^2(1+y^2) + (1+y^2) \geq |x| \\ &\Leftrightarrow (1+y^2)|x|^2 - |x| + (1+y^2) \geq 0.\end{aligned}$$

Για οποιοδήποτε σταθεροποιημένο $y \in \mathbb{R}$, το παραπάνω είναι ένα τριώνυμο ως προς $|x|$, με διακρίνουσα $-3(y^4 + 2y^2 + 3) < 0$, οπότε είναι πάντα θετικό, δηλαδή η ανισότητα

$$\frac{|x|}{(1+x^2)(1+y^2)} \leq 1$$

ισχύει για όλα τα $x, y \in \mathbb{R}$. Ομοίως αποδεικνύεται ότι

$$\frac{|y|}{(1+x^2)(1+y^2)} \leq 1, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Άρα τελικά έχουμε ότι $|f(x) - f(y)| \leq 2|x-y|$, οπότε για $\delta = \frac{\epsilon}{2}$ έχουμε το ζητούμενο.

2. Η συνάρτηση $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = \sqrt{x}, \quad x \in [1, +\infty),$$

είναι ομοιόμορφα συνεχής. Πράγματι, θα δείξουμε ότι

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x, y \in [1, +\infty)) \text{ με } |x-y| < \delta \Rightarrow |\sqrt{x} - \sqrt{y}| < \epsilon.$$

Έχουμε

$$|\sqrt{x} - \sqrt{y}| = \frac{|x-y|}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \leq \frac{1}{2}|x-y|,$$

οπότε για $\delta = 2\epsilon$ έχουμε το ζητούμενο.

Θεώρημα 6.29. *Έστω $f : I \to \mathbb{R}$, όπου $I \subseteq \mathbb{R}$ ένα διάστημα, μια γνησίως μονότονη και συνεχής συνάρτηση. Τότε η f έχει αντίστροφη, η οποία είναι γνησίως μονότονη και συνεχής στο $f(I)$.*

Παράδειγμα 6.30. Αν μια συνάρτηση $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής και αμφιμονοσήμαντη τότε είναι γνησίως μονότονη. Πράγματι, ας είναι $x_1, x_2 \in [a, b]$ με $a < x_1 < x_2 < b$. Τότε έχουμε τις ακόλουθες δυνατές περιπτώσεις:

1. $f(a) < f(x_1) < f(x_2) < f(b)$. Σε αυτήν την περίπτωση η f είναι γνησίως αύξουσα.
2. $f(a) > f(x_1) > f(x_2) > f(b)$. Σε αυτήν την περίπτωση η f είναι γνησίως φθίνουσα.
3. $f(x_1) < f(a) < f(b)$. Εφαρμόζοντας το Θεώρημα των Ενδιαμέσων Τιμών, έχουμε ότι υπάρχει $\xi \in (x_1, b)$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = f(a)$, το οποίο είναι άτοπο, αφού η f είναι αμφιμονοσήμαντη. Άρα αυτή η περίπτωση δεν μπορεί να υφίσταται.
4. $f(a) < f(b) < f(x_1)$. Παρόμοια με το παραπάνω αποδεικνύεται ότι αυτή η περίπτωση δεν μπορεί να υφίσταται.
5. $f(x_2) < f(a) < f(b)$. Παρόμοια με το παραπάνω αποδεικνύεται ότι αυτή η περίπτωση δεν μπορεί να υφίσταται.
6. $f(a) < f(b) < f(x_2)$. Παρόμοια με το παραπάνω αποδεικνύεται ότι αυτή η περίπτωση δεν μπορεί να υφίσταται.

Κεφάλαιο 7

ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Ορισμός 7.1. Ας είναι $f : S \to \mathbb{R}$, όπου $S \subseteq \mathbb{R}$, μια συνάρτηση και $a \in S$ ένα σημείο συσσώρευσης του S. Αν το όριο

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

υπάρχει, τότε η f καλείται ***παραγωγίσιμη*** στο σημείο a και ο αριθμός

$$f'(a) := \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

καλείται ***παράγωγος της*** f ***στο σημείο*** a.

Θεώρημα 7.2. *Αν η παράγωγος μιας συνάρτησης υπάρχει, τότε αυτή είναι μοναδική.*

Απόδειξη. Προφανής λόγω της μοναδικότητας του ορίου. □

Ορισμός 7.3. Ας είναι $f : S \to \mathbb{R}$, όπου $S \subseteq \mathbb{R}$, μια συνάρτηση και $a \in S$ ένα σημείο συσσώρευσης του S.

1. Αν το όριο $\lim_{x \to a-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ υπάρχει, τότε λέμε ότι η συνάρτηση f ***παραγωγίζεται στο*** a ***από αριστερά*** και ο αριθμός

   $$f'_-(a) := \lim_{x \to a-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

   καλείται ***παράγωγος της*** f ***στο*** a ***από αριστερά***.

2. Αν το όριο $\lim_{x \to a+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ υπάρχει, τότε λέμε ότι η συνάρτηση f ***παραγωγίζεται στο*** a ***από δεξιά*** και ο αριθμός

   $$f'_+(a) := \lim_{x \to a+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

   καλείται ***παράγωγος της*** f ***στο*** a ***από δεξιά***.

3. Αν η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο ενός συνόλου $D \subseteq S$, τότε η f καλείται ***παραγωγίσιμη στο*** D και η συνάρτηση f' καλείται ***παράγωγος της*** f ***στο*** D.

4. Αν $S = [a, b]$, όπου $a, b \in \mathbb{R}$ με $a < b$, τότε η f καλείται παραγωγίσιμη αν και μόνο αν υπάρχουν τα $f'_+(a)$, $f'_-(b)$ και $f'(x)$, για όλα τα $x \in (a, b)$.

Σημείωση 7.4. 1. Η συνάρτηση $f : S \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ παραγωγίζεται στο σημείο συσσώρευσης $a \in S$ αν και μόνο αν οι πλευρικές παράγωγοι στο σημείο a υπάρχουν και είναι ίσες.

2. Αντί του συμβολισμού $f'(x)$ χρησιμοποιούνται και οι ακόλουθοι

   $$\frac{d}{dx} f(x), \quad \frac{df(x)}{dx}, \quad \frac{df}{dx}.$$

   Αυτοί είναι μόνο συμβολισμοί και όχι πηλίκα με τη συνήθη έννοια.

3. Αν στον ορισμό της παραγώγου θέσουμε $h = x - a$, τότε προκύπτει ο παρακάτω ισοδύναμος ορισμός

   $$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}.$$

Ορισμός 7.5. Ας είναι $f : S \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση και a ένα σημείο συσσώρευσης του S. Η f είναι παραγωγίσιμη στο a αν και μόνο αν υπάρχει πραγματικός αριθμός $f'(a)$ τέτοιος ώστε για τυχούσα ακολουθία $(x_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ στοιχείων του S με $\lim x_\nu = a$ να ισχύει ότι

$$\lim \frac{f(x_\nu) - f(a)}{x_\nu - a} = f'(a).$$

Σημείωση 7.6.

1. Οι Ορισμοί 7.1 και 7.5 είναι ισοδύναμοι.
2. Από τον Ορισμό 7.5 προκύπτει το ακόλουθο αρνητικό κριτήριο: Αν υπάρχουν δυο ακολουθίες $(x_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ και $(y_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ στοιχείων του $S\backslash\{a\}$ με $\lim x_\nu = a = \lim y_\nu$ και ταυτόχρονα
$$\lim \frac{f(x_\nu) - f(a)}{x_\nu - a} \neq \lim \frac{f(y_\nu) - f(a)}{y_\nu - a},$$
τότε η συνάρτηση f δεν παραγωγίζεται στο σημείο a.

Θεώρημα 7.7. *Η συνάρτηση $f : S \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $a \in S$, όπου a τυχόν σημείο συσσώρευσης του S, αν και μόνο αν υπάρχουν $f'(a) \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$ και συνάρτηση $\lambda_a : S\backslash\{a\} \to \mathbb{R}$ με $\lim_{x\to a} \lambda_a(x) = 0$ τέτοια ώστε για τυχόν $x \in S$ με $0 < |x - a| < \delta$ να ισχύει*

$$f(x) - f(a) = f'(a)(x - a) + \lambda_a(x)(x - a)$$

ή ισοδύναμα

$$\lambda_a(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a).$$

Θεώρημα 7.8. *Ας είναι a ένα σημείο συσσώρευσης του $S \subseteq \mathbb{R}$ και $f : S \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο a τότε είναι και συνεχής στο a.*

Απόδειξη. Από το Θεώρημα 7.7 έχουμε

$$\lim_{x\to a}[f(x) - f(a)] = f'(a) \lim_{x\to a}(x - a) + \lim_{x\to a} \lambda_a(x) \lim_{x\to a}(x - a) = 0,$$

οπότε

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a),$$

δηλαδή η f είναι συνεχής στο a. □

Σημείωση 7.9.

1. Αν η $f : S \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $a \in S$ τότε δεν είναι υποχρεωτικά και παραγωγίσιμη στο a. Πράγματι, η $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = |x|$ είναι συνεχής στο μηδέν αλλά δεν είναι παραγωγίσιμη σε αυτό, αφού
$$f'_-(0) = -1 \neq +1 = f'_+(0).$$
2. Από το Θεώρημα 7.8 προκύπτει ότι αν η f δεν είναι συνεχής στο a τότε υποχρεωτικά δεν είναι παραγωγίσιμη σε αυτό.
3. Αν η συνάρτηση $f : S \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο S, τότε, ενώ η ίδια η f είναι υποχρεωτικά συνεχής στο S, η παράγωγος συνάρτηση f' δεν είναι υποχρεωτικά συνεχής στο S. Για παράδειγμα, η συνάρτηση
$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases},$$
είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, ενώ η παράγωγος συνάρτηση δεν είναι συνεχής στο σημείο μηδέν.
4. Αν η $f : S \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής τότε γράφουμε $f \in C(S)$ και αν είναι παραγωγίσιμη γράφουμε $f \in C^1(S)$.

Παράδειγμα 7.10. Έστω $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο $\xi \in (a, b)$ και έστω ότι υπάρχουν ακολουθίες $(x_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$, $(y_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ τέτοιες ώστε

$$a < x_\nu < \xi < y_\nu < b, \quad \forall \nu \in \mathbb{N},$$

και

$$\lim x_\nu = \xi = \lim y_\nu.$$

Τότε ισχύει ότι
$$f'(\xi) = \lim \frac{f(y_\nu) - f(x_\nu)}{y_\nu - x_\nu}.$$
Πράγματι, αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο ξ έχουμε ότι
$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in (a,b)) \text{ με } 0 < |x - \xi| < \delta \Rightarrow \left| \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} - f'(\xi) \right| < \epsilon.$$
Επίσης, αφού $\lim x_\nu = \xi = \lim y_\nu$, ισχύουν τα ακόλουθα
$$(\forall \epsilon^* > 0)(\exists \nu_0 \in \mathbb{N})(\forall \nu \in \mathbb{N}) \text{ με } \nu > \nu_0 \Rightarrow 0 < |x_\nu - \xi| < \epsilon^*$$
και
$$(\forall \epsilon^* > 0)(\exists \nu_1 \in \mathbb{N})(\forall \nu \in \mathbb{N}) \text{ με } \nu > \nu_1 \Rightarrow 0 < |y_\nu - \xi| < \epsilon^*.$$
Επιλέγοντας $\epsilon^* = \delta$ έχουμε τα επόμενα
$$\left| \frac{f(x_\nu) - f(\xi)}{x_\nu - \xi} - f'(\xi) \right| < \epsilon, \quad \forall \nu > \nu_0$$
και
$$\left| \frac{f(y_\nu) - f(\xi)}{y_\nu - \xi} - f'(\xi) \right| < \epsilon, \quad \forall \nu > \nu_1.$$
Έτσι, για τυχόν $\nu > \max\{\nu_0, \nu_1\}$ ισχύει
$$\begin{aligned}
|f(y_\nu) - f(x_\nu) - f'(\xi)(y_\nu - x_\nu)| &= |(f(y_\nu) - f(\xi)) - (f(x_\nu) - f(\xi)) - f'(\xi)[(y_\nu - \xi) - (x_\nu - \xi)]| \\
&\leq |(f(y_\nu) - f(\xi)) - f'(\xi)(y_\nu - \xi)| + |(f(x_\nu) - f(\xi)) - f'(\xi)(x_\nu - \xi)| \\
&\leq \epsilon|y_\nu - \xi| + \epsilon|x_\nu - \xi| \\
&= \epsilon(y_\nu - \xi) + \epsilon(\xi - x_\nu) \\
&= \epsilon(y_\nu - x_\nu) \\
&= \epsilon|y_\nu - x_\nu|.
\end{aligned}$$
Όμως $\lim(y_\nu - x_\nu) = 0$ οπότε
$$\lim \frac{f(y_\nu) - f(x_\nu)}{y_\nu - x_\nu} = f'(\xi).$$

Θεώρημα 7.11. *Ας είναι $I \subseteq \mathbb{R}$ ένα διάστημα, $a \in I$ και συναρτήσεις $f : I \to \mathbb{R}$, $g : I \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμες στο a.*

1. *Αν $k \in \mathbb{R}$, τότε η συνάρτηση kf είναι παραγωγίσιμη στο a και ισχύει ότι*
$$(kf)'(a) = kf'(a).$$
2. *Η συνάρτηση $f + g$ είναι παραγωγίσιμη στο a και ισχύει ότι*
$$(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a).$$
3. *Η συνάρτηση fg είναι παραγωγίσιμη στο a και ισχύει ότι*
$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a).$$
4. *Αν $g(a) \neq 0$, τότε η συνάρτηση $\frac{f}{g}$ είναι παραγωγίσιμη στο a και ισχύει ότι*
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}.$$

Θεώρημα 7.12. *Έστω $f : \mathcal{D}(f) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g : \mathcal{R}(f) \to \mathbb{R}$ και a σημείο συσσώρευσης του $\mathcal{D}(f)$. Υποθέτουμε ότι το $f(a) = b$ είναι σημείο συσσώρευσης του $\mathcal{R}(f)$. Αν τα $f'(a)$ και $g'(b)$ υπάρχουν, τότε η συνάρτηση $h = g \circ f : \mathcal{D}(f) \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο a και ισχύει ότι*
$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a).$$

Θεώρημα 7.13. *Έστω $I \subseteq \mathbb{R}$ ένα διάστημα και $f : I \to \mathbb{R}$ μια γνησίως μονότονη και συνεχής συνάρτηση. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $a \in I$ και $f'(a) \neq 0$, τότε η $f^{-1} : f(I) \to \mathbb{R}$ υπάρχει, είναι παραγωγίσιμη στο $b = f(a)$ και ισχύει ότι*

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}.$$

Παράδειγμα 7.14. Για τη συνάρτηση $f(x) = 4x + e^{\sin x}$, $x \in \mathbb{R}$, ισχύει $(f^{-1})'(1) = \frac{1}{5}$. Πράγματι, παρατηρούμε ότι $f(0) = 1$, $f'(0) = 5$ και

$$f'(x) = 4 + e^{\sin x} \cos x.$$

Αφού η $f'(x)$ είναι συνεχής συνάρτηση και $f'(0) = 5 > 0$, υπάρχει περιοχή $N_\delta(0)$ τέτοια ώστε $f'(x) > 0$, $\forall x \in N_\delta(0)$. Αυτό σημαίνει ότι η f είναι γνησίως μονότονη στο $N_\delta(0)$. Συνεπώς όλες οι υποθέσεις του Θεωρήματος 7.13 ικανοποιούνται και έτσι

$$(f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{5}.$$

Παράδειγμα 7.15. Ισχύουν τα ακόλουθα

1. $(e^x)' = e^x$, $x \in \mathbb{R}$.

2. $(a^x)' = a^x \log a$, $x \in \mathbb{R}$, $a > 0$.

3. $(\log|x|)' = \frac{1}{x}$, $x \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$.

Πράγματι, έχουμε

1. $(e^x)' = \lim_{h \to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x \lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^x$.

2. $(a^x)' = (e^{x \log a})' = e^{x \log a}(x \log a)' = a^x \log a$.

3. Αν $x > 0$ τότε

$$\begin{aligned}
(\log x)' &= \lim_{h \to 0} \frac{\log(x+h) - \log x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\log\left(1 + \frac{h}{x}\right)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \log\left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}} = \lim_{h \to 0} \log\left[\left(1 + \frac{1}{\frac{x}{h}}\right)^{\frac{x}{h}}\right]^{\frac{1}{x}} \\
&= \frac{1}{x}.
\end{aligned}$$

   Αν $x < 0$ τότε

$$(\log|x|)' = (\log(-x))' = \frac{1}{(-x)}(-x)' = \frac{1}{x}.$$

   Άρα σε κάθε περίπτωση έχουμε

$$(\log|x|)' = \frac{1}{x}.$$

Σημείωση 7.16. Ο παρακάτω πίνακας δίνει τις παραγώγους των στοιχειωδών συναρτήσεων.

Συνάρτηση	Παράγωγος	Περιορισμοί	Συνάρτηση	Παράγωγος	Περιορισμοί
c	0		$\mathrm{Arctan}x$	$\dfrac{1}{1+x^2}$	
e^x	e^x		$\mathrm{Arccot}x$	$-\dfrac{1}{1+x^2}$	
a^x	$a^x \log a$	$a>0$	$\sinh x$	$\cosh x$	
$\log\|x\|$	$\dfrac{1}{x}$	$x \neq 0$	$\cosh x$	$\sinh x$	
$\log\|f(x)\|$	$\dfrac{f'(x)}{f(x)}$	$f(x) \neq 0$	$\tanh x$	$\dfrac{1}{\cosh^2 x}$	
x^a	ax^{a-1}	$x>0$	$\coth x$	$-\dfrac{1}{\sinh^2 x}$	$x \neq 0$
$\sin x$	$\cos x$		$\mathrm{Arcsinh}x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	
$\cos x$	$-\sin x$		$\mathrm{Arc}_{+}\mathrm{cosh}x$	$\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$x \in (1,+\infty)$
$\tan x$	$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$x \neq k\pi + \dfrac{\pi}{2}, \forall k \in \mathbb{Z}$	$\mathrm{Arc}_{-}\mathrm{cosh}x$	$-\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$x \in (1,\infty)$
$\cot x$	$-\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$x \neq k\pi, \forall k \in \mathbb{Z}$	$\mathrm{Arctanh}x$	$\dfrac{1}{1-x^2}$	$x \in (-1,1)$
$\mathrm{Arcsin}x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \in (-1,1)$	$\mathrm{Arccoth}x$	$\dfrac{1}{1-x^2}$	$x \in \mathbb{R}\backslash[-1,1]$
$\mathrm{Arccos}x$	$-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \in (-1,1)$			

Παράδειγμα 7.17. Για τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} + x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \in \mathbb{R}\backslash\{0\} \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

έχουμε

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{x}{2} + x^2 \sin \frac{1}{x} - 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{2} + x \sin \frac{1}{x} \right) = \frac{1}{2}$$

και, για $x \neq 0$,

$$f'(x) = \frac{1}{2} + 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}.$$

Άρα ισχύει ότι

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} + 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}, & x \in \mathbb{R}\backslash\{0\} \\ \frac{1}{2}, & x = 0 \end{cases}$$

Παρατηρούμε ότι

$$\cos \frac{1}{x} = \cos \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{1}{x} = 2\nu\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{2\nu\pi + \frac{\pi}{2}}$$

και

$$\cos \frac{1}{x} = \cos 0 \Rightarrow \frac{1}{x} = 2\nu\pi \Rightarrow x = \frac{1}{2\nu\pi}.$$

Θεωρούμε τις ακολουθίες

$$x_\nu = \frac{1}{2\nu\pi + \frac{\pi}{2}}, \quad \nu \in \mathbb{N}$$

και

$$y_\nu = \frac{1}{2\nu\pi}, \quad \nu \in \mathbb{N}.$$

Για αυτές έχουμε

$$\lim f'(x_\nu) = \lim \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\nu\pi + \frac{\pi}{4}} \right) = \frac{1}{2}$$

και

$$\lim f'(y_\nu) = \lim \left(\frac{1}{2} - 1 \right) = -\frac{1}{2},$$

συνεπώς το $\lim_{x\to 0} f'(x)$ δεν υπάρχει. Αυτό σημαίνει ότι η συνάρτηση $f'(x)$ δεν είναι συνεχής στο μηδέν, ενώ, όπως προκύπτει από τον τύπο της, είναι συνεχής στο $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Επιπλέον, αν $h > 0$ είναι ένας δεδομένος πραγματικός αριθμός, η f' αλλάζει πρόσημο εντός των διαστημάτων $(-h, 0)$ και $(0, h)$. Πράγματι, θεωρούμε $\nu_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\frac{1}{\nu_0\pi} < h$, και θεωρούμε τα σημεία $x_1 = \frac{1}{\nu_0\pi}$ και $x_2 = \frac{1}{(\nu_0+1)\pi}$. Προφανώς $x_1 \in (0, h)$ και $x_2 \in (0, h)$ και επιπλέον

$$f'(x_1) = f'\left(\frac{1}{\nu_0\pi}\right) = (-1)^{\nu_0+1} + \frac{1}{2},$$

$$f'(x_2) = f'\left(\frac{1}{(\nu_0+1)\pi}\right) = (-1)^{\nu_0} + \frac{1}{2}.$$

Όμως

$$f'(x_1)f'(x_2) = \frac{1}{4} - 1 < 0$$

οπότε η f' αλλάζει πρόσημο στο (x_1, x_2). Ομοίως δουλεύουμε για το διάστημα $(-h, 0)$.

Παράδειγμα 7.18. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \le c \\ ax + b, & x > c \end{cases}$$

και αναζητούμε τα a, b ώστε να υπάρχει η $f'(c)$. Για τα πλευρικά όρια στο σημείο c έχουμε

$$\lim_{x\to c-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \lim_{x\to c-} \frac{x^2 - c^2}{x - c} = \lim_{x\to c-} (x + c) = 2c$$

και

$$\begin{aligned}\lim_{x\to c+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} &= \lim_{x\to c+} \frac{ax + b - c^2}{x - c} \\ &= \lim_{x\to c+} \frac{a(x - c) + ac + b - c^2}{x - c} \\ &= \lim_{x\to c+} \left(\frac{a(x - c)}{x - c} + \frac{ac + b - c^2}{x - c}\right) \\ &= a + \lim_{x\to c+} \frac{ac + b - c^2}{x - c}.\end{aligned}$$

Για να υπάρχει η $f'(c)$ πρέπει να υπάρχει το

$$\lim_{x\to c+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

άρα πρέπει να υπάρχει το

$$\lim_{x\to c+} \frac{ac + b - c^2}{x - c}.$$

Αν όμως $ac + b - c^2 \neq 0$, τότε

$$\lim_{x\to c+} \frac{ac + b - c^2}{x - c} = \pm\infty$$

ανάλογα με το πρόσημο της ποσότητας $ac + b - c^2$, συνεπώς πρέπει υποχρεωτικά να ισχύει $ac + b - c^2 = 0$, δηλαδή $b = c^2 - ac$. Σε αυτήν την περίπτωση το όριο

$$\lim_{x\to c+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

υπάρχει και μάλιστα

$$\lim_{x\to c+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = a.$$

Έτσι, για να υπάρχει το $f'(c)$ αρκεί να ισχύει ότι

$$\lim_{x\to c-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \lim_{x\to c+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

ή ισοδύναμα $2c = a$. Τότε $b = c^2 - ac = c^2 - 2c^2 = -c^2$. Άρα για $a = 2c$ και $b = -c^2$ η $f'(c)$ υπάρχει.

Ορισμός 7.19. 1. ***Δεύτερη παράγωγος*** της συνάρτησης f καλείται η παράγωγος της συνάρτησης f', αν αυτή υπάρχει, και συμβολίζεται με f''.

2. $\nu-$***οστή παράγωγος*** της συνάρτησης f ορίζεται να είναι η παράγωγος της $(\nu-1)-$τάξης παραγώγου της f και συμβολίζεται με $f^{(\nu)}(x)$, $\nu \in \mathbb{N}$. Ισχύει, δηλαδή, ότι

$$f^{(\nu)}(x) = (f^{(\nu-1)})'(x).$$

Θεώρημα 7.20. *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη στο $c \in (a,b)$ συνάρτηση.*

1. *Αν $f'(c) > 0$, τότε υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $f(x) > f(c), \forall x \in (c, c+\delta)$, και $f(x) < f(c), \forall x \in (c-\delta, c)$.*

2. *Αν $f'(c) < 0$, τότε υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $f(x) < f(c), \forall x \in (c, c+\delta)$, και $f(x) > f(c), \forall x \in (c-\delta, c)$.*

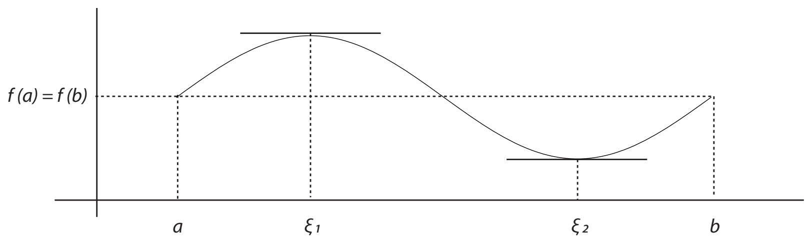
Σημείωση 7.21. Το αντίστροφο του Θεωρήματος 7.20 γενικά δεν ισχύει. Πράγματι, για τη συνάρτηση $f(x) = x^3$, $x \in \mathbb{R}$, έχουμε $f(x) < 0 = f(0)$, $\forall x \in (-\infty, 0)$, και $f(x) > 0 = f(0)$, $\forall x \in (0, +\infty)$, αλλά $f'(0) = 0$. Ισχύει όμως ότι αν $f(x) < f(c)$, $\forall x < c$, και $f(x) > f(c)$, $\forall x > c$, τότε $f'(c) \geq 0$.

Θεώρημα 7.22 (*Θεώρημα του Darboux*). *Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο κλειστό διάστημα $[a,b]$ με $f'(a) \neq f'(b)$ και k είναι ένας πραγματικός αριθμός μεταξύ των $f'(a)$ και $f'(b)$, τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $c \in (a,b)$ τέτοιο ώστε $f'(c) = k$.*

Σημείωση 7.23. Το Θεώρημα 7.22 λέει ότι αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο ενός κλειστού διαστήματος, τότε η συνάρτηση f' έχει την ιδιότητα των ενδιαμέσων τιμών. Την ιδιότητα αυτή την έχουν και οι συνεχείς σε κλειστό διάστημα συναρτήσεις. Το αξιοσημείωτο εδώ είναι ότι οι παράγωγοι, χωρίς να χρειάζεται να είναι συνεχείς συναρτήσεις, έχουν αυτήν την ιδιότητα.

Θεώρημα 7.24 (*Θεώρημα του Rolle*). *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής στο κλειστό $[a,b]$, παραγωγίσιμη στο ανοικτό (a,b) και τέτοια ώστε $f(a) = f(b)$. Τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (a,b)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$.*

Σημείωση 7.25. 1. Η γεωμετρική ερμηνεία του Θεωρήματος 7.24 δίνεται στο επόμενο σχήμα.



2. Για να ισχύει το Θεώρημα 7.24, η συνάρτηση f δεν αρκεί να είναι συνεχής στο ανοικτό (a,b), αλλά πρέπει να είναι συνεχής στο κλειστό $[a,b]$. Πράγματι, η συνάρτηση $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{αν } x \in (0,1] \\ 1, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$$

είναι συνεχής στο $(0,1)$, παραγωγίσιμη στο $(0,1)$, με $f'(x) = 1$, $\forall x \in (0,1)$, και $f(0) = 1 = f(1)$. Όμως, όπως προαναφέρθηκε, ισχύει ότι $f'(x) = 1 \neq 0$, $\forall x \in (0,1)$. Ο λόγος για τον οποίο δεν ισχύει το συμπέρασμα του Θεωρήματος 7.24 είναι ότι η f δεν είναι συνεχής στο κλειστό $[0,1]$ αλλά μόνο στο ανοικτό $(0,1)$.

Παράδειγμα 7.26. Η συνάρτηση $f : [-2,2] \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{αν } \; -2 \leq x \leq 0 \\ x - x^2 \sin\frac{\pi}{x}, & \text{αν } \; 0 < x \leq 2 \end{cases}$$

πληροί τις υποθέσεις του Θεωρήματος του Rolle. Πράγματι, έχουμε

$$\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0-} x = 0 = \lim_{x\to 0+}\left(x - x^2 \sin\frac{\pi}{x}\right) = \lim_{x\to 0+} f(x),$$

συνεπώς η f είναι συνεχής στο μηδέν. Επίσης, προφανώς είναι συνεχής στα διαστήματα $[-2,0)$ και $(0,2]$, άρα τελικά είναι συνεχής στο $[-2,2]$. Ακόμη, έχουμε

$$\lim_{x\to 0-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0-}\frac{x-0}{x-0}=1$$

και

$$\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0+}\frac{x-x^2\sin\frac{\pi}{x}-0}{x-0}=\lim_{x\to 0+}\left(1-x\sin\frac{\pi}{x}\right)=1,$$

άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο μηδέν. Επίσης, προφανώς είναι παραγωγίσιμη στα διαστήματα $(-2,0)$ και $(0,2)$, άρα τελικά είναι παραγωγίσιμη στο $(-2,2)$. Επιπλέον, είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι $f(-2)=-2=f(2)$, άρα όλες οι υποθέσεις του Θεωρήματος του Rolle ικανοποιούνται. Έτσι, υπάρχει $\xi\in(-2,2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=0$. Όμως έχουμε

$$f'(x)=\begin{cases}1, & \text{αν}\quad -2\le x\le 0\\ 1-2x\sin\frac{\pi}{x}+\pi\cos\frac{\pi}{x}, & \text{αν}\quad 0<x<2\end{cases}$$

οπότε το ξ υποχρεωτικά ανήκει στο διάστημα $(0,2)$, δηλαδή

$$1-2\xi\sin\frac{\pi}{\xi}+\pi\cos\frac{\pi}{\xi}=0.$$

Παράδειγμα 7.27. Αν η συνάρτηση $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $[a,b]$, παραγωγίσιμη στο (a,b) και η f' έχει το πολύ μια ρίζα στο (a,b), τότε η f έχει το πολύ δύο ρίζες. Πράγματι, ας υποθέσουμε ότι η f έχει τρεις ρίζες, τις $\rho_1<\rho_2<\rho_3$. Τότε εφαρμόζοντας του Θεώρημα του Rolle στο διάστημα $[\rho_1,\rho_2]$ έχουμε ότι υπάρχει $\xi_1\in(\rho_1,\rho_2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi_1)=0$. Ομοίως, εφαρμόζοντας το Θεώρημα του Rolle στο διάστημα $[\rho_2,\rho_3]$ έχουμε ότι υπάρχει $\xi_2\in(\rho_2,\rho_3)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi_2)=0$. Από τον ορισμό τους, τα ξ_1 και ξ_2 είναι διαφορετικά, οπότε καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η f' έχει τουλάχιστον δυο ρίζες, πράγμα άτοπο αφού υποθέσαμε ότι έχει το πολύ μια ρίζα.

Εφαρμόζοντας αυτό το συμπέρασμα για τη συνάρτηση $f:[-\pi,\pi]\to\mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x)=x^2-x\sin x-\cos x,\quad x\in[-\pi,\pi],$$

προκύπτει ότι η f έχει ακριβώς δυο ρίζες. Πράγματι, η f είναι συνεχής στο $[-\pi,0]$ και $f(-\pi)f(0)=-(\pi^2+1)<0$, άρα από το Θεώρημα του Bolzano προκύπτει ότι υπάρχει $\xi_1\in(-\pi,0)$ τέτοιο ώστε $f(\xi_1)=0$. Ομοίως, η f είναι συνεχής στο $[0,\pi]$ και $f(0)f(\pi)=-(\pi^2-1)<0$, άρα από το Θεώρημα του Bolzano προκύπτει ότι υπάρχει $\xi_2\in(0,\pi)$ τέτοιο ώστε $f(\xi_2)=0$. Άρα η f έχει τουλάχιστον δυο ρίζες. Όμως

$$f'(x)=0\Leftrightarrow x(2-\cos x)=0\Leftrightarrow x=0\quad\text{ή}\quad 2-\cos x=0.$$

Αφού $2-\cos x\neq 0$, $\forall x\in\mathbb{R}$, η f' μηδενίζεται αν και μόνο αν $x=0$. Συνεπώς, η f' έχει το πολύ μια ρίζα στο $(-\pi,\pi)$. Επίσης, προφανώς η f είναι συνεχής στο $[-\pi,\pi]$ και παραγωγίσιμη στο $(-\pi,\pi)$, άρα σύμφωνα με το παραπάνω συμπέρασμα η f έχει το πολύ δυο ρίζες. Έχουμε όμως δείξει ότι η f έχει τουλάχιστον δυο ρίζες, άρα τελικά έχει ακριβώς δυο ρίζες.

Παράδειγμα 7.28. Έστω $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ μια συνάρτηση δυο φορές παραγωγίσιμη με $g(a)=g(b)=0$ και $g''(x)\neq 0$, $\forall x\in(a,b)$. Τότε η δεύτερη παράγωγος της συνάρτησης

$$f(t)=g(x)(t-a)(t-b)-g(t)(x-a)(x-b),\quad a<x<b,$$

μηδενίζεται τουλάχιστον μια φορά στο (a,b) και επιπλέον $g(x)\neq 0$, $\forall x\in(a,b)$. Πράγματι, έχουμε

$$f(a)=f(x)=f(b)=0,$$

συνεπώς εφαρμόζοντας το Θεώρημα του Rolle στα διαστήματα $[a,x]$ και $[x,b]$ έχουμε ότι υπάρχουν $\xi_1\in(a,x)$ και $\xi_2\in(x,b)$ τέτοια ώστε $f'(\xi_1)=0=f'(\xi_2)$. Επίσης, εφαρμόζοντας το Θεώρημα του Rolle για τη συνάρτηση f' στο διάστημα $[\xi_1,\xi_2]$ έχουμε ότι υπάρχει $\xi_3\in(\xi_1,\xi_2)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi_3)=0$. Ακόμη έχουμε

$$f'(t)=g(x)(2t-a-b)-g'(t)(x-a)(x-b)$$

και

$$f''(t)=2g(x)-g''(t)(x-a)(x-b),$$

οπότε

$$0=f''(\xi_3)=2g(x)-g''(\xi_3)(x-a)(x-b)$$

και συνεπώς

$$g(x)=\frac{g''(\xi_3)(x-a)(x-b)}{2}.$$

Όμως για κάθε $x\in(a,b)$ έχουμε $x-a\neq 0$ και $x-b\neq 0$, ενώ από την υπόθεση ισχύει ότι $g''(\xi_3)\neq 0$, συνεπώς τελικά ισχύει ότι $g(x)\neq 0$, $\forall x\in(a,b)$.

Θεώρημα 7.29 (***Θεώρημα Μέσης Τιμής του Lagrange***). *Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $[a, b]$ και παραγωγίσιμη στο (a, b). Τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (a, b)$ τέτοιο ώστε*

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(\xi).$$

Απόδειξη. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$g(x) = f(x) - f(a) - \left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right)(x - a).$$

Παρατηρούμε ότι η g είναι συνεχής στο $[a, b]$, παραγωγίσιμη στο (a, b) και

$$g(a) = 0 = g(b).$$

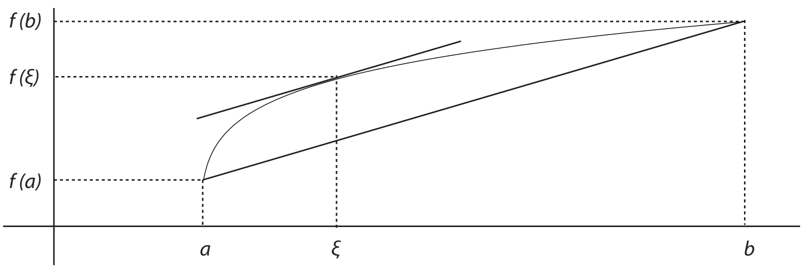
Άρα, σύμφωνα με το Θεώρημα του Rolle, υπάρχει $\xi \in (a, b)$ τέτοιο ώστε $g'(\xi) = 0$ ή ισοδύναμα

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a).$$

□

Σημείωση 7.30.

1. Γεωμετρικά το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Lagrange μας λέει ότι υπάρχει ένα σημείο $\xi \in (a, b)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη στο σημείο $(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη προς τη χορδή που ενώνει τα σημεία $(a, f(a))$ και $(b, f(b))$.



2. Το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Lagrange αποτελεί γενίκευση του Θεωρήματος του Rolle για την περίπτωση $f(a) \neq f(b)$ και είναι επίσης γνωστό ως ***Θεώρημα των Πεπερασμένων Αυξήσεων***.

Θεώρημα 7.31. *Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση. Τότε*

1. *η f είναι αύξουσα στο $[a, b]$ αν και μόνο αν $f'(x) \geq 0$, $\forall x \in [a, b]$.*
2. *η f είναι φθίνουσα στο $[a, b]$ αν και μόνο αν $f'(x) \leq 0$, $\forall x \in [a, b]$.*
3. *αν $f'(x) > 0$, $\forall x \in [a, b]$, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[a, b]$.*
4. *αν $f'(x) < 0$, $\forall x \in [a, b]$, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[a, b]$.*

Απόδειξη. Θα δούμε την απόδειξη για το (i), ενώ οι αποδείξεις των υπολοίπων γίνονται ανάλογα.

Έστω ότι $f'(x) \geq 0$, $\forall x \in [a, b]$, και x_1, x_2 τυχόντα στοιχεία του $[a, b]$ με $x_1 < x_2$. Τότε εφαρμόζοντας το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Lagrange στο διάστημα $[x_1, x_2]$ προκύπτει ότι υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο ώστε

$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1)f'(\xi).$$

Όμως $x_2 - x_1 > 0$ και $f'(\xi) \geq 0$, άρα $f(x_2) \geq f(x_1)$, δηλαδή η f είναι αύξουσα στο $[x_1, x_2]$.

Αντίστροφα, έστω ότι η f είναι παραγωγίσιμη και αύξουσα στο $[x_1, x_2]$. Θεωρούμε επίσης ένα τυχαίο $c \in [a, b]$. Τότε, αφού η f είναι αύξουσα, για τυχόν $x \in [a, b]$, με $x \neq c$, ισχύει ότι

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} > 0.$$

Έτσι

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0,$$

δηλαδή $f'(c) \geq 0$. Αφού το c είναι τυχαίο, έχουμε τελικά ότι $f'(x) \geq 0$, $\forall x \in [a, b]$. □

Σημείωση 7.32.

1. Το Θεώρημα 7.31 εξακολουθεί να ισχύει αν στη θέση του διαστήματος $[a, b]$ βάλουμε ένα οποιοδήποτε διάστημα I.

2. Στο Θεώρημα 7.31 τα αντίστροφα των (iii) και (iv) γενικά δεν ισχύουν. Πράγματι, η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x^3$ είναι γνησίως αύξουσα αλλά $f'(0) = 0$.

3. Αν για κάποιο $c \in I$ ισχύει $f'(c) > 0$ τότε η f δεν είναι αναγκαστικά αύξουσα σε μια περιοχή του c. Πράγματι, για τη συνάρτηση
$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} + x^2 \sin \frac{1}{x}, & \text{αν} \quad x \neq 0 \\ 0, & \text{αν} \quad x = 0 \end{cases}$$
έχουμε $f'(0) = \frac{1}{2} > 0$ αλλά η f δεν είναι αύξουσα σε καμία περιοχή του μηδενός. Όμως, αν $f'(c) > 0$ και η f' είναι συνεχής στο c, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε περιοχή του c.

Θεώρημα 7.33 (*Θεώρημα Μέσης Τιμής του Cauchy ή Γενικευμένο Θεώρημα Μέσης Τιμής*). *Έστω ότι f και g είναι δυο συναρτήσεις, συνεχείς στο $[a, b]$ και παραγωγίσιμες στο (a, b), με $g'(x) \neq 0$, $\forall x \in (a, b)$. Τότε υπάρχει $\xi \in (a, b)$ τέτοιο ώστε*
$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Απόδειξη. Αρχικά θα δείξουμε ότι $g(a) \neq g(b)$. Πράγματι, έστω ότι $g(a) = g(b)$. Τότε, επειδή η g είναι συνεχής στο $[a, b]$ και παραγωγίσιμη στο (a, b), από το Θεώρημα του Rolle έχουμε ότι υπάρχει $\zeta \in (a, b)$ τέτοιο ώστε $g'(\zeta) = 0$, πράγμα άτοπο λόγω της υπόθεσης $g'(x) \neq 0$, $\forall x \in (a, b)$. Άρα $g(a) \neq g(b)$. Μπορούμε, λοιπόν, να θεωρήσουμε τη συνάρτηση $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ με τύπο
$$h(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(x) - g(a)).$$
Παρατηρούμε ότι η h είναι συνεχής στο $[a, b]$, παραγωγίσιμη στο (a, b) και επιπλέον $h(a) = 0 = h(b)$. Άρα, από το Θεώρημα του Rolle, υπάρχει $\xi \in (a, b)$ τέτοιο ώστε $h'(\xi) = 0$. Έτσι έχουμε
$$f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(\xi) = 0$$
ή ισοδύναμα
$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$
□

Σημείωση 7.34. Το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Lagrange αποτελεί ειδική περίπτωση, για $g(x) = x$, του Θεωρήματος Μέσης Τιμής του Cauchy.

Παράδειγμα 7.35. Η συνάρτηση $f : [-1, b] \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $b \geq 1$, με τύπο
$$f(x) = \frac{1}{|x|}$$
δεν ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής του Lagrange. Πράγματι, το θεώρημα εφαρμόζεται μόνο σε συναρτήσεις που είναι ορισμένες σε διάστημα και όχι σε ένωση διαστημάτων, όπως συμβαίνει εδώ για την f. Παρόλα αυτά, η f ικανοποιεί το συμπέρασμα του θεωρήματος αν και μόνο αν $b > 1 + \sqrt{2}$. Πράγματι, η f ικανοποιεί το συμπέρασμα του θεωρήματος αν και μόνο αν υπάρχει $\xi \in (-1, 0) \cup (0, b)$ τέτοιο ώστε
$$f(b) - f(-1) = (b + 1) f'(\xi)$$
ή ισοδύναμα
$$f'(\xi) = \frac{1 - b}{b(b + 1)}.$$
Όμως
$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2}, & \text{αν} \quad x \in (-1, 0) \\ -\frac{1}{x^2}, & \text{αν} \quad x \in (0, b), \end{cases}$$
οπότε

1. αν $\xi \in (-1, 0)$ τότε
$$\frac{1}{\xi^2} = \frac{1-b}{b(1+b)}$$
ή ισοδύναμα
$$\xi^2 = \frac{b(1+b)}{1-b} < 0$$
το οποίο είναι αδύνατο.

2. αν $\xi \in (0, b)$ τότε
$$-\frac{1}{\xi^2} = \frac{1-b}{b(1+b)}$$
ή ισοδύναμα
$$\xi = \sqrt{\frac{b(1+b)}{b-1}}.$$
Όμως
$$\begin{aligned} 0 < \xi < b &\Leftrightarrow 0 < \frac{b(1+b)}{b-1} < b^2 \\ &\Leftrightarrow b^2 - 2b - 1 > 0 \\ &\Leftrightarrow b < 1 - \sqrt{2} \quad \text{ή} \quad b > 1 + \sqrt{2}. \end{aligned}$$
Αλλά $b \geq 1$ οπότε τελικά έχουμε $b > 1 + \sqrt{2}$.

Θεώρημα 7.36. *Έστω $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση τέτοια ώστε $|f'(x)| \leq M$, $\forall x \in (a, b)$. Τότε η f είναι ομοιόμορφα συνεχής. Το αντίστροφο γενικά δεν ισχύει.*

Απόδειξη. Θεωρούμε τυχόντα $x, y \in (a, b)$ και $\epsilon > 0$. Εφαρμόζοντας το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Lagrange στο διάστημα $[\min\{x, y\}, \max\{x, y\}]$ έχουμε ότι υπάρχει $\xi \in (\min\{x, y\}, \max\{x, y\})$ τέτοιο ώστε
$$f(x) - f(y) = (x - y)f'(\xi).$$
Όμως υποθέσαμε ότι $|f'(\xi)| \leq M$, $\forall x \in (a, b)$, οπότε έχουμε
$$f(x) - f(y) = (x - y)f'(\xi) \leq M(x - y).$$
Έτσι ισχύει ότι
$$(\forall \epsilon > 0) \left(\exists \delta > 0, \text{με } \delta = \frac{\epsilon}{M}\right) (\forall x, y \in (a, b)) \text{ με } |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq M|x - y| < M\delta = \epsilon,$$
οπότε η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.

Για το αντίστροφο, θεωρούμε τη συνάρτηση $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \sqrt{x}$, η οποία είναι ομοιόμορφα συνεχής αλλά η
$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad x \in (0, +\infty),$$
δεν είναι φραγμένη, αφού
$$\lim_{x \to 0+} f'(x) = +\infty.$$
□

Παράδειγμα 7.37. Ισχύει ότι
$$\frac{y - x}{\cos^2 x} \leq \tan y - \tan x \leq \frac{y - x}{\cos^2 y}, \quad 0 \leq x, y < \frac{\pi}{2}.$$
Πράγματι, για τυχόντα $x, y \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ και εφαρμόζοντας το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Lagrange για τη συνάρτηση $f(t) = \tan t$ στο διάστημα $[x, y]$ έχουμε ότι υπάρχει $\xi \in (x, y)$ τέτοιο ώστε
$$\tan y - \tan x = (y - x)f'(\xi) = (y - x)\frac{1}{\cos^2 \xi}.$$

Όμως ισχύει ότι

$$\begin{aligned} x<\xi<y &\Rightarrow \cos^2 y \leq \cos^2 \xi \leq \cos^2 x \\ &\Rightarrow \frac{1}{\cos^2 x} \leq \frac{1}{\cos^2 \xi} \leq \frac{1}{\cos^2 y} \\ &\Rightarrow \frac{y-x}{\cos^2 x} \leq \frac{y-x}{\cos^2 \xi} \leq \frac{y-x}{\cos^2 y}, \end{aligned}$$

οπότε τελικά έχουμε το ζητούμενο.

Παράδειγμα 7.38. Η ακολουθία $(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ με $a_1=1$ και

$$a_{\nu+1} = 1 - e^{-a_\nu}, \quad \nu \in \mathbb{N},$$

συγκλίνει. Πράγματι, έχουμε $a_1 = 1 > 0$ και υποθέτοντας ότι $a_\nu > 0$ προκύπτει ότι

$$-a_\nu < 0 \Rightarrow e^{-a_\nu} < 1 \Rightarrow -e^{-a_\nu} > -1 \Rightarrow 1 - e^{-a_\nu} > 1 - 1 = 0 \Rightarrow a_{\nu+1} > 0,$$

οπότε ισχύει ότι $a_\nu > 0$, $\forall \nu \in \mathbb{N}$. Επίσης έχουμε $a_1 = 1 \leq 1$ και υποθέτοντας ότι $a_\nu \leq 1$ προκύπτει ότι

$$-a_\nu \geq -1 \Rightarrow e^{-a_\nu} \geq e^{-1} \Rightarrow -e^{-a_\nu} \leq -e^{-1} \Rightarrow 1 - e^{-a_\nu} \leq 1 - e^{-1} < 1 \Rightarrow a_{\nu+1} \leq 1,$$

οπότε ισχύει ότι $a_\nu \leq 1$, $\forall \nu \in \mathbb{N}$. Άρα τελικά έχουμε ότι $0 < a_\nu \leq 1$, $\forall \nu \in \mathbb{N}$, δηλαδή η $(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ είναι μια φραγμένη ακολουθία.

Ακόμη, αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = 1 - e^{-x}, \quad \forall x \in [0,1],$$

έχουμε $a_{\nu+1} = f(a_\nu)$, $\forall \nu \in \mathbb{N}$. Παρατηρούμε ότι

$$f'(x) = e^{-x} > 0, \quad \forall x \in (0,1),$$

οπότε έχουμε, με τη βοήθεια του Θεωρήματος Μέσης Τιμής του Lagrange, ότι

$$a_{\nu+1} - a_\nu = f(a_\nu) - f(a_{\nu-1}) = f'(\xi_\nu)(a_\nu - a_{\nu-1}),$$

όπου $\xi_\nu \in (\min\{a_\nu, a_{\nu+1}\}, \max\{a_\nu, a_{\nu+1}\})$, οπότε, αφού $f'(\xi_\nu) > 0$, η ακολουθία $(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ είναι μονότονη. Επιπρόσθετα, από τη σχέση

$$a_2 - a_1 = -\frac{1}{e} < 0,$$

προκύπτει ότι η $(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ είναι φθίνουσα. Συνοψίζοντας, λοιπόν, έχουμε ότι η $(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ είναι μια φθίνουσα και φραγμένη ακολουθία, οπότε συγκλίνει.

Παράδειγμα 7.39. Η συνάρτηση $g : (-1,0) \cup (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$g(x) = \frac{\log(1+x)}{x}, \quad \forall x \in (-1,0) \cup (0,+\infty),$$

είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $(-1,0)$ και $(0+\infty)$. Πράγματι, έχουμε

$$g'(x) = \frac{x - (1+x)\log(1+x)}{x^2(1+x)},$$

οπότε θέτοντας

$$h(x) = x - (1+x)\log(1+x)$$

παρατηρούμε ότι το πρόσημο των g' και h είναι κοινό. Από την

$$h'(x) = -\log(1+x)$$

προκύπτει ότι

1. αν $x \in (-1,0)$ τότε
$$0 < 1 + x < 1 \Rightarrow \log(1+x) < 0 \Rightarrow h'(x) > 0$$
οπότε η h είναι γνησίως αύξουσα. Έτσι έχουμε
$$x < 0 \Rightarrow h(x) < h(0) = 0$$
οπότε η g' είναι αρνητική στο $(-1,0)$, συνεπώς η g είναι γνησίως φθίνουσα σε αυτό το διάστημα.

2. αν $x \in (0, +\infty)$ τότε
$$1 + x > 1 \Rightarrow \log(1 + x) > 0 \Rightarrow h'(x) < 0$$
οπότε η h είναι γνησίως φθίνουσα. Έτσι έχουμε
$$x > 0 \Rightarrow h(x) < h(0) = 0$$
οπότε η g' είναι αρνητική στο $(0, +\infty)$, συνεπώς η g είναι γνησίως φθίνουσα σε αυτό το διάστημα.

Άρα, συνοψίζοντας, έχουμε ότι η g είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $(-1, 0)$ και $(0 + \infty)$.

Παράδειγμα 7.40. Ισχύει ότι
$$\sin x > x - \frac{1}{6}x^3, \quad \text{για κάθε} \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}.$$
Πράγματι, θεωρούμε τη συνάρτηση $f : (0, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ με τύπο
$$f(x) = \sin x - x + \frac{1}{6}x^3.$$
Τότε έχουμε
$$f'(x) = \cos x - 1 + \frac{1}{2}x^2,$$
$$f''(x) = -\sin x + x,$$
και
$$f^{(3)}(x) = -\cos x + 1.$$
Παρατηρούμε ότι $f^{(3)}(x) > 0$, $\forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, οπότε η f'' είναι γνησίως αύξουσα και έτσι έχουμε
$$x > 0 \Rightarrow f''(x) > f''(0) = 0 \Rightarrow f''(x) > 0.$$
Άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα οπότε έχουμε
$$x > 0 \Rightarrow f'(x) > f'(0) = 0.$$
Συνεπώς η f είναι γνησίως αύξουσα και έτσι
$$x > 0 \Rightarrow f(x) > f(0) = 0 \Rightarrow f(x) > 0,$$
δηλαδή ισχύει το ζητούμενο.

Παράδειγμα 7.41. Ισχύει ότι
$$x \log x - a \log a - (x - a)\left(1 + \log\frac{a + x}{2}\right) < 0, \quad \text{για κάθε} \quad 0 < a < x.$$
Πράγματι, για σταθερό $a > 0$ θεωρούμε τη συνάρτηση
$$f(x) = x \log x - a \log a - (x - a)\left(1 + \log\frac{a + x}{2}\right), \quad x \in (a, +\infty).$$
Τότε έχουμε
$$f'(x) = \log x - \log\frac{a + x}{2} - \frac{x - a}{x + a}$$
και
$$f''(x) = \frac{a(a - x)}{x(x + a)^2}.$$
Παρατηρούμε ότι για τυχόν $x > a$ ισχύει ότι $f''(x) < 0$, οπότε η f' είναι γνησίως φθίνουσα. Έτσι έχουμε
$$x > a \Rightarrow f'(x) < f'(a) = 0,$$
οπότε η f είναι επίσης γνησίως φθίνουσα και έτσι έχουμε ότι
$$x > a \Rightarrow f(x) < f(a) = 0,$$
δηλαδή ισχύει το ζητούμενο.

Παράδειγμα 7.42. Αν η συνάρτηση $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ έχει φραγμένη παράγωγο στο (a, b) τότε είναι και η ίδια φραγμένη στο (a, b). Πράγματι, ας είναι x_0 ένα τυχαία επιλεγμένο αλλά σταθερό σημείο του (a, b) και x ένα τυχαίο σημείο του (a, b) με $x < x_0$. Θεωρούμε τον περιορισμό της συνάρτησης f στο διάστημα $[x, x_0]$ για τον οποίο, από το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Lagrange, έχουμε ότι υπάρχει $\xi \in (x, x_0)$ τέτοιο ώστε

$$f(x_0) - f(x) = f'(\xi)(x_0 - x),$$

οπότε

$$|f(x_0) - f(x)| < M(b - a).$$

Έτσι έχουμε

$$|f(x)| = |f(x) - f(x_0) + f(x_0)| \leq |f(x) - f(x_0)| + |f(x_0)| < M(b - a) + |f(x_0)|.$$

Επειδή η ποσότητα $M(b - a) + |f(x_0)|$ είναι ανεξάρτητη του x, έχουμε ότι η f είναι φραγμένη.

Παράδειγμα 7.43. Αν για τη συνάρτηση f υπάρχει η f'' στο διάστημα $[a, b]$ και $f(a) > 0$, $f(b) = f'(b) = 0$, τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (a, b)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi) > 0$. Πράγματι, εφαρμόζοντας το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Lagrange για τη συνάρτηση f στο διάστημα $[a, b]$, έχουμε ότι υπάρχει $\zeta \in (a, b)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\zeta) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = -\frac{f(a)}{b - a} < 0.$$

Εφαρμόζοντας ξανά το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Lagrange για τη συνάρτηση f' στο διάστημα $[\zeta, b]$, έχουμε ότι υπάρχει $\xi \in (\zeta, b)$ τέτοιο ώστε

$$f''(\xi) = \frac{f'(b) - f'(\zeta)}{b - \zeta} = -\frac{f'(\zeta)}{b - \zeta} > 0.$$

Παράδειγμα 7.44. Ισχύει ότι

$$(a + b)^r \leq a^r + b^r, \quad 0 \leq r \leq 1, \quad a, b \in (0, +\infty).$$

Πράγματι, παρατηρούμε ότι για $r = 0$ έχουμε

$$(a + b)^0 \leq a^0 + b^0 \Leftrightarrow 1 \leq 2,$$

που ισχύει, και για $r = 1$ έχουμε

$$(a + b)^1 \leq a^1 + b^1 \Leftrightarrow a + b \leq a + b,$$

που επίσης ισχύει. Επιπλέον, για τυχόν $r \in (0, 1)$ έχουμε

$$(a + b)^r \leq a^r + b^r \Leftrightarrow \left(1 + \frac{b}{a}\right)^r \leq 1 + \left(\frac{b}{a}\right)^r.$$

Θέτοντας $x = \frac{b}{a}$ η τελευταία σχέση παίρνει τη μορφή

$$(1 + x)^r \leq 1 + x^r$$

ή ισοδύναμα

$$(1 + x)^r - 1 - x^r \leq 0.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = (1 + x)^r - 1 - x^r,$$

για την οποία, από το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Lagrange για το διάστημα $[0, y]$, $y > 0$, έχουμε ότι υπάρχει $\xi \in (0, y)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(y) - f(0)}{y - 0} = \frac{f(y)}{y} \Leftrightarrow r(1 + \xi)^{r-1} - r\xi^{r-1} = \frac{f(y)}{y}.$$

Όμως ισχύει ότι

$$\begin{aligned} \xi + 1 > \xi &\Rightarrow (1 + \xi)^{r-1} < \xi^{r-1} \Rightarrow (1 + \xi)^{r-1} - \xi^{r-1} < 0 \\ &\Rightarrow r[(1 + \xi)^{r-1} - \xi^{r-1}] < 0 \Rightarrow r(1 + \xi)^{r-1} - r\xi^{r-1} < 0 \\ &\Rightarrow \frac{f(y)}{y} < 0 \Rightarrow f(y) < 0 \Rightarrow (1 + y)^r - 1 - y^r < 0. \end{aligned}$$

Επειδή το τελευταίο ισχύει για τυχόν $y > 0$, έχουμε τελικά το ζητούμενο.

Παράδειγμα 7.45. Ισχύει ότι

$$\frac{y-x}{1+y^2} < \text{Arctan}y - \text{Arctan}x < \frac{y-x}{1+x^2}, \quad x \neq y, \quad 0 < x, y.$$

Πράγματι, θεωρούμε τυχόντα $x, y \in (0, +\infty)$ και έστω ότι $x < y$. Επίσης, θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(t) = \text{Arctan}t, \quad t \in [x, y].$$

Τότε, από το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Lagrange έχουμε ότι υπάρχει $\xi \in (x, y)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \Leftrightarrow \frac{y-x}{1+\xi^2} = \text{Arctan}y - \text{Arctan}x.$$

Όμως

$$\begin{aligned} x < \xi < y \Rightarrow 1 + x^2 < 1 + \xi^2 < 1 + y^2 \Rightarrow \frac{1}{1+y^2} < \frac{1}{1+\xi^2} < \frac{1}{1+x^2} \\ \Rightarrow \frac{y-x}{1+y^2} < \frac{y-x}{1+\xi^2} < \frac{y-x}{1+x^2} \Rightarrow \frac{y-x}{1+y^2} < \text{Arctan}y - \text{Arctan}x < \frac{y-x}{1+x^2}. \end{aligned}$$

Θεώρημα 7.46. *Έστω ότι οι f και g είναι ορισμένες στο $[a, b]$ με $f(a) = g(a) = 0$ και $g(x) \neq 0$, $\forall x \in (a, b)$. Αν οι f, g είναι παραγωγίσιμες στο a και $g'(a) \neq 0$, τότε το όριο της $\frac{f}{g}$ στο a υπάρχει και είναι ίσο με $\frac{f'(a)}{g'(a)}$, δηλαδή*

$$\lim_{x \to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}.$$

Απόδειξη. Από τη σχέση $f(a) = g(a) = 0$, για τυχόν $x \in (a, b)$, έχουμε ότι

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\frac{g(x)-g(a)}{x-a}},$$

οπότε, αφού οι f, g παραγωγίζονται στο a, έχουμε

$$\lim_{x \to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to a+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\lim_{x \to a+} \frac{g(x)-g(a)}{x-a}} = \frac{f'(a)}{g'(a)}.$$

□

Θεώρημα 7.47 (*Κανόνας του De L' Hôpital*). *Έστω ότι οι f, g είναι συνεχείς στο $[a, b]$, παραγωγίσιμες στο (a, b), $f(a) = g(a) = 0$ και $g'(x) \neq 0$, $\forall x \in (a, b)$. Αν*

$$\lim_{x \to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\},$$

τότε ισχύει ότι

$$\lim_{x \to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = l.$$

Απόδειξη. Αν $l \in \mathbb{R}$ τότε ισχύει ότι

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in (a, a + \delta)) \Rightarrow \left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - l \right| < \epsilon.$$

Όμως, για τυχόν $x \in (a, a + \delta)$, από το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Cauchy, υπάρχει $\xi \in (a, x)$ τέτοιο ώστε

$$\frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

ή ισοδύναμα

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)},$$

οπότε έχουμε

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - l \right| = \left| \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - l \right| < \epsilon,$$

αφού $\xi \in (a, a+\delta)$. Επειδή η τελευταία σχέση ισχύει για τυχόν $\epsilon > 0$, έχουμε το ζητούμενο.

Αν $l = +\infty$ τότε ισχύει ότι

$$(\forall r > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in (a, a+\delta)) \Rightarrow \frac{f'(x)}{g'(x)} > r.$$

Όμως, για τυχόν $x \in (a, a+\delta)$, από το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Cauchy, υπάρχει $\xi \in (a, x)$ τέτοιο ώστε

$$\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \Leftrightarrow \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} > r.$$

Άρα τελικά ισχύει το ζητούμενο.

Αν $l = -\infty$ τότε εργαζόμενοι όπως στην περίπτωση $l = +\infty$ καταλήγουμε στο ζητούμενο συμπέρασμα.

$\square$

Σημείωση 7.48.

1. Έστω ότι $\lim_{x\to\xi} f(x) = l_1$ και $\lim_{x\to\xi} g(x) = l_2$. Αν $l_1 = 0 = l_2$ τότε το όριο του πηλίκου $\frac{f}{g}$ λέμε ότι είναι μια ***απροσδιόριστη μορφή*** και συμβολίζεται με $\frac{0}{0}$. Αυτό είναι μόνο ένας συμβολισμός για το συγκεκριμένο όριο και όχι πηλίκο με τη συνήθη έννοια. Άλλες απροσδιόριστες μορφές είναι οι $\frac{\infty}{\infty}$, $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, 0^0, 1^∞ και ∞^0.

2. Στα Θεωρήματα 7.46 και 7.47, η υπόθεση $f(a) = g(a) = 0$ μπορεί να αντικατασταθεί από την

$$\lim_{x\to a+} f(x) = \lim_{x\to a+} g(x) = 0.$$

Παράδειγμα 7.49. Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

και $g : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ με $g(x) = \sin x$. Έχουμε

$$f(0) = 0 = g(0),$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

και

$$g'(x) = \cos x.$$

Από το Θεώρημα 7.46 έχουμε ότι

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(0)}{g'(0)} = \frac{0}{1} = 0.$$

Το Θεώρημα 7.47 δεν μπορεί να εφαρμοστεί αφού το $\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ δεν υπάρχει. Επιπλέον, έχουμε

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\sin x} x \sin\frac{1}{x}\right) = 0.$$

Σημείωση 7.50. Από το Παράδειγμα 7.49 προκύπτει ότι το αντίστροφο του Θεωρήματος 7.47 γενικά δεν ισχύει. Μπορεί, δηλαδή, να υπάρχει το $\lim_{x\to a+}\frac{f(x)}{g(x)}$ χωρίς να υπάρχει το $\lim_{x\to a+}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Παράδειγμα 7.51. Θεωρούμε τις συναρτήσεις

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \end{cases}$$

και

$$g(x) = \sin x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Ισχύει ότι

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Πράγματι, έχουμε

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = \begin{cases} \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x} = \lim_{x\to 0} x = 0, & \text{αν} \quad x \in \mathbb{Q}, \\ \lim_{x\to 0}\frac{0}{x} = 0, & \text{αν} \quad x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}. \end{cases}$$

Άρα $f'(0) = 0$. Επίσης $g'(0) = 1$, οπότε

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(0)}{g'(0)} = \frac{0}{1} = 0.$$

Παρατηρούμε ότι το Θεώρημα 7.47 δε μπορεί να εφαρμοστεί γιατί η f' δεν υπάρχει για $x \neq 0$, αφού η f δεν είναι συνεχής για τέτοια x. Πράγματι, αν $\xi \neq 0$ και $(x_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$, $(y_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ είναι δυο ακολουθίες με

$$\lim x_\nu = \xi = \lim y_\nu$$

και όλοι οι όροι της $(x_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ είναι ρητοί, ενώ όλοι οι όροι της $(y_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ είναι άρρητοι, τότε

$$\lim f(x_\nu) = \lim x_\nu^2 = \xi^2$$

και

$$\lim f(y_\nu) = \lim 0 = 0.$$

Αφού $\xi \neq 0$, η f δεν είναι συνεχής στο ξ άρα ούτε παραγωγίσιμη σε αυτό.

Θεώρημα 7.52. *Αν f, g είναι δυο συναρτήσεις παραγωγίσιμες στο διάστημα (a, b) με $g'(x) \neq 0$, $\forall x \in (a, b)$,*

$$\lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$$

και $\lim_{x\to a+} g(x) = +\infty$, τότε

$$\lim_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = l.$$

Σημείωση 7.53. Στο Θεώρημα 7.52 δεν απαιτούμε να ισχύει ότι $\lim_{x\to a+} f(x) = +\infty$. Αν ισχύει αυτό, τότε αναγόμαστε στην περίπτωση $\frac{0}{0}$, αφού

$$\lim_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a+} \frac{\frac{1}{g(x)}}{\frac{1}{f(x)}},$$

με την προϋπόθεση ότι το πηλίκο έχει νόημα.

Παράδειγμα 7.54. Η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x(1+x)} - \frac{\log(1+x)}{x^2}, & \text{αν} \quad x \in (-1, 0) \cup (0, +\infty), \\ k, & \text{αν} \quad x = 0, \end{cases}$$

για $k = -\frac{1}{2}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $\left[-\frac{1}{2}, 2\right]$. Πράγματι, για να είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $\left[-\frac{1}{2}, 2\right]$, η f αρκεί να είναι συνεχής, αφού το $\left[-\frac{1}{2}, 2\right]$ είναι κλειστό διάστημα. Από τον τύπο της f διαπιστώνουμε ότι αρκεί να δείξουμε ότι αυτή είναι συνεχής στο μηδέν. Έχουμε

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} f(x) &= \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x(1+x)} - \frac{\log(1+x)}{x^2} \right) = \lim_{x\to 0} \frac{x - (1+x)\log(1+x)}{x^2(1+x)} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{1 - \log(1+x) - 1}{2x + 3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{1+x}}{2 + 6x} \\ &= -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Άρα για $k = -\frac{1}{2}$ έχουμε το ζητούμενο.

Παράδειγμα 7.55. Ισχύει ότι

$$\lim_{x\to 0+} (x^2)^x = 1.$$

Πράγματι,

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0+} (x^2)^x &= \lim_{x\to 0+} e^{x\log(x^2)} = e^{\lim_{x\to 0+} x\log(x^2)} = e^{\lim_{x\to 0+} 2x\log|x|} \\ &= e^{\lim_{x\to 0+} \frac{2\log|x|}{\frac{1}{x}}} = e^{\lim_{x\to 0+} 2\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}} = e^{\lim_{x\to 0+}(-2x)} \\ &= e^0 = 1. \end{aligned}$$

Θεώρημα 7.56 (*Τύπος του Taylor*). *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση τέτοια ώστε η $f^{(\nu-1)}(x)$ να είναι συνεχής στο $[a,b]$ και η $f^{(\nu)}(x)$ να υπάρχει στο (a,b). Αν $x_0 \in [a,b]$ τότε για οποιοδήποτε $x \in [a,b]$ υπάρχει ένας αριθμός ξ μεταξύ των x και x_0, τέτοιος ώστε*

$$f(x) = f(x_0) + \frac{x-x_0}{1!}f'(x_0) + \ldots + \frac{(x-x_0)^{\nu-1}}{(\nu-1)!}f^{(\nu-1)}(x_0) + R_\nu(x),$$

όπου

$$R_\nu(x) = \frac{(x-\xi)^{\nu-\rho}(x-x_0)^\rho}{\rho(\nu-1)!}f^{(\nu)}(\xi)$$

και ρ θετικός ακέραιος.

Σημείωση 7.57.

1. Το Θεώρημα του Taylor αποτελεί γενίκευση του Θεωρήματος Μέσης Τιμής σε παραγώγους ανώτερης τάξης και είναι επίσης γνωστό ως ***Γενικό Θεώρημα Μέσης Τιμής***.

2. Για δοθείσα συνάρτηση f, με βάση το Θεώρημα του Taylor, μπορεί να προσδιοριστεί πολυώνυμο $\nu-$οστού βαθμού

$$P_\nu(x) = A_0 + A_1(x-a) + A_2(x-a)^2 + \ldots + A_\nu(x-a)^\nu$$

τέτοιο ώστε $P_\nu(a) = f(a)$ και

$$P^{(k)}(a) = f^{(k)}(a), \quad k = 1,2,\ldots,\nu.$$

3. Το $R_\nu(x)$ καλείται ***Υπόλοιπο κατά Schlömilch και Roche***. Αν $\rho = 1$ τότε

$$R_\nu(x) = \frac{(x-x_0)(x-\xi)^{\nu-1}}{(\nu-1)!}f^{(\nu)}(\xi)$$

και το $R_\nu(x)$ καλείται ***Υπόλοιπο κατά Cauchy***. Αν $\rho = \nu$ τότε

$$R_\nu(x) = \frac{(x-x_0)^\nu}{\nu!}f^{(\nu)}(\xi)$$

και το $R_\nu(x)$ καλείται ***Υπόλοιπο κατά Lagrange***.

4. Για $x_0 = 0$ έχουμε

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!}f'(0) + \ldots + \frac{x^{\nu-1}}{(\nu-1)!}f^{(\nu-1)}(0) + R_\nu(x),$$

το οποίο ονομάζεται ***Τύπος του MacLaurin***. Σε αυτήν την περίπτωση το Υπόλοιπο κατά Schlömilch και Roche είναι

$$R_\nu(x) = \frac{(x-\xi)^{\nu-\rho}x^\rho}{\rho(\nu-1)!}f^{(\nu)}(\xi),$$

το Υπόλοιπο κατά Cauchy είναι

$$R_\nu(x) = \frac{x(x-\xi)^{\xi-1}}{(\nu-1)!}f^{(\nu)}(\xi)$$

και το Υπόλοιπο κατά Lagrange είναι

$$R_\nu(x) = \frac{x^\nu}{\nu!}f^{(\nu)}(\xi).$$

5. Χρησιμοποιώντας τον Τύπο του Taylor μπορούμε να προσεγγίσουμε μια κατάλληλη συνάρτηση από ένα πολυώνυμο, γνωρίζοντας επιπλέον και το σφάλμα που, υποχρεωτικά λόγω της προσέγγισης, κάνουμε.

Σημείωση 7.58. Από τον Τύπο του MacLaurin προκύπτουν τα ακόλουθα

1. ***Σειρά ημιτόνου***, για $x \in \mathbb{R}$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots = \sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^\nu \frac{x^{2\nu-1}}{(2\nu-1)!}$$

2. ***Σειρά συνημιτόνου***, για $x \in \mathbb{R}$
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots = \sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^{\nu}\frac{x^{2\nu}}{(2\nu)!}$$

3. ***Εκθετική σειρά***, για $x \in \mathbb{R}$
$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots = \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{x^{\nu}}{\nu!}$$

4. ***Λογαριθμική σειρά***, για $-1 < x \leq 1$
$$\log(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots = \sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^{\nu+1}\frac{x^{\nu}}{\nu}$$

5. ***Διωνυμική σειρά***, για $-1 < x < 1$
$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \ldots = 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{m(m-1)\ldots(m-\nu+1)}{(\nu-1)!}x^{\nu}$$

Θεώρημα 7.59 (*Θεώρημα του Fermat*). *Αν η συνάρτηση $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ έχει τοπικό ακρότατο σε ένα εσωτερικό σημείο a του D και υπάρχει η $f'(a)$, τότε $f'(a) = 0$.*

Απόδειξη. Έστω ότι $f'(a) > 0$. Τότε από το Θεώρημα 7.20 προκύπτει ότι υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $f(x) > f(a)$, $\forall x \in (a, a+\delta)$, και $f(x) < f(a)$, $\forall x \in (a-\delta, a)$ οπότε η f δεν παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο a, που είναι άτοπο. Ομοίως, αν $f'(a) < 0$ τότε πάλι με εφαρμογή του Θεωρήματος 7.20 καταλήγουμε σε άτοπο. Άρα υποχρεωτικά ισχύει ότι $f'(a) = 0$. □

Σημείωση 7.60.

1. Για μια συνάρτηση f μπορεί να υπάρχει σημείο a του πεδίου ορισμού της τέτοιο ώστε $f'(a) = 0$, αλλά η f να μην παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο a. Για παράδειγμα, η $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x^3$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, συνεπώς δεν παρουσιάζει ακρότατο στο μηδέν, αλλά $f'(0) = 0$.

2. Μια συνάρτηση f μπορεί να παρουσιάζει τοπικό ακρότατο σε ένα σημείο a χωρίς να υπάρχει η παράγωγος της σε εκείνο το σημείο. Για παράδειγμα, η $f(x) = |x|$, $x \in \mathbb{R}$, παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο σημείο μηδέν, αλλά δεν είναι παραγωγίσιμη στο μηδέν.

3. Αν μια συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο σε ένα εσωτερικό σημείο a του πεδίου ορισμού της, τότε ή υπάρχει η παράγωγος στο a και είναι μηδέν ή δεν υπάρχει η παράγωγος στο a. Τα εσωτερικά σημεία του πεδίου ορισμού μιας συνάρτησης f στα οποία η παράγωγος υπάρχει και είναι ίση με μηδέν ή η παράγωγος δεν υπάρχει καλούνται ***κρίσιμα σημεία*** της f.

Θεώρημα 7.61 (*Κριτήριο της πρώτης παραγώγου*). *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση και $x_0 \in (a,b)$. Υποθέτουμε επίσης ότι η f είναι παραγωγίσιμη στα διαστήματα (a, x_0) και (x_0, b).*

1. *Αν υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $f'(x) \geq 0$, $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0)$ και $f'(x) \leq 0$, $\forall x \in (x_0, x_0 + \delta)$, τότε η f έχει τοπικό μέγιστο στο x_0.*

2. *Αν υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $f'(x) \leq 0$, $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0)$ και $f'(x) \geq 0$, $\forall x \in (x_0, x_0 + \delta)$, τότε η f έχει τοπικό ελάχιστο στο x_0.*

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε το (1) ενώ το (2) αποδεικνύεται ανάλογα. Θεωρούμε τυχόν $x \in (x_0 - \delta, x_0)$. Τότε, από το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Lagrange, υπάρχει $\xi \in (x, x_0)$ τέτοιο ώστε
$$f(x_0) - f(x) = (x_0 - x)f'(\xi).$$
Όμως $f'(\xi) \geq 0$ και $x_0 - x > 0$, οπότε $f(x_0) \geq f(x)$, $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0)$. Παρόμοια αποδεικνύεται ότι $f(x) \leq f(x_0)$, $\forall x \in (x_0, x_0 + \delta)$. Άρα τελικά έχουμε $f(x) \leq f(x_0)$, $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, οπότε η f έχει τοπικό μέγιστο στο x_0. □

Παράδειγμα 7.62. Η συνάρτηση $f : [-2,2] \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = |x^2 - 1|$ έχει τοπικό μέγιστο στο σημείο μηδέν και τοπικά ελάχιστα στα σημεία -1 και 1. Πράγματι, έχουμε

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & \text{αν} \quad x \in [-2,-1] \cup [1,2], \\ 1 - x^2, & \text{αν} \quad x \in (-1,1), \end{cases}$$

και

$$f'(x) = \begin{cases} 2x, & \text{αν} \quad x \in [-2,-1) \cup (1,2], \\ -2x, & \text{αν} \quad x \in (-1,1), \end{cases}$$

ενώ για το σημείο 1 ισχύει ότι

$$f'_-(1) = \lim_{x\to 1-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1-} -\frac{x^2-1}{x-1} = -2$$

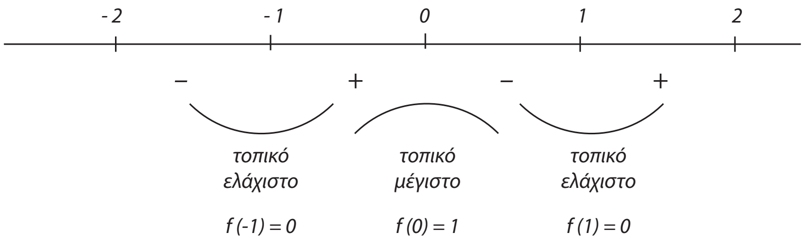
και

$$f'_+(1) = \lim_{x\to 1+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1+} \frac{x^2-1}{x-1} = 2$$

συνεπώς η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 1. Παρόμοια αποδεικνύεται ότι η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο -1. Επιπλέον, έχουμε ότι

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0,$$

οπότε τα κρίσιμα σημεία της f είναι τα $-1, 0, 1$. Από τον τύπο της f' προκύπτει ότι $f'(x) < 0$, $\forall x \in (-2,-1)$, $f'(x) > 0$, $\forall x \in (-1,0)$, $f'(x) < 0$, $\forall x \in (0,1)$, και $f'(x) > 0$, $\forall x \in (1,2)$. Έτσι, η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο μηδέν το $f(0) = 1$, τοπικό ελάχιστο στο -1 το $f(-1) = 0$ και τοπικό ελάχιστο στο 1 το $f(1) = 0$.



Θεώρημα 7.63 (***Κριτήριο της δεύτερης παραγώγου***). *Έστω $f : I \to \mathbb{R}$, όπου I ένα διάστημα, και x_0 εσωτερικό σημείο του I. Υποθέτουμε ότι η f'' υπάρχει και είναι συνεχής σε μία περιοχή του x_0 και επιπλέον ότι $f'(x_0) = 0$ και $f''(x_0) \neq 0$.*

1. *Αν $f''(x_0) > 0$, τότε η f έχει τοπικό ελάχιστο στο x_0.*
2. *Αν $f''(x_0) < 0$, τότε η f έχει τοπικό μέγιστο στο x_0.*

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε το (1) ενώ η απόδειξη του (2) γίνεται ανάλογα. Έχουμε

$$f''(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{x - x_0},$$

αφού $f'(x_0) = 0$. Επειδή $f''(x_0) > 0$, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

$$\frac{f'(x)}{x - x_0} > 0, \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta),$$

οπότε $f'(x) < 0$, $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0)$, και $f'(x) > 0$, $\forall x \in (x_0, x_0 + \delta)$. Σε αυτό το σημείο εφαρμόζουμε το κριτήριο της πρώτης παραγώγου και έχουμε το ζητούμενο. □

Θεώρημα 7.64 (***Κριτήριο της $\nu-$οστής παραγώγου***). *Έστω $f : I \to \mathbb{R}$, όπου I ένα διάστημα και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του I. Υποθέτουμε ότι υπάρχει η $f^{(\nu)}$, $\nu \geq 2$, και είναι συνεχής σε μια περιοχή του x_0. Επιπλέον, υποθέτουμε ότι*

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(\nu-1)}(x_0) = 0$$

και $f^{(\nu)}(x_0) \neq 0$.

1. *Αν ν άρτιος και $f^{(\nu)}(x_0) > 0$, τότε η f έχει τοπικό ελάχιστο στο x_0.*
2. *Αν ν άρτιος και $f^{(\nu)}(x_0) < 0$, τότε η f έχει τοπικό μέγιστο στο x_0.*
3. *Αν ν περιττός τότε η f δεν έχει ακρότατο στο x_0.*

Παράδειγμα 7.65. Για τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = \cos x - 1 + \frac{1}{2}x^2$$

έχουμε

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\sin x + x, \\ f''(x) &= -\cos x + 1, \\ f'''(x) &= \sin x, \\ f^{(4)}(x) &= \cos x, \end{aligned}$$

οπότε

$$f'(0) = f''(0) = f'''(0) = 0$$

και $f^{(4)}(0) = 1 > 0$. Άρα σύμφωνα με το κριτήριο της $\nu-$οστής παραγώγου, η f παρουσιάζει στο σημείο μηδέν τοπικό ελάχιστο, το $f(0) = 0$.

Σημείωση 7.66. Ας είναι $f : I \to \mathbb{R}$, όπου I διάστημα του $\mathbb{R}$, μια τυχούσα συνάρτηση. Τότε

$$\sup_{x\in I} f(x) = \max\{\sup\{M : \ M \text{ τοπικό μέγιστο της } f\}, \lim_{x\to\inf I+} f(x), \lim_{x\to\sup I-} f(x)\}$$

και

$$\inf_{x\in I} f(x) = \min\{\inf\{m : \ m \text{ τοπικό ελάχιστο της } f\}, \lim_{x\to\inf I+} f(x), \lim_{x\to\sup I-} f(x)\}.$$

Παράδειγμα 7.67. Η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = e^x + e^{-x} + 2\cos x$$

παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο σημείο μηδέν. Πράγματι, έχουμε

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^x - e^{-x} - 2\sin x, \\ f''(x) &= e^x + e^{-x} - 2\cos x, \\ f'''(x) &= e^x - e^{-x} + 2\sin x, \\ f^{(4)}(x) &= e^x + e^{-x} + 2\cos x, \end{aligned}$$

οπότε

$$f'(0) = f''(0) = f'''(0) = 0$$

και $f^{(4)}(0) = 4 > 0$. Άρα σύμφωνα με το κριτήριο της $\nu-$οστής παραγώγου, η f παρουσιάζει στο σημείο μηδέν τοπικό ελάχιστο, το $f(0) = 4$.

Παράδειγμα 7.68. Η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2}, & \text{αν } \ x > 0, \\ 3x^2, & \text{αν } \ x \leq 0, \end{cases}$$

παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο μηδέν, αλλά η f' δεν αλλάζει πρόσημο σε κάποια περιοχή του μηδενός. Πράγματι, έχουμε

$$f'(x) = \begin{cases} -\frac{2}{x^3}, & \text{αν } \ x > 0, \\ 6x, & \text{αν } \ x < 0, \end{cases}$$

ενώ για $x = 0$ παρατηρούμε ότι

$$\lim_{x\to 0-} \frac{3x^2 - 0}{x - 0} = 0 \neq +\infty = \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{x^2} - 0}{x},$$

οπότε η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο μηδέν. Έτσι $f'(x) < 0$, $\forall x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, ενώ είναι προφανές ότι $f(x) \geq 0 = f(0)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Παράδειγμα 7.69. Η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \cot x - \frac{1}{x}, & \text{αν} \quad 0 < |x| \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0, & \text{αν} \quad x = 0, \end{cases}$$

παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο σημείο $-\frac{\pi}{2}$ και ολικό ελάχιστο στο σημείο $\frac{\pi}{2}$. Πράγματι, έχουμε

$$f'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{x^2}, \quad \forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \setminus \{0\},$$

και επιπλέον με τη βοήθεια των κανόνων De L' Hôpital ισχύει ότι

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cot x - \frac{1}{x} - 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x^2 \sin x} = \lim_{x \to 0} \frac{-\cos x}{3 \cos x - x \sin x} = -\frac{1}{3},$$

δηλαδή $f'(0) = -\frac{1}{3}$. Όμως αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $g(t) = \sin t$, $t \in [0, x]$, για τυχόν $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ έχουμε από το Θεώρημα Μέσης Τιμής ότι

$$|\sin x| = |\sin x - \sin 0| = |(x - 0) \cos \xi| \leq |x|,$$

όπου $\xi \in (0, x)$. Άρα

$$\sin^2 x - x^2 \leq 0, \quad \forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right],$$

και έτσι

$$f'(x) \leq 0, \quad \forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

Συνεπώς η f είναι φθίνουσα στο πεδίο ορισμού της, οπότε παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο αριστερό άκρο, δηλαδή στο $-\frac{\pi}{2}$, και ολικό ελάχιστο στο δεξιό άκρο, δηλαδή στο $\frac{\pi}{2}$.

Παράδειγμα 7.70. Η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{1}{\cosh x} - \tanh x, \quad x \in \mathbb{R},$$

έχει μέγιστη τιμή ίση με $\sqrt{2}$. Πράγματι, έχουμε

$$f'(x) = -\frac{1 + \sinh x}{\cosh^2 x}$$

και

$$f''(x) = \frac{\sinh^2 x + 2 \sinh x - 1}{\cosh^3 x},$$

οπότε

$$f'(\xi) = 0 \Leftrightarrow \sinh \xi = -1$$

και για αυτό το ξ έχουμε

$$f''(\xi) = \frac{\sinh^2 \xi + 2 \sinh \xi - 1}{\cosh^3 \xi} = -\frac{2}{\cosh^3 \xi} < 0.$$

Άρα το μόνο εσωτερικό σημείο στο οποίο η f παρουσιάζει ακρότατο είναι το ξ για το οποίο έχουμε $\sinh \xi = -1$ και μάλιστα σε αυτό το ξ η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο. Επίσης έχουμε

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 1,$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -1$$

και

$$f(\xi) = \frac{1}{\cosh \xi} - \frac{\sinh \xi}{\cosh \xi} = \frac{1 - \sinh \xi}{\cosh \xi} = \frac{1 - (-1)}{\sqrt{1 + \sinh^2 \xi}} = \sqrt{2}.$$

Συνεπώς η f παίρνει μέγιστο στο σημείο ξ, το $f(\xi) = \sqrt{2}$. Για να προσδιορίσουμε το ξ, έχουμε

$$1 + \sinh \xi = 0 \Leftrightarrow \frac{e^{\xi} - e^{-\xi}}{2} = -1 \Leftrightarrow (e^{\xi})^2 + 2e^{\xi} - 1 = 0 \Leftrightarrow e^{\xi} = -1 + \sqrt{2} \Leftrightarrow \xi = \log(\sqrt{2} - 1).$$

Παράδειγμα 7.71. Ισχύει ότι
$$x^a|\log x| \leq \frac{1}{ae}, \quad 0 < x < 1,\ a > 0.$$
Πράγματι, θεωρούμε τη συνάρτηση
$$f(x) = x^a|\log x|, \quad 0 < x < 1,$$
για την οποία έχουμε
$$f(x) = x^a|\log x| = -x^a \log x, \quad 0 < x < 1,$$
και
$$f'(x) = -x^{a-1}(a\log x + 1),$$
οπότε
$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow a\log x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = e^{-\frac{1}{a}}.$$
Επίσης ισχύει ότι
$$f'(x) \geq 0, \quad \forall x \in (0, e^{-\frac{1}{a}}),$$
και
$$f'(x) \leq 0, \quad \forall x \in (e^{-\frac{1}{a}}, 1),$$
οπότε στο σημείο $e^{-\frac{1}{a}}$ η f λαμβάνει τοπικό μέγιστο, το $f\left(e^{-\frac{1}{a}}\right) = \frac{1}{ae}$. Ακόμα ισχύει ότι
$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} -\frac{\log x}{\frac{1}{x^a}} = \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{x}}{ax^{-a-1}} = \lim_{x\to 0+} \frac{1}{ax^{-a}} = 0$$
και
$$\lim_{x\to 1-} f(x) = \lim_{x\to 1-}(-x^a \log x) = 0,$$
συνεπώς η f λαμβάνει ολικό μέγιστο στο σημείο $e^{-\frac{1}{a}}$, το $f\left(e^{-\frac{1}{a}}\right) = \frac{1}{ae}$, δηλαδή έχουμε το ζητούμενο.

Παράδειγμα 7.72. Ισχύει ότι
$$x^{\frac{1}{x}} \leq 1 + \frac{3}{2\sqrt{x}}, \quad \forall x \in [1, e].$$
Πράγματι, θεωρούμε τις συναρτήσεις
$$f(x) = x^{\frac{1}{x}}, \quad x \in [1, e],$$
και
$$g(x) = 1 + \frac{3}{2\sqrt{x}}, \quad x \in [1, e],$$
και έχουμε
$$f'(x) = x^{\frac{1}{x}} \frac{1 - \log x}{x^2}, \quad x \in [1, e],$$
και
$$g'(x) = -\frac{3}{4}\frac{1}{x\sqrt{x}}, \quad x \in [1, e].$$
Έτσι, ισχύει ότι $f'(x) \geq 0$, $\forall x \in [1, e]$, και $g'(x) < 0$, $\forall x \in [1, e]$, συνεπώς η f είναι αύξουσα στο πεδίο ορισμού της και η g είναι φθίνουσα στο πεδίο ορισμού της. Έτσι έχουμε
$$1 \leq x \leq e \Rightarrow x^{\frac{1}{x}} \leq e^{\frac{1}{e}} \quad \text{και} \quad 1 + \frac{3}{2\sqrt{x}} \geq 1 + \frac{3}{2\sqrt{e}}.$$
Άρα αρκεί να δείξουμε ότι
$$e^{\frac{1}{e}} \leq 1 + \frac{3}{2\sqrt{e}}.$$
Όμως έχουμε
$$e^{\frac{1}{e}} = \sqrt[e]{e} < \sqrt{e} < \sqrt{3} < 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} = 1 + \frac{3}{2\sqrt{e}}$$
συνεπώς τελικά ισχύει $f(x) \leq g(x)$, $\forall x \in [1, e]$, που είναι και το ζητούμενο.

Παράδειγμα 7.73. Ας είναι f μια μη αρνητική συνάρτηση που έχει παραγώγους μέχρι τρίτης τάξης στο $(0,1)$. Αν η f έχει τουλάχιστον δυο ρίζες στο $(0,1)$ τότε η f''' έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(0,1)$. Πράγματι, έστω $0 < r_1 < r_2 < 1$ οι ρίζες της f. Τότε, εφαρμόζοντας το Θεώρημα του Rolle στο (r_1, r_2), έχουμε ότι υπάρχει $\xi \in (r_1, r_2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$. Επίσης, ισχύει ότι

$$f(x) \geq 0 = f(r_1) = f(r_2),$$

άρα η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στα r_1, r_2. Επειδή η f' υπάρχει στα r_1, r_2, σύμφωνα με το Θεώρημα του Fermat, έχουμε $f'(r_1) = f'(r_2) = 0$. Άρα

$$f'(r_1) = f'(\xi) = f'(r_2) = 0.$$

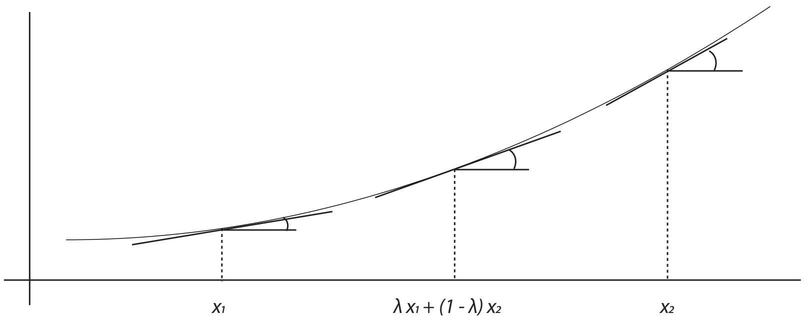
Εφαρμόζοντας το Θεώρημα του Rolle στο (r_1, ξ) έχουμε ότι υπάρχει $\zeta_1 \in (r_1, \xi)$ τέτοιο ώστε $f''(\zeta_1) = 0$. Ομοίως υπάρχει $\zeta_2 \in (\xi, r_2)$ τέτοιο ώστε $f''(\zeta_2) = 0$. Εφαρμόζοντας ξανά το Θεώρημα του Rolle στο (ζ_1, ζ_2) έχουμε ότι υπάρχει $\zeta_3 \in (\zeta_1, \zeta_2)$ τέτοιο ώστε $f'''(\zeta_3) = 0$, ενώ προφανώς

$$0 < \zeta_1 < \zeta_3 < \zeta_2 < 1,$$

δηλαδή $\zeta_3 \in (0,1)$.

Θεώρημα 7.74. *Έστω $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση, η οποία είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο (a,b).*

1. *Η f είναι κυρτή στο (a,b) αν και μόνο αν $f''(x) \geq 0$, $\forall x \in (a,b)$.*
2. *Η f είναι κοίλη στο (a,b) αν και μόνο αν $f''(x) \leq 0$, $\forall x \in (a,b)$.*



Ορισμός 7.75. Έστω $f : I \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση δυο φορές παραγωγίσιμη, όπου $I \subseteq \mathbb{R}$ ανοικτό διάστημα. Το σημείο $(x_0, f(x_0))$ καλείται ***σημείο καμπής*** της f αν $f''(x_0) = 0$ και $f''(x_0 - h)f''(x_0 + h) \leq 0$ για τυχόν μη μηδενικό και αρκούντως μικρό h.

Θεώρημα 7.76. *Έστω ότι $f : I \to \mathbb{R}$, όπου I ανοικτό διάστημα και $x_0 \in I$. Υποθέτουμε ότι η $f^{(\nu)}$, $\nu \geq 3$, υπάρχει και είναι συνεχής σε μια περιοχή του x_0 και ακόμη ότι*

$$f''(x_0) = \ldots = f^{(\nu-1)}(x_0) = 0$$

αλλά $f^{(\nu)}(x_0) \neq 0$. Αν το ν είναι περιττός τότε το σημείο $(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της f.

Σημείωση 7.77. Με βάση τα Θεωρήματα 7.64 και 7.76 μπορούμε να βρούμε τα ακρότατα και τα σημεία καμπής μιας συνάρτησης f.

Παράδειγμα 7.78. Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση συνεχής στο $[a,b]$ με $f(a) = f(b) = 0$ και δυο φορές παραγωγίσιμη στο (a,b) με $f''(x) > 0$, $\forall x \in (a,b)$. Τότε $f(x) \leq 0$, $\forall x \in [a,b]$, και επιπλέον αν $a, b \in (0, +\infty)$ και $0 \leq x \leq 1$, ισχύει ότι

$$a^x b^{1-x} \leq ax + (1-x)b.$$

Πράγματι, εφαρμόζοντας το Θεώρημα του Rolle στο διάστημα $[a,b]$ έχουμε ότι υπάρχει $\xi \in (a,b)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$. Επίσης από την υπόθεση $f''(x) > 0$, $\forall x \in (a,b)$, προκύπτει ότι η f' είναι γνησίως αύξουσα στο (a,b). Έτσι $f'(x) < 0$, $\forall x \in (a,\xi)$, και $f'(x) > 0$, $\forall x \in (\xi, b)$, οπότε $f(x) < f(a) = 0$, $\forall x \in (a,\xi)$, και

$f(x) < f(b) = 0$, $\forall x \in (\xi, b)$. Συνεπώς $f(x) < 0$, $\forall x \in (a, \xi) \cup (\xi, b)$, και επειδή η f είναι συνεχής στο $[a, b]$ έχουμε τελικά ότι $f(x) \leq 0$, $\forall x \in [a, b]$. Ακόμη, θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(x) = a^x b^{1-x} - ax - (1-x)b, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

για την οποία έχουμε $f(0) = 0 = f(1)$ και

$$f'(x) = a^x b^{1-x} \log \frac{a}{x} - a + b$$

$$f''(x) = a^x b^{1-x} \left(\log \frac{a}{b}\right)^2 > 0.$$

Άρα σύμφωνα με το αποτέλεσμα που έχουμε ήδη αποδείξει, πρέπει να ισχύει ότι $f(x) \leq 0$, $\forall x \in [0, 1]$, που είναι και το ζητούμενο.

Παράδειγμα 7.79. Έστω $f : I \to \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση, η οποία είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του I. Η f είναι κυρτή αν και μόνο αν ισχύει ότι

$$f(x) - f(x_0) \geq (x - x_0) f'(x_0), \quad \forall x, x_0 \in I.$$

Πράγματι, έστω ότι η f είναι κυρτή και x, x_0 δυο τυχόντα στοιχεία του I. Τότε από το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Lagrange έχουμε ότι υπάρχει ξ μεταξύ των x και x_0 τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

ενώ από την υπόθεση ότι η f είναι κυρτή προκύπτει άμεσα ότι η f' είναι αύξουσα. Έτσι, έχουμε

1. αν $x < x_0$ τότε

$$x < \xi < x_0 \Rightarrow f'(\xi) \leq f'(x_0) \Rightarrow \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq f'(x_0) \Rightarrow f(x) - f(x_0) \geq (x - x_0) f'(x_0)$$

2. αν $x > x_0$ τότε

$$x_0 < \xi < x \Rightarrow f'(\xi) \geq f'(x_0) \Rightarrow \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq f'(x_0) \Rightarrow f(x) - f(x_0) \geq (x - x_0) f'(x_0)$$

Άρα σε κάθε περίπτωση έχουμε το ζητούμενο.

Αντίστροφα, έστω ότι

$$f(x) - f(x_0) \geq (x - x_0) f'(x_0), \quad \forall x, x_0 \in I.$$

Για να δείξουμε ότι η f είναι κυρτή, αρκεί να δείξουμε ότι η f' είναι αύξουσα. Θεωρούμε τυχόντα $x_1, x_2 \in I$ με $x_1 < x_2$. Τότε έχουμε

$$f(x_1) - f(x_2) \geq (x_1 - x_2) f'(x_2) \Leftrightarrow \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \leq f'(x_2)$$

και

$$f(x_2) - f(x_1) \geq (x_2 - x_1) f'(x_1) \Leftrightarrow \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \geq f'(x_1)$$

Άρα

$$f'(x_1) \leq \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \leq f'(x_2),$$

δηλαδή η f' είναι αύξουσα οπότε η f είναι κυρτή.

Παράδειγμα 7.80. Η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} + x^2 \left(1 + \sin^2 \frac{1}{x}\right), & \text{αν} \quad x \neq 0 \\ 0, & \text{αν} \quad x = 0 \end{cases}$$

1. είναι παραγωγίσιμη για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

2. έχει ασυνεχή παράγωγο.

3. δεν είναι μονότονη σε καμία περιοχή του μηδενός.

Πράγματι, έχουμε

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{2}+x^2\left(1+\sin^2\frac{1}{x}\right)}{x}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{2}+x\left(1+\sin^2\frac{1}{x}\right)\right]=\frac{1}{2},$$

οπότε $f'(0)=\frac{1}{2}$. Επίσης, για $x\neq 0$ έχουμε

$$f'(x)=\frac{1}{2}+2x\left(1+\sin^2\frac{1}{x}\right)-\sin\frac{2}{x},$$

οπότε

$$f'(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}+2x\left(1+\sin^2\frac{1}{x}\right)-\sin\frac{2}{x}, & \text{αν} \quad x\neq 0\\ \frac{1}{2}, & \text{αν} \quad x=0\end{cases}$$

Το ότι η παράγωγος είναι ασυνεχής, προκύπτει θεωρώντας τις ακολουθίες $x_\nu=\frac{1}{2\nu\pi}$, $\nu\in\mathbb{N}$, και $y_\nu=\frac{1}{2\nu\pi+\frac{\pi}{4}}$, $\nu\in\mathbb{N}$. Τέλος, από τις σχέσεις $f'\left(\frac{1}{2\nu\pi}\right)>0$, $\forall\nu\in\mathbb{N}$, και $f'\left(\frac{1}{2\nu\pi+\frac{\pi}{4}}\right)<0$, $\forall\nu\in\mathbb{N}$, προκύπτει ότι σε τυχούσα περιοχή του μηδενός η f' αλλάζει πρόσημο, οπότε εκεί η f είναι μη-μονότονη.

Κεφάλαιο 8

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

8.1 Σύνολα

Άσκηση 8.1.1. Έστω
$$A = \left\{ \frac{\nu}{2\nu - 1} : \nu \in \mathbb{N} \right\}.$$
Να δείξετε ότι τα $\inf A$ και $\sup A$ υπάρχουν και επιπλέον ότι $\inf A = \frac{1}{2}$ και $\sup A = 1$.

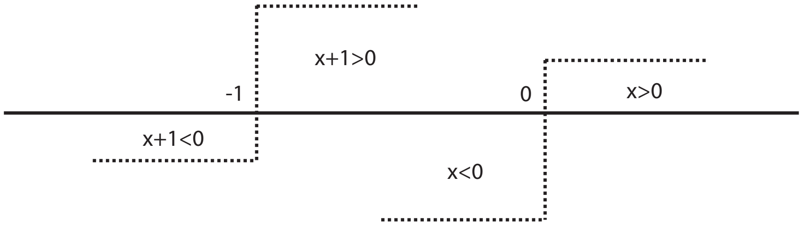
Λύση. Παρατηρούμε ότι
$$\frac{\nu}{2\nu - 1} \leq 1, \ \forall \nu \in \mathbb{N},$$
συνεπώς το σύνολο A είναι άνω φραγμένο, οπότε έχει supremum. Επίσης, ισχύει ότι
$$\frac{\nu}{2\nu - 1} \geq \frac{1}{2}, \ \forall \nu \in \mathbb{N},$$
οπότε το A είναι και κάτω φραγμένο, συνεπώς έχει infimum.

Θα δείξουμε ότι $\sup A = 1$. Πράγματι, παρατηρούμε ότι
$$\frac{1}{2 \cdot 1 - 1} = 1,$$
δηλαδή ο αριθμός 1 είναι στοιχείο του συνόλου A. Επίσης, δείξαμε παραπάνω ότι το 1 είναι άνω φράγμα του A, συνεπώς καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι το σύνολο A έχει μέγιστο, το 1. Άρα
$$\sup A = \max A = 1.$$

Στη συνέχεια, θα δείξουμε ότι $\inf A = \frac{1}{2}$ χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 1.25. Πράγματι, έχουμε ήδη δείξει ότι το $\frac{1}{2}$ είναι κάτω φράγμα του A. Επιπλέον, επιλέγουμε ένα τυχαίο $\epsilon > 0$. Αναζητούμε $x \in A$ τέτοιο ώστε
$$x < \frac{1}{2} + \epsilon.$$
Αφού $x \in A$, το x έχει τη μορφή
$$x = \frac{\mu_x}{2\mu_x - 1},$$
συνεπώς αρκεί να βρούμε έναν φυσικό αριθμό μ_x τέτοιο ώστε
$$\frac{\mu_x}{2\mu_x - 1} < \frac{1}{2} + \epsilon$$
ή ισοδύναμα
$$\mu_x > \frac{2\epsilon + 1}{4\epsilon}.$$
Ένα τέτοιο μ_x είναι το
$$\mu_x = \left[\frac{2\epsilon + 1}{4\epsilon} \right] + 1.$$
Άρα λοιπόν έχουμε ότι $\inf A = \frac{1}{2}$. □

Άσκηση 8.1.2. Έστω $A = \{x \in \mathbb{R} : |x||x + 1| < 2\}$. Να βρεθούν, αν υπάρχουν, τα $\sup A$ και $\inf A$.

Λύση. Παρατηρούμε ότι $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ και $|x+1| = 0 \Leftrightarrow x = -1$.



Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις

1. $x < -1$.Τότε έχουμε $|x| = -x$ και $|x+1| = -x-1$, οπότε
$$|x||x+1| < 2 \Leftrightarrow (-x)(-x-1) < 2 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 < 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+2) < 0 \Leftrightarrow x \in (-2, 1).$$
Συνεπώς τα στοιχεία του A που ταυτόχρονα ανήκουν και στο διάστημα $(-\infty, -1)$ είναι τα
$$\{x \in \mathbb{R} : x < -1 \text{ και } -2 < x < 1\} = (-2, -1).$$
2. $-1 < x < 0$. Τότε έχουμε $|x| = -x$ και $|x+1| = x+1$, οπότε
$$|x||x+1| < 2 \Leftrightarrow (-x)(x+1) < 2 \Leftrightarrow x^2 + x + 2 > 0,$$
άρα αυτή η ανισότητα δεν μας δίνει κανέναν επιπλέον περιορισμό για το x. Συνεπώς τα στοιχεία του A που ταυτόχρονα ανήκουν και στο διάστημα $(-1, 0)$ είναι ολόκληρο το διάστημα $(-1, 0)$.
3. $0 < x$. Τότε έχουμε $|x| = x$ και $|x+1| = x+1$, οπότε
$$|x||x+1| < 2 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 < 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+2) < 0 \Leftrightarrow x \in (-2, 1).$$
Συνεπώς, τα στοιχεία του A που ταυτόχρονα ανήκουν και στο $(0, +\infty)$ είναι τα
$$\{x \in \mathbb{R} : x > 0 \text{ και } -2 < x < 1\} = (0, 1).$$

Επίσης, προφανώς τα σημεία $x = 0$ και $x = -1$ ανήκουν στο A, άρα
$$A = (-2, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, 1) \cup \{0\} \cup \{-1\} = (-2, 1).$$
Προφανώς $\sup A = 1$ και $\inf A = -2$. □

8.2 Ακολουθίες

Άσκηση 8.2.1. Μία ακολουθία $(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει αν και μόνο αν οι υπακολουθίες $(a_{3\nu})_{\nu\in\mathbb{N}}$, $(a_{3\nu-1})_{\nu\in\mathbb{N}}$ και $(a_{3\nu-2})_{\nu\in\mathbb{N}}$ συγκλίνουν στο ίδιο όριο.

Λύση. Έστω ότι $\lim a_\nu = l$. Τότε γνωρίζουμε ότι όλες οι υπακολουθίες της $(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ συγκλίνουν στο l, οπότε το ζητούμενο ισχύει.

Αντίστροφα, έστω ότι
$$\lim a_{3\nu} = \lim a_{3\nu-1} = \lim a_{3\nu-2} = l.$$
Θα δείξουμε ότι $\lim a_\nu = l$. Έχουμε
$$\lim a_{3\nu} = l \Leftrightarrow [(\forall \epsilon > 0)(\exists \nu_1 \in \mathbb{N})(\forall \nu \in \mathbb{N})\nu > \nu_1 \Rightarrow |a_{3\nu} - l| < \epsilon],$$
$$\lim a_{3\nu-1} = l \Leftrightarrow [(\forall \epsilon > 0)(\exists \nu_2 \in \mathbb{N})(\forall \nu \in \mathbb{N})\nu > \nu_2 \Rightarrow |a_{3\nu-1} - l| < \epsilon]$$
και
$$\lim a_{3\nu-2} = l \Leftrightarrow [(\forall \epsilon > 0)(\exists \nu_3 \in \mathbb{N})(\forall \nu \in \mathbb{N})\nu > \nu_3 \Rightarrow |a_{3\nu-2} - l| < \epsilon].$$
Θέτουμε $\nu_0 = \max\{3\nu_1, 3\nu_2 - 1, 3\nu_3 - 2\}$. Τότε $(\forall \epsilon > 0)(\exists \nu_0 \in \mathbb{N})(\forall \nu \in \mathbb{N})\nu > \nu_0$ ισχύει

1. αν $\nu = 3k$ τότε
$$\nu > \nu_0 \Rightarrow 3k > \nu_0 > 3\nu_1 \Rightarrow k > \nu_1 \Rightarrow |a_{3k} - l| < \epsilon \Rightarrow |a_\nu - l| < \epsilon.$$
2. αν $\nu = 3k - 1$ τότε
$$\nu > \nu_0 \Rightarrow 3k - 1 > \nu_0 > 3\nu_2 - 1 \Rightarrow k > \nu_2 \Rightarrow |a_{3k-1} - l| < \epsilon \Rightarrow |a_\nu - l| < \epsilon.$$
3. αν $\nu = 3k - 2$ τότε
$$\nu > \nu_0 \Rightarrow 3k - 2 > \nu_0 > 3\nu_3 - 2 \Rightarrow k > \nu_3 \Rightarrow |a_{3k-2} - l| < \epsilon \Rightarrow |a_\nu - l| < \epsilon.$$

Άρα σε κάθε περίπτωση έχουμε $|a_\nu - l| < \epsilon$, $\forall \nu > \nu_0$, οπότε $\lim a_\nu = l$. □

Άσκηση 8.2.2. Αν $\lim a_\nu = l \neq 0$ τότε να δείξετε ότι υπάρχουν $\nu_0 \in \mathbb{N}$ και $k > 0$ τέτοια ώστε
$$0 < k < |a_\nu|, \ \forall \nu \geq \nu_0.$$

Λύση. Έχουμε
$$\lim a_\nu = l \Rightarrow \left[(\exists \nu_0 \in \mathbb{N})(\forall \nu \in \mathbb{N})\nu > \nu_0 \Rightarrow |a_\nu - l| < \frac{|l|}{2}\right].$$
Όμως έχουμε
$$|a_\nu - l| < \frac{|l|}{2} \Leftrightarrow -\frac{|l|}{2} < a_\nu - l < \frac{|l|}{2} \Leftrightarrow l - \frac{|l|}{2} < a_\nu < l + \frac{|l|}{2},$$
οπότε ισχύει

1. αν $l > 0$ τότε
$$l - \frac{l}{2} < a_\nu < l + \frac{l}{2} \Rightarrow 0 < \frac{l}{2} < a_\nu < \frac{3l}{2},$$
οπότε
$$|a_\nu| = a_\nu > \frac{|l|}{2} > 0.$$
2. αν $l < 0$ τότε
$$l - \frac{-l}{2} < a_\nu < l + \frac{-l}{2} \Rightarrow \frac{3l}{2} < a_\nu < \frac{l}{2} < 0,$$
οπότε
$$|a_\nu| = -a_\nu > \frac{-l}{2} = \frac{|l|}{2} > 0.$$

Επιλέγοντας $k = \frac{|l|}{2}$ έχουμε το ζητούμενο. □

Άσκηση 8.2.3. Αν $\lim a_\nu = 0$ και $(b_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ είναι μία φραγμένη ακολουθία, τότε ισχύει ότι $\lim(a_\nu b_\nu) = 0$.

Λύση. Έχουμε
$$\lim a_\nu = 0 \Leftrightarrow [(\forall \epsilon > 0)(\exists \nu_0 \in \mathbb{N})(\forall \nu \in \mathbb{N})\nu > \nu_0 \Rightarrow |a_\nu| < \epsilon].$$
Επίσης, αφού η $(b_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ είναι φραγμένη, έχουμε ότι $(\exists M > 0)$ τέτοιο ώστε $|b_\nu| < M$, $\forall \nu \in \mathbb{N}$. Έτσι, για $\nu > \nu_0$, έχουμε
$$|a_\nu b_\nu| \leq |a_\nu||b_\nu| < M\epsilon,$$
συνεπώς $\lim(a_\nu b_\nu) = 0$. □

Άσκηση 8.2.4. Αν $0 < a < 1$, να δειχθεί ότι $\lim(\nu a^\nu) = 0$.

Λύση. Για τυχόν $\nu \in \mathbb{N}$ έχουμε
$$\left|\frac{a_{\nu+1}}{a_\nu}\right| = \left|\frac{(\nu+1)a^{\nu+1}}{\nu a^\nu}\right| = \frac{\nu+1}{\nu}a \to a < 1.$$
Άρα, σύμφωνα με το Παράδειγμα 3.31, ισχύει ότι $\lim(\nu a^\nu) = 0$. □

Άσκηση 8.2.5. Αν $x, y \in \mathbb{R}$ με $0 < x < y$ και $a_\nu = \sqrt[\nu]{x^\nu + y^\nu}$, $\nu \in \mathbb{N}$, να δειχθεί ότι $\lim a_\nu = y$.

Λύση. ($1^{ος}$ τρόπος) Έχουμε

$$0 < x < y \Leftrightarrow 0 < x^\nu < y^\nu \Leftrightarrow y^\nu < x^\nu + y^\nu < 2y^\nu \Leftrightarrow y < \sqrt[\nu]{x^\nu + y^\nu} < y\sqrt[\nu]{2}.$$

Όμως $\lim y = y$ και $\lim y\sqrt[\nu]{2} = y$, σύμφωνα με το Παράδειγμα 3.27. Άρα

$$\lim \sqrt[\nu]{x^\nu + y^\nu} = y.$$

($2^{ος}$ τρόπος) Έχουμε

$$0 < x < y \Leftrightarrow 0 < \frac{x}{y} < 1,$$

άρα

$$\lim \left(\frac{x}{y}\right)^\nu = 0,$$

σύμφωνα με το Παράδειγμα 3.26. Έτσι, παίρνουμε

$$\sqrt[\nu]{x^\nu + y^\nu} = y\sqrt[\nu]{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^\nu} \to y.$$

□

Άσκηση 8.2.6. Δίνεται η ακολουθία $(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$, με $a_1 = 1$ και

$$a_\nu = 1 + \frac{1}{a_{\nu-1}},\ \nu > 1.$$

Να αποδείξετε ότι η $(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει στη θετική ρίζα της εξίσωσης $x^2 - x - 1 = 0$.

Λύση. Παρατηρούμε ότι ισχύει $0 < a_\nu < 2$, $\forall \nu \in \mathbb{N}$. Επιπλέον, έχουμε

$$a_{\nu+2} - a_{\nu+1} = \left(1 + \frac{1}{a_{\nu+1}}\right) - \left(1 + \frac{1}{a_\nu}\right) = -\frac{(a_{\nu+1} - a_\nu)}{a_\nu a_{\nu+1}},$$

δηλαδή δύο διαδοχικές διαφορές έχουν αντίθετο πρόσημο, συνεπώς η $(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ δεν είναι μονότονη. Όμως ισχύει ότι

$$a_{\nu+2} - a_\nu = \left(1 + \frac{1}{a_{\nu+1}}\right) - \left(1 + \frac{1}{a_{\nu-1}}\right) = \frac{a_\nu - a_{\nu-2}}{(1 + a_\nu)(1 + a_{\nu-2})},$$

δηλαδή οι υπακολουθίες $(a_{2\nu})_{\nu\in\mathbb{N}}$ και $(a_{2\nu-1})_{\nu\in\mathbb{N}}$ είναι μονότονες. Ειδικότερα, έχουμε

$$a_4 - a_2 = \frac{5}{3} - 2 < 0,$$

άρα η $(a_{2\nu})_{\nu\in\mathbb{N}}$ είναι φθίνουσα ενώ από την

$$a_3 - a_1 = \frac{3}{2} - 1 > 0$$

προκύπτει ότι η $(a_{2\nu-1})_{\nu\in\mathbb{N}}$ είναι αύξουσα. Συνεπώς η $(a_{2\nu})_{\nu\in\mathbb{N}}$ είναι φθίνουσα και φραγμένη, άρα συγκλίνει και έστω ότι $\lim a_{2\nu} = l$. Ομοίως η $(a_{2\nu-1})_{\nu\in\mathbb{N}}$ είναι αύξουσα και φραγμένη, άρα συγκλίνει και έστω ότι $\lim a_{2\nu-1} = m$. Τότε έχουμε

$$a_{2\nu} = 1 + \frac{1}{a_{2\nu-1}} \Rightarrow l = 1 + \frac{1}{m} \Rightarrow lm - 1 = m$$

και

$$a_{2\nu-1} = 1 + \frac{1}{a_{2\nu-2}} \Rightarrow m = 1 + \frac{1}{l} \Rightarrow lm - 1 = l.$$

Από τις δυο τελευταίες σχέσεις έχουμε $m = l$. Άρα

$$\lim a_{2\nu} = \lim a_{2\nu-1} = l = m,$$

συνεπώς σύμφωνα με το Θεώρημα 3.21 έχουμε ότι $\lim a_\nu = l$. Επίσης έχουμε

$$l = 1 + \frac{1}{l} \Leftrightarrow l^2 - l - 1 = 0$$

και αφού $0 < a_\nu$, $\forall \nu \in \mathbb{N}$, προφανώς $l \geq 0$.

□

8.3 Σειρές

Άσκηση 8.3.1. Να βρεθούν οι τιμές της σταθεράς a για τις οποίες η σειρά

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{(\nu^2+\nu)^a}$$

είναι συγκλίνουσα.

Λύση. Έχουμε

$$\frac{\frac{1}{(\nu^2+\nu)^a}}{\frac{1}{(\nu^2)^a}} = \left(\frac{\nu^2}{\nu^2+\nu}\right)^a \to 1.$$

Όμως η

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^{2a}}$$

συγκλίνει μόνο αν $2a > 1$, δηλαδή $a > \frac{1}{2}$, οπότε και η

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{(\nu^2+\nu)^a}$$

συγκλίνει μόνο αν $a > \frac{1}{2}$. □

Άσκηση 8.3.2. Να βρεθούν οι τιμές του $x \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η σειρά

$$1 + \frac{1}{2}(5x-3x^2) + \frac{1}{2^2}(5x-3x^2)^2 + \ldots$$

συγκλίνει.

Λύση. Έχουμε

$$1 + \frac{1}{2}(5x-3x^2) + \frac{1}{2^2}(5x-3x^2)^2 + \ldots = \sum_{\nu=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2}(5x-3x^2)\right]^{\nu-1},$$

η οποία είναι η γεωμετρική σειρά με πρώτο όρο 1 και λόγο

$$\frac{1}{2}(5x-3x^2).$$

Έτσι, σύμφωνα με το Παράδειγμα 4.6 αυτή θα συγκλίνει μόνο αν

$$\frac{1}{2}\left|(5x-3x^2)\right| < 1.$$

□

Άσκηση 8.3.3. Να εξετάσετε ως προς τη σύγκλιση τη σειρά

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} a^\nu \nu^a, \ a > 0.$$

Λύση. Εφαρμόζοντας το κριτήριο πηλίκων του D' Alembert, έχουμε

$$\lim \frac{a^{\nu+1}(\nu+1)^a}{a^\nu \nu^a} = \lim \frac{a^\nu a(\nu+1)^a}{a^\nu \nu^a} = \lim \left[a\left(\frac{\nu+1}{\nu}\right)^a\right] = a.$$

Έτσι, αν $a < 1$ τότε η σειρά συγκλίνει, ενώ αν $a > 1$ τότε η σειρά απειρίζεται θετικά. □

Άσκηση 8.3.4. Να εξετάσετε αν η σειρά

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu+1} \cos\frac{1}{\nu}$$

συγκλίνει και, αν συγκλίνει, να εξετάσετε επιπλέον αν συγκλίνει απόλυτα ή υπό συνθήκη.

Λύση. Θεωρούμε την ακολουθία
$$a_\nu = (-1)^{\nu+1} \cos \frac{1}{\nu},\ \nu \in \mathbb{N}.$$
Παρατηρούμε ότι
$$\lim a_{2\nu} = \lim \left((-1)^{2\nu+1} \cos \frac{1}{2\nu} \right) = \lim \left(-\cos \frac{1}{2\nu} \right),$$
ενώ
$$\lim a_{2\nu-1} = \lim \left((-1)^{2\nu-1+1} \cos \frac{1}{2\nu-1} \right) = \lim \left(\cos \frac{1}{2\nu-1} \right).$$
Όμως $\lim(\cos \frac{1}{\nu}) = 1$, αφού $\lim_{x\to 0} \cos x = 1$. Ας υποθέσουμε ότι η $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$ συγκλίνει. Τότε $\lim a_\nu = 0$. Δείξαμε όμως ότι
$$\lim a_{2\nu} = -\lim(\cos \frac{1}{2\nu}) = -\lim(\cos \frac{1}{\nu}) = -1$$
και
$$\lim a_{2\nu-1} = \lim(\cos \frac{1}{2\nu-1}) = \lim(\cos \frac{1}{\nu}) = 1,$$
δηλαδή το όριο της $(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ δεν υπάρχει, το οποίο είναι άτοπο, αφού $\lim a_\nu = 0$. Άρα η υπόθεση ότι $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu < +\infty$ είναι πάντα ψευδής, δηλαδή η
$$\sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu+1} \cos \frac{1}{\nu}$$
δε συγκλίνει. □

8.4 Όριο Συνάρτησης

Άσκηση 8.4.1. Να υπολογιστεί το
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{x}.$$
Λύση. Θέτουμε
$$f(x) = \frac{\sin x}{x}.$$
Παρατηρούμε ότι η f ορίζεται στο $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, οπότε $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}\backslash\{0\}$ και το $+\infty$ είναι σ.σ. του $\mathcal{D}(f)$. Θεωρούμε τυχούσα ακολουθία $(x_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ στοιχείων του $\mathcal{D}(f)$ με $\lim x_\nu = +\infty$. Μπορούμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, να υποθέσουμε ότι όλοι οι όροι της $(x_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ ανήκουν στο $(0, +\infty)$. Τότε έχουμε
$$\lim f(x_\nu) = \lim \frac{\sin x_\nu}{x_\nu}.$$
Όμως, προφανώς ισχύει
$$-1 \le \sin x_\nu \le 1,\ \forall \nu \in \mathbb{N},$$
και
$$\lim \frac{1}{x_\nu} = 0,$$
δηλαδή έχουμε το όριο μιας μηδενικής επί μια φραγμένη ακολουθία, το οποίο σύμφωνα με την Άσκηση 8.2.3 υπάρχει και είναι ίσο με μηδέν, δηλαδή
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{x} = 0.$$
□

Άσκηση 8.4.2. Να αποδείξετε ότι το
$$\lim_{x\to 1} (\sin \frac{1}{\sqrt{x}-1})$$
δεν υπάρχει στο $\mathbb{R}$.

Λύση. Θέτουμε

$$f(x) = \sin \frac{1}{\sqrt{x-1}},\ x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}.$$

Για τις ακολουθίες

$$x_\nu = \left(\frac{1}{2\nu\pi} + 1\right)^2,\ \nu \in \mathbb{N},$$

και

$$y_\nu = \left(\frac{1}{2\nu\pi + \frac{\pi}{2}} + 1\right)^2,\ \nu \in \mathbb{N},$$

έχουμε

$$\lim x_\nu = 1 = \lim y_\nu$$

και

$$\lim f(x_\nu) = \lim(\sin(2\nu\pi)) = 0$$

ενώ

$$\lim f(y_\nu) = \lim\left(\sin\left(2\nu\pi + \frac{\pi}{2}\right)\right) = 1.$$

Βρήκαμε, λοιπόν, δυο ακολουθίες $(x_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ και $(y_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ με

$$\lim x_\nu = 1 = \lim y_\nu$$

και

$$\lim f(x_\nu) \neq \lim f(y_\nu).$$

Άρα το $\lim_{x\to 1} f(x)$ δεν υπάρχει. □

Άσκηση 8.4.3. Να αποδείξετε ότι το $\lim_{x\to 0} \operatorname{sgn}(x)$, όπου

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases},$$

δεν υπάρχει στο $\mathbb{R}$.

Λύση. Θέτουμε $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Για τις ακολουθίες $x_\nu = \frac{1}{\nu}$, $\nu \in \mathbb{N}$, και $y_\nu = -\frac{1}{\nu}$, $\nu \in \mathbb{N}$, έχουμε

$$\lim x_\nu = 0 = \lim y_\nu$$

και

$$\lim f(x_\nu) = \lim \operatorname{sgn}(x_\nu) = \lim 1 = 1$$

ενώ

$$\lim f(y_\nu) = \lim \operatorname{sgn}(y_\nu) = \lim(-1) = -1.$$

Βρήκαμε, λοιπόν, δυο ακολουθίες $(x_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ και $(y_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ με

$$\lim x_\nu = 0 = \lim y_\nu$$

και

$$\lim f(x_\nu) \neq \lim f(y_\nu).$$

Άρα το $\lim_{x\to 0} f(x)$ δεν υπάρχει. □

8.5 Συνέχεια Συνάρτησης

Άσκηση 8.5.1. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ ρητός} \\ 0, & x \text{ άρρητος} \end{cases},$$

που είναι γνωστή ως ***συνάρτηση του Dirichlet***, δεν είναι συνεχής σε κανένα σημείο του $\mathbb{R}$.

Λύση. Ας είναι ξ τυχαίος πραγματικός αριθμός και $(x_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ μια τυχαία ακολουθία στοιχείων του $\mathbb{R}$ με $\lim x_\nu = \xi$. Έστω $(x_{k_\nu})_{\nu\in\mathbb{N}}$ εκείνη η υπακολουθία της $(x_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ που αποτελείται από όλους τους ρητούς όρους και $(x_{\lambda_\nu})_{\nu\in\mathbb{N}}$ εκείνη η υπακολουθία της $(x_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ που αποτελείται από όλους τους άρρητους όρους. Τότε $f(x_{k_\nu}) = 1$, $\forall \nu\in\mathbb{N}$, και $f(x_{\lambda_\nu}) = 0$, $\forall\nu\in\mathbb{N}$, οπότε

$$\lim f(x_{k_\nu}) = 1$$

ενώ

$$lim f(x_{\lambda_\nu}) = 0,$$

δηλαδή το $\lim f(x_\nu)$ δεν υπάρχει. Αυτό σημαίνει ότι η f δεν είναι συνεχής στο ξ και αφού το ξ είναι τυχαίο, η f δεν είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$. □

Άσκηση 8.5.2. Να βρεθούν τα σημεία στα οποία η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & x \text{ ρητός} \\ x+3, & x \text{ άρρητος} \end{cases},$$

είναι συνεχής.

Λύση. Ας είναι ξ τυχαίος πραγματικός αριθμός και $(x_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ μια τυχαία ακολουθία στοιχείων του $\mathbb{R}$ με $\lim x_\nu = \xi$. Έστω $(x_{k_\nu})_{\nu\in\mathbb{N}}$ εκείνη η υπακολουθία της $(x_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ που αποτελείται από όλους τους ρητούς όρους και $(x_{\lambda_\nu})_{\nu\in\mathbb{N}}$ εκείνη η υπακολουθία της $(x_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ που αποτελείται από όλους τους άρρητους όρους. Τότε $f(x_{k_\nu}) = 2x_{k_\nu}$, $\forall\nu\in\mathbb{N}$, και $f(x_{\lambda_\nu}) = x_{\lambda_\nu}+3$, $\forall\nu\in\mathbb{N}$, οπότε

$$\lim f(x_{k_\nu}) = \lim(2x_{k_\nu}) = 2\lim x_{k_\nu} = 2\lim x_\nu = 2\xi$$

και

$$\lim f(x_{\lambda_\nu}) = \lim(x_{\lambda_\nu}+3) = 3+\lim x_{\lambda_\nu} = 3+\lim x_\nu = 3+\xi.$$

Για να υπάρχει το $\lim f(x_\nu)$ πρέπει και αρκεί να ισχύει $2\xi = \xi+3$, δηλαδή $\xi = 3$. Άρα η f είναι συνεχής μόνο στο σημείο $\xi = 3$. □

Άσκηση 8.5.3. Αν $k>0$ και $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι τέτοια ώστε

$$|f(x)-f(y)| \le k|x-y|,\ \forall x,y\in\mathbb{R}$$

να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής.

Λύση. Έστω ξ τυχαίο στοιχείο του $\mathbb{R}$. Θα δείξουμε ότι

$$(\forall\epsilon>0)(\exists\delta>0)(\forall x\in\mathcal{D}(f)=\mathbb{R}) \text{ με } |x-\xi|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(\xi)|<\epsilon.$$

Πράγματι, έστω $\epsilon>0$. Τότε έχουμε

$$|f(x)-f(\xi)| \le k|x-\xi| < k\delta$$

άρα επιλέγοντας $\delta = \frac{\epsilon}{k}$ έχουμε

$$|f(x)-f(\xi)| < k\delta = k\frac{\epsilon}{k} = \epsilon,$$

δηλαδή η f είναι συνεχής στο ξ. Επειδή το ξ είναι τυχαίο, έχουμε ότι η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$. □

Άσκηση 8.5.4. Να δειχθεί ότι η συνάρτηση $f:(0,1)\to\mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = \frac{1}{x^2}$$

δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής.

Λύση. Για τις ακολουθίες

$$x_\nu = \frac{1}{\sqrt{\nu}},\ \nu\in\mathbb{N},$$

και

$$y_\nu = \frac{1}{\sqrt{\nu+1}},\ \nu\in\mathbb{N},$$

έχουμε

$$\lim(x_\nu-y_\nu) = \lim\frac{\sqrt{\nu+1}-\sqrt{\nu}}{\sqrt{\nu}\sqrt{\nu+1}} = \lim\frac{1}{\sqrt{\nu}\sqrt{\nu+1}(\sqrt{\nu+1}+\sqrt{\nu})} = 0$$

ενώ

$$|f(x_\nu)-f(y_\nu)| = 1,\ \forall\nu\in\mathbb{N}.$$

Άρα σύμφωνα με τη Σημείωση 6.26 η f δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής. □

8.6 Παράγωγος Συνάρτησης

Άσκηση 8.6.1. Εξετάστε αν ισχύουν οι υποθέσεις του Θεωρήματος του Rolle για τη συνάρτηση $f : [\frac{1}{2}, 2] \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1, & \text{αν } \frac{1}{2} \le x \le 1 \\ (x-2)^2, & \text{αν } 1 < x \le 2. \end{cases}$$

Στην περίπτωση που ισχύουν, διατυπώστε το συμπέρασμα που λαμβάνουμε με εφαρμογή του θεωρήματος αυτού.

Λύση. Έχουμε

$$\lim_{x\to 1-} f(x) = \lim_{x\to 1-}(2x-1) = 1 = \lim_{x\to 1+}(x-2)^2 = \lim_{x\to 1+} f(x),$$

συνεπώς η f είναι συνεχής στο 1. Επίσης, προφανώς είναι συνεχής στα διαστήματα $[\frac{1}{2}, 1)$ και $(1, 2]$, άρα τελικά είναι συνεχής στο $[\frac{1}{2}, 2]$. Ακόμη, έχουμε

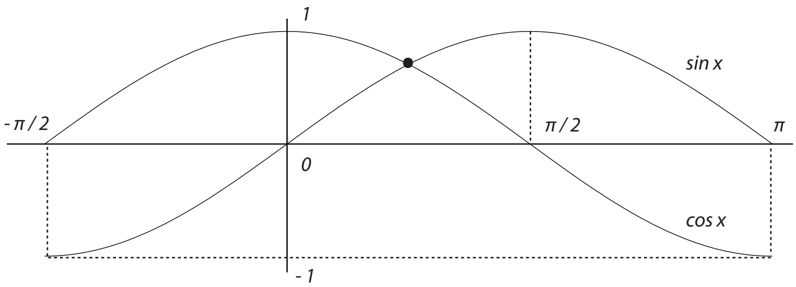
$$\lim_{x\to 1-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1-} \frac{2x-1-1}{x-1} = 2$$

και

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 1+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} &= \lim_{x\to 1+} \frac{(x-2)^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1+} \frac{[(x-2)-1][(x-2)+1]}{x-1} \\ &= \lim_{x\to 1+} \frac{(x-3)(x-1)}{x-1} = \lim_{x\to 1+}(x-3) \\ &= -2, \end{aligned}$$

άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 1, οπότε οι υποθέσεις του Θεωρήματος του Rolle δεν ικανοποιούνται. □

Άσκηση 8.6.2. Παριστάνοντας γραφικά τις συναρτήσεις $\sin x$ και $\cos x$ σε ένα κοινό σύστημα συντεταγμένων, παρατηρούμε ότι υπάρχει ακριβώς ένα σημείο εντός του διαστήματος $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ στο οποίο τα δυο γραφήματα τέμνονται. Να αποδείξετε αυτή την οπτική παρατήρηση, χρησιμοποιώντας το Θεώρημα του Rolle.



Λύση. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(x) = \sin x + \cos x, \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Έχουμε $f(0) = 1 = f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ και προφανώς η f είναι συνεχής στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ και παραγωγίσιμη στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Άρα, σύμφωνα με το Θεώρημα του Rolle, υπάρχει $\xi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$. Όμως

$$f'(\xi) = 0 \Leftrightarrow \cos\xi - \sin\xi = 0 \Leftrightarrow \cos\xi = \sin\xi,$$

δηλαδή υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο ξ εντός του διαστήματος $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ στο οποίο τα δυο γραφήματα τέμνονται. Έστω ότι υπάρχει $\zeta \ne \xi$ με $\zeta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο ώστε $\sin\zeta = \cos\zeta$ ή ισοδύναμα $f'(\zeta) = 0$. Θα καταλήξουμε σε άτοπο. Πράγματι, η συνάρτηση f' είναι συνεχής στο $[\min\{\xi,\zeta\}, \max\{\xi,\zeta\}]$, παραγωγίσιμη στο $(\min\{\xi,\zeta\}, \max\{\xi,\zeta\})$ και ισχύει ότι $f'(\xi) = f'(\zeta)$. Έτσι, από το Θεώρημα του Rolle, προκύπτει ότι υπάρχει $\rho \in (\min\{\xi,\zeta\}, \max\{\xi,\zeta\})$ τέτοιο ώστε $f''(\rho) = 0$ ή ισοδύναμα $\sin\rho + \cos\rho = 0$, το οποίο είναι άτοπο αφού

$$\rho \in (\min\{\xi,\zeta\}, \max\{\xi,\zeta\}) \Rightarrow \rho \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \sin\rho > 0 \quad \text{και} \quad \cos\rho > 0.$$

Άρα υπάρχει ακριβώς ένα σημείο εντός του διαστήματος $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ στο οποίο τα δυο γραφήματα τέμνονται. □

Άσκηση 8.6.3. Να δείξετε ότι

$$\cos x < e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad \text{για τυχόν} \quad 0 < x \leq \frac{\pi}{2},$$

θεωρώντας τη συνάρτηση $f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = e^{\frac{x^2}{2}} \cos x.$$

Λύση. Έχουμε

$$f'(x) = e^{\frac{x^2}{2}} (x \cos x - \sin x),$$

οπότε αν θέσουμε

$$h(x) = x \cos x - sinx,$$

παρατηρούμε ότι οι συναρτήσεις f' και h έχουν κοινό πρόσημο. Για τη συνάρτηση h έχουμε

$$h'(x) = -x \sin x < 0, \quad \text{για} \quad 0 < x \leq \frac{\pi}{2},$$

οπότε η h είναι γνησίως φθίνουσα. Έτσι, ισχύει ότι

$$0 < x \Rightarrow h(x) < h(0) = 0,$$

συνεπώς έχουμε

$$f'(x) < 0, \quad \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right],$$

δηλαδή η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right]$. Έτσι έχουμε

$$x > 0 \Rightarrow f(x) < f(0) = 1 \Rightarrow \cos x < e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

□

Κεφάλαιο 9

ΛΥΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

9.1 ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΣ 2009

Σε όλα τα θέματα ισχύει ότι

$$2 \leq \omega_i \leq 8, \quad i = 1, 2, \ldots, 10.$$

Θέμα 9.1.1. Θεωρούμε το σύνολο

$$A = \left\{ \frac{\omega_1}{\nu^{\omega_1}} : \nu \in \mathbb{N} \right\}.$$

Αποδείξτε ότι

1. τα $\inf A$ και $\sup A$ υπάρχουν. [20]
2. $\sup A = \omega_1$. [40]
3. ο πραγματικός αριθμός $\frac{1}{\omega_1^{\omega_1 - 1}}$ ***δεν*** είναι το infimum του συνόλου A. [40]

Λύση. 1. Παρατηρούμε ότι

$$\frac{\omega_1}{\nu^{\omega_1}} \leq \omega_1, \ \forall \nu \in \mathbb{N},$$

συνεπώς το σύνολο A είναι άνω φραγμένο, οπότε έχει supremum. Επίσης, ισχύει ότι

$$\frac{\omega_1}{\nu^{\omega_1}} \geq 0, \ \forall \nu \in \mathbb{N},$$

οπότε το A είναι και κάτω φραγμένο, συνεπώς έχει infimum.

2. Από το (1) έχουμε ότι το ω_1 είναι άνω φράγμα του A. Επιπλέον, επιλέγουμε ένα τυχαιο $\epsilon > 0$. Αναζητούμε $x \in A$ τέτοιο ώστε $\omega_1 - \epsilon < x$. Αφού $x \in A$, το x θα έχει τη μορφή

$$x = \frac{\omega_1}{\nu_x^{\omega_1}},$$

συνεπώς αρκεί να βρούμε ένα φυσικό αριθμό ν_x τέτοιο ώστε

$$\omega_1 - \epsilon < \frac{\omega_1}{\nu_x^{\omega_1}}$$

ή ισοδύναμα

$$\nu_x < \sqrt[\omega_1]{\frac{\omega_1}{\omega_1 - \epsilon}},$$

με την προϋπόθεση ότι $\epsilon < \omega_1$, κάτι που όμως δεν αποτελεί πρόβλημα αφού μπορούμε να περιοριστούμε σε οσοδήποτε "μικρά" ϵ. Ένα τέτοιο ν_x είναι το $\nu_x = 1$, το οποίο εδώ τυχαίνει να είναι το ίδιο για όλα τα ϵ. Δείξαμε λοιπόν ότι $\sup A = \omega_1$.

3. Πράγματι, ο πραγματικός αριθμός

$$\frac{\omega_1}{(\omega_1 + 1)^{\omega_1}}$$

είναι στοιχειο του συνόλου A και προφανώς

$$\frac{\omega_1}{(\omega_1 + 1)^{\omega_1}} < \frac{\omega_1}{\omega_1^{\omega_1}} = \frac{1}{\omega_1^{\omega_1 - 1}}.$$

Άρα το

$$\frac{1}{\omega_1^{\omega_1-1}}$$

δεν είναι infimum του A.

□

Θέμα 9.1.2. Δίνεται η ακολουθία $(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ με

$$a_1 = \frac{1}{2} \text{ και } a_{\nu+1} = \frac{\omega_2}{1+a_\nu}.$$

1. Εξετάστε ως προς τη μονοτονία, προσδιορίζοντας και το είδος της, την $(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ καθώς και τις υπακολουθίες της $(a_{2\nu})_{\nu\in\mathbb{N}}$ και $(a_{2\nu-1})_{\nu\in\mathbb{N}}$. [50]

2. Αποδείξτε ότι η $(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει στη θετική ρίζα της εξίσωσης $x^2+x-\omega_2=0$. [100]

Λύση. 1. Έχουμε

$$a_{\nu+1}-a_\nu = \frac{\omega_2}{1+a_\nu} - \frac{\omega_2}{1+a_{\nu-1}} = -\frac{\omega_2(a_\nu - a_{\nu-1})}{(1+a_\nu)(1+a_{\nu-1})},$$

δηλαδή δυο διαδοχικές διαφορές έχουν αντίθετο πρόσημο, συνεπώς η $(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ δεν είναι μονότονη. Επίσης, ισχύει ότι

$$\begin{aligned} a_{\nu+2}-a_\nu &= \frac{\omega_2}{1+a_{\nu+1}} - \frac{\omega_2}{1+a_{\nu-1}} = \frac{\omega_2(a_{\nu-1}-a_{\nu+1})}{(1+a_{\nu+1})(1+a_{\nu-1})} = \frac{\omega_2(\frac{\omega_2}{1+a_{\nu-2}} - \frac{\omega_2}{1+a_\nu})}{(1+\frac{\omega_2}{1+a_{\nu-2}})(1+\frac{\omega_2}{1+a_\nu})} \\ &= \omega_2^2 \frac{a_\nu - a_{\nu-2}}{(1+a_\nu+\omega_2)(1+a_{\nu-2}+\omega_2)}, \end{aligned}$$

δηλαδή οι υπακολουθίες $(a_{2\nu})_{\nu\in\mathbb{N}}$ και $(a_{2\nu-1})_{\nu\in\mathbb{N}}$ είναι μονότονες. Ειδικότερα, έχουμε

$$a_4 - a_2 = \left(\frac{\omega_2(2\omega_2+3)}{5\omega_2+3}\right) - \left(\frac{2}{3}\omega_2\right) = \frac{\omega_2(-4\omega_2+3)}{3(5\omega_2+3)} < 0,$$

αφού $-4\omega_2+3<0$, άρα η $(a_{2\nu})_{\nu\in\mathbb{N}}$ είναι φθίνουσα, και

$$a_3 - a_1 = \left(\frac{3\omega_2}{2\omega_2+3}\right) - \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{4\omega_2-3}{4\omega_2+6} > 0,$$

αφού $4\omega_2-3>0$, άρα η $(a_{2\nu-1})_{\nu\in\mathbb{N}}$ είναι αύξουσα.

2. Παρατηρούμε ότι $0<a_\nu<\omega_2$, $\forall \nu\in\mathbb{N}$. Συνεπώς, σύμφωνα και με το (1), η $(a_{2\nu})_{\nu\in\mathbb{N}}$ είναι φθίνουσα και φραγμένη, άρα συγκλίνει και έστω ότι $\lim a_{2\nu}=l$. Ομοίως, η $(a_{2\nu-1})_{\nu\in\mathbb{N}}$ είναι αύξουσα και φραγμένη, άρα συγκλίνει και έστω ότι $\lim a_{2\nu-1}=m$. Τότε έχουμε

$$a_{2\nu} = \frac{\omega_2}{1+a_{2\nu-1}} \Rightarrow l = \frac{\omega_2}{1+m} \Rightarrow l = \omega_2 - lm$$

και

$$a_{2\nu-1} = \frac{\omega_2}{1+a_{2\nu-2}} \Rightarrow m = \frac{\omega_2}{1+l} \Rightarrow m = \omega_2 - lm.$$

Από τις δύο τελευταίες σχέσεις έχουμε $m=l$. Άρα $\lim a_{2\nu} = \lim a_{2\nu-1} = l = m$, συνεπώς $\lim a_\nu = l = m$. Επίσης, έχουμε

$$l = \frac{\omega_2}{1+l} \Rightarrow l^2+l-\omega_2 = 0$$

και αφού $a_\nu>0$, $\forall\nu\in\mathbb{N}$, προφανώς $l\geq 0$.

□

Θέμα 9.1.3. Χρησιμοποιώντας τους σχετικούς ορισμούς, αποδείξτε ότι

1. $\lim \frac{1}{\nu-1} = 0$. [20]

2. αν η ακολουθία $(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ ικανοποιεί τη σχέση

$$|a_{\nu+1}-a_\nu| \leq \frac{1}{\nu^{\omega_3+1}},\ \forall\nu\in\mathbb{N},$$

τότε είναι βασική. [80]

Λύση. 1. Θεωρούμε τυχόν $\epsilon > 0$. Θα δείξουμε ότι

$$(\exists \nu_0 \in \mathbb{N})(\forall \nu \in \mathbb{N}) \text{ με } \nu > \nu_0 \Rightarrow \left|\frac{1}{\nu-1}\right| < \epsilon.$$

Πράγματι, έχουμε

$$\frac{1}{\nu-1} < \epsilon \Leftrightarrow \frac{1}{\epsilon} + 1 < \nu,$$

οπότε επιλέγοντας

$$\nu_0 = \left[\frac{1}{\epsilon} + 1\right] + 1 = \left[\frac{1}{\epsilon}\right] + 2$$

έχουμε το ζητούμενο.

2. Για τυχόντα $\epsilon_0 > 0$ και $\mu, \nu \in \mathbb{N}$ με $\mu > \nu \geq 2$ έχουμε

$$\begin{aligned}|a_\mu - a_\nu| &= |a_\mu - a_{\mu-1}| + |a_{\mu-1} - a_{\mu-2}| + \ldots + |a_{\nu+1} - a_\nu| \\ &\leq \frac{1}{(\mu-1)^{\omega_3+1}} + \frac{1}{(\mu-2)^{\omega_3+1}} + \ldots + \frac{1}{\nu^{\omega_3+1}}.\end{aligned}$$

Επίσης, για κάθε $\lambda \in \mathbb{N}$ με $\lambda \geq 2$ ισχύει

$$\frac{1}{\lambda^{\omega_3+1}} < \frac{1}{\lambda^2} < \frac{1}{\lambda(\lambda-1)} = \frac{1}{\lambda-1} - \frac{1}{\lambda},$$

οπότε έχουμε

$$\begin{aligned}|a_\mu - a_\nu| &< \left(\frac{1}{\mu-2} - \frac{1}{\mu-1}\right) + \left(\frac{1}{\mu-3} - \frac{1}{\mu-2}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{\nu-1} - \frac{1}{\nu}\right) \\ &= \frac{1}{\nu-1} - \frac{1}{\mu-1} < \frac{1}{\nu-1}.\end{aligned}$$

Όμως, από το (1) έχουμε ότι $\lim \frac{1}{\nu-1} = 0$, συνεπώς, σύμφωνα με τον ορισμό του ορίου, ισχύει το ακόλουθο

$$(\exists \nu_0 \in \mathbb{N})(\forall \nu \in \mathbb{N}) \text{ με } \nu > \nu_0 \Rightarrow \left|\frac{1}{\nu-1}\right| < \epsilon_0.$$

Άρα για $\mu > \nu > \nu_0$ έχουμε

$$|a_\mu - a_\nu| < \frac{1}{\nu-1} < \epsilon_0,$$

δηλαδή ισχύει ότι

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \nu_0 \in \mathbb{N})(\forall \mu, \nu \in \mathbb{N}) \text{ με } \mu > \nu_0 \text{ και } \nu > \nu_0 \Rightarrow |a_\mu - a_\nu| < \epsilon,$$

οπότε η ακολουθία $(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ είναι βασική.

□

Θέμα 9.1.4. Χρησιμοποιώντας, κατά περίπτωση, το κριτήριο πηλίκων του D'Alembert ή το κριτήριο ν-οστής ρίζας του Cauchy, αποδείξτε ότι συγκλίνουν οι παρακάτω σειρές

1. $\displaystyle\sum_{\nu=1}^{+\infty} \nu^{\omega_4} e^{-\nu}$ [50]

2. $\displaystyle\sum_{\nu=2}^{+\infty} \frac{\nu^{\nu-1}}{(\omega_4+2)^{\nu-1}(\nu-1)!}$ [50]

Λύση. 1. Αφού

$$\nu^{\omega_4} e^{-\nu} \geq 0, \ \forall \nu \in \mathbb{N},$$

εφαρμόζουμε το κριτήριο ν-οστής ρίζας του Cauchy και έχουμε

$$\lim \sqrt[\nu]{\nu^{\omega_4} e^{-\nu}} = \lim \left(\nu^{\frac{\omega_4}{\nu}} e^{-\frac{\nu}{\nu}}\right) = e^{-1} \lim (\sqrt[\nu]{\nu})^{\omega_4} = \frac{1}{e}.$$

Επειδή

$$0 \leq \frac{1}{e} < 1$$

η σειρά συγκλίνει.

2. Αφού
$$\frac{\nu^{\nu-1}}{(\omega_4+2)^{\nu-1}(\nu-1)!} > 0,\ \forall \nu \geq 2,$$
εφαρμόζουμε το κριτήριο του D' Alembert και έχουμε
$$\lim \frac{\frac{(\nu+1)^\nu}{(\omega_4+2)^\nu(\nu)!}}{\frac{\nu^{(\nu-1)}}{(\omega_4+2)^{(\nu-1)}(\nu-1)!}} = \lim \frac{(\omega_4+2)^{(\nu-1)}(\nu-1)!(\nu+1)^\nu}{(\omega_4+2)^\nu(\nu)!\nu^{(\nu-1)}} = \frac{1}{\omega_4+2}\lim\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^\nu = \frac{e}{\omega_4+2}.$$
Επειδή
$$0 \leq \frac{e}{\omega_4+2} < 1$$
η σειρά συγκλίνει.

□

Θέμα 9.1.5. Εφαρμόζοντας το κριτήριο του Leibniz, αποδείξτε ότι η σειρά
$$\sum_{\nu=1}^{+\infty}(-1)^{\nu+1}\frac{\nu}{(\omega_5+1)^\nu}$$
συγκλίνει. [100]

Λύση. Θέτουμε
$$a_\nu = \frac{\nu}{(\omega_5+1)^\nu},\ \nu \in \mathbb{N},$$
και έχουμε ότι προφανώς $a_\nu > 0$, $\forall \nu \in \mathbb{N}$. Επίσης, για τυχόν $\nu \in \mathbb{N}$ ισχύει ότι
$$\frac{a_{\nu+1}}{a_\nu} = \frac{\frac{\nu+1}{(\omega_5+1)^{\nu+1}}}{\frac{\nu}{(\omega_5+1)^\nu}} = \frac{(\omega_5+1)^\nu(\nu+1)}{(\omega_5+1)^{\nu+1}\nu} = \frac{\nu+1}{(\omega_5+1)\nu}.$$
Όμως
$$(\omega_5+1)\nu \geq 2\nu = \nu+\nu \geq \nu+1,$$
οπότε
$$\frac{a_{\nu+1}}{a_\nu} = \frac{\nu+1}{(\omega_5+1)\nu} \leq 1,$$
συνεπώς $a_{\nu+1} \leq a_\nu$, $\forall \nu \in \mathbb{N}$, δηλαδή η ακολουθία $(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ είναι φθίνουσα. Επιπλέον, με τη βοήθεια των κανόνων L' Hôpital, έχουμε ότι
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{(\omega_5+1)^x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{(\omega_5+1)^x\log(\omega_5+1)} = 0,$$
συνεπώς
$$\lim\frac{\nu}{(\omega_5+1)^\nu} = 0.$$
Άρα, σύμφωνα με το κριτήριο του Leibnitz, η σειρά συγκλίνει. □

Θέμα 9.1.6. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : (-\infty, 0) \to \mathbb{R}$ με τύπο
$$f(x) = \frac{x^2}{\omega_6 x - 1}\ .$$
Χρησιμοποιώντας τον $\epsilon - \delta$ ορισμό του ορίου, αποδείξτε ότι $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$. [100]

Λύση. Θα δείξουμε ότι
$$(\forall\epsilon > 0)(\exists r > 0)(\forall x \in (-\infty, 0))\ \text{με}\ x < -r \Rightarrow \frac{x^2}{\omega_6 x - 1} < -\frac{1}{\epsilon}.$$
Για τυχόν $x < 0$, ισχύει ότι
$$\frac{x^2}{\omega_6 x - 1} < -\frac{1}{\epsilon} \Leftrightarrow \epsilon x^2 > 1 - \omega_6 x \Leftrightarrow \epsilon x^2 + \omega_6 x - 1 > 0.$$

Οι ρίζες του πολυωνύμου $\epsilon x^2 + \omega_6 x - 1$ είναι οι

$$x_{1,2} = \frac{-\omega_6 \pm \sqrt{\omega_6^2 + 4\epsilon}}{2\epsilon},$$

οπότε

$$\epsilon x^2 + \omega_6 x - 1 > 0,\ \forall x \in \left(-\infty, \frac{-\omega_6 - \sqrt{\omega_6^2 + 4\epsilon}}{2\epsilon}\right) \bigcup \left(\frac{-\omega_6 + \sqrt{\omega_6^2 + 4\epsilon}}{2\epsilon}, +\infty\right).$$

Όμως, αφού $x \in (-\infty, 0)$, υποχρεωτικά περιοριζόμαστε στο διάστημα

$$\left(-\infty, \frac{-\omega_6 - \sqrt{\omega_6^2 + 4\epsilon}}{2\epsilon}\right).$$

Άρα επιλέγοντας

$$r = \frac{\omega_6 + \sqrt{\omega_6^2 + 4\epsilon}}{2\epsilon}$$

έχουμε το ζητούμενο. □

Θέμα 9.1.7. Βρείτε μια, όχι κατ' ανάγκη συνεχή, συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε η ακολουθία $(f(\nu))_{\nu\in\mathbb{N}}$ να συγκλίνει στον πραγματικό αριθμό ω_7, αλλά το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ να μην υπάρχει. [100]

Λύση. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} \omega_7, & \text{αν } x \in \mathbb{N}, \\ 0, & \text{αν } x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{N}. \end{cases}$$

Τότε έχουμε $f(\nu) = \omega_7$, $\forall \nu \in \mathbb{N}$, οπότε $\lim f(\nu) = \lim \omega_7 = \omega_7$. Επίσης, θεωρούμε την ακολουθία

$$a_\nu = \nu + \frac{1}{2},\ \nu \in \mathbb{N},$$

και έχουμε $\lim a_\nu = +\infty$, $\lim f(a_\nu) = \lim f(\nu + \frac{1}{2}) = \lim 0 = 0$. Άρα έχουμε βρει δυο ακολουθίες, τις $a_\nu = \nu + \frac{1}{2}$, $\nu \in \mathbb{N}$, και $b_\nu = \nu$, $\nu \in \mathbb{N}$, για τις οποίες ισχύει ότι $\lim a_\nu = +\infty = \lim b_\nu$, αλλά $\lim f(a_\nu) = 0 \neq \omega_7 = \lim f(b_\nu)$. Συνεπώς το $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ δεν υπάρχει. □

Θέμα 9.1.8. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} \sin^{\omega_8}(x), & \text{αν } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cap \mathbb{Q}, \\ \\ \cos^{\omega_8}(x), & \text{αν } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \backslash \mathbb{Q}. \end{cases}$$

1. Χρησιμοποιώντας τον ακολουθιακό ορισμό της συνέχειας, αποδείξτε ότι το μοναδικό σημείο του πεδίου ορισμού της, στο οποίο η συνάρτηση f είναι συνεχής, είναι το σημείο $\dfrac{\pi}{4}$. [100]
2. Στα σημεία στα οποία η f δεν είναι συνεχής, προσδιορίστε το είδος της ασυνέχειας που παρουσιάζει. [20]

Λύση. 1. Αρχικά θα δείξουμε ότι η f είναι συνεχής στο $\frac{\pi}{4}$. Για το σκοπό αυτό θεωρούμε τυχούσα ακολουθία $(x_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ στοιχείων του $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ με $\lim x_\nu = \frac{\pi}{4}$ και την αντιστοιχη ακολουθία των τιμών της f, $(f(x_\nu))_{\nu\in\mathbb{N}}$. Ας είναι $(x_{k_\nu})_{\nu\in\mathbb{N}}$ εκείνη η υπακολουθία της $(x_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ που αποτελείται από όλους τους ρητούς όρους και $(x_{\lambda_\nu})_{\nu\in\mathbb{N}}$ εκείνη η υπακολουθία της $(x_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ που αποτελείται από όλους τους άρρητους όρους. Τότε

$$f(x_{k_\nu}) = \sin^{\omega_8} x_{k_\nu},\ \forall \nu \in \mathbb{N},$$

και

$$f(x_{\lambda_\nu}) = \cos^{\omega_8} x_{\lambda_\nu},\ \forall \nu \in \mathbb{N},$$

οπότε

$$\lim f(x_{k_\nu}) = \lim \sin^{\omega_8} x_{k_\nu} = \sin^{\omega_8} \frac{\pi}{4} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{\omega_8}$$

και

$$\lim f(x_{\lambda_\nu}) = \lim \cos^{\omega_8} x_{\lambda_\nu} = \cos^{\omega_8} \frac{\pi}{4} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{\omega_8},$$

δηλαδή ισχύει ότι

$$\lim f(x_{k_\nu}) = \lim f(x_{\lambda_\nu}) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{\omega_8},$$

άρα

$$\lim f(x_\nu) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{\omega_8}$$

και αφού

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos^{\omega_8}\frac{\pi}{4} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{\omega_8}$$

τελικά έχουμε ότι

$$\lim f(x_\nu) = f(\lim x_\nu),$$

συνεπώς η f είναι συνεχής στο $\frac{\pi}{4}$.

Ας είναι τώρα $\xi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ με $\xi \neq \frac{\pi}{4}$. Τότε, για τυχούσα ακολουθία $(x_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ στοιχείων του $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ με $\lim x_\nu = \xi$ έχουμε, όπως και προηγούμενα, τις υπακολουθίες $(x_{k_\nu})_{\nu\in\mathbb{N}}$ των ρητών όρων και $(x_{\lambda_\nu})_{\nu\in\mathbb{N}}$ των άρρητων όρων και επιπλέον

$$\lim f(x_{k_\nu}) = \lim \sin^{\omega_8} x_{k_\nu} = \sin^{\omega_8}\xi$$

και

$$\lim f(x_{\lambda_\nu}) = \lim \cos^{\omega_8} x_{\lambda_\nu} = \cos^{\omega_8}\xi.$$

Όμως, αφού $\xi \neq \frac{\pi}{4}$, έχουμε $\sin\xi \neq \cos\xi$, συνεπώς $\sin^{\omega_8}\xi \neq \cos^{\omega_8}\xi$, και έτσι το $\lim f(x_\nu)$ δεν υπάρχει, οπότε η f δεν είναι συνεχής στο $\xi \neq \frac{\pi}{4}$.

2. Επαναλαμβάνοντας τη διαδικασία που κάναμε για να αποδείξουμε ότι η f είναι ασυνεχής στο $\xi \neq \frac{\pi}{4}$, αλλά περιορίζοντας την ακολουθία $(x_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ στο διάστημα $(0, \xi)$, αποδεικνύεται ότι το όριο $\lim_{x\to\xi-} f(x)$ δεν υπάρχει, συνεπώς η f παρουσιάζει στο ξ ασυνέχεια δεύτερου είδους ή, όπως αλλιώς λέγεται, ουσιώδη ασυνέχεια. Σημειώνουμε ότι την ίδια διαδικασία θα μπορούσαμε να κάνουμε για το $\lim_{x\to\xi+} f(x)$.

□

Θέμα 9.1.9. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $f : [0, 3\pi] \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = \omega_9(x^2 - 2\pi x) + (\pi - x)\cos x + \sin x$$

έχει ακριβώς δύο ρίζες στο πεδίο ορισμού της, οι οποίες βρίσκονται εκατέρωθεν του π. [150]

Λύση. Αρχικά θα δείξουμε ότι η f έχει τουλάχιστον δυο ρίζες. Πράγματι, η f είναι συνεχής στο $[0, \pi]$ και

$$f(0)f(\pi) = -\omega_9\pi^3 < 0,$$

άρα, σύμφωνα με το θεώρημα του Bolzano, έχουμε ότι υπάρχει $\xi_1 \in (0, \pi)$ τέτοιο ώστε $f(\xi_1) = 0$. Ομοίως, η f είναι συνεχής στο $[\pi, 3\pi]$ και

$$f(\pi)f(3\pi) = -\omega_9\pi^2(3\pi^2\omega_9 + 2\pi) < 0,$$

άρα από το θεώρημα του Bolzano προκύπτει ότι υπάρχει $\xi_2 \in (\pi, 3\pi)$ τέτοιο ώστε $f(\xi_2) = 0$. Συνεπώς, η f έχει τουλάχιστον δυο ρίζες, τις ξ_1 και ξ_2.

Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι η f έχει το πολύ δυο ρίζες. Πράγματι, έχουμε ότι

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x - \pi)(2\omega_9 + \sin x) = 0 \Leftrightarrow x = \pi,$$

αφού $2\omega_9 > \sin x$, $\forall x \in [0, 3\pi]$. Άρα η f' έχει ακριβώς μια ρίζα στο $[0, 3\pi]$. Έστω ότι η f έχει τουλάχιστον τρεις ρίζες, τις $\rho_1 < \rho_2 < \rho_3$. Τότε, εφαρμόζοντας το θεώρημα του Rolle στο διάστημα $[\rho_1, \rho_2]$, έχουμε ότι υπάρχει $k_1 \in (\rho_1, \rho_2)$ τέτοιο ώστε $f'(k_1) = 0$. Ομοίως, εφαρμόζοντας το θεώρημα του Rolle στο διάστημα $[\rho_2, \rho_3]$ προκύπτει ότι υπάρχει $k_2 \in (\rho_2, \rho_3)$ τέτοιο ώστε $f'(k_2) = 0$. Από τον τρόπο που προέκυψαν, τα k_1 και k_2 είναι διαφορετικά, οπότε καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η f' έχει τουλάχιστον δυο ρίζες, πράγμα άτοπο αφού αποδείξαμε ότι έχει ακριβώς μια ρίζα. Το άτοπο προέκυψε από την υπόθεση ότι η f έχει τουλάχιστον τρεις ρίζες, άρα τελικά καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η f έχει το πολύ δυο ρίζες.

Δείξαμε, λοιπόν, ότι η f έχει τουλάχιστον δυο ρίζες και, ταυτόχρονα, το πολύ δυο ρίζες. Άρα έχει ακριβώς δυο ρίζες.

□

Θέμα 9.1.10. Αποδείξτε ότι ισχύουν οι παρακάτω ανισότητες

1. $\frac{x-y}{\sin^2 x} < \mathrm{ctg(y)} - \mathrm{ctg(x)} < \frac{\mathrm{x-y}}{\sin^2 \mathrm{y}}$, για κάθε $0 < x < y < \frac{\pi}{2}$. [50]

2. $(x+\omega_{10})^{\frac{1}{x-\omega_{10}}} \le \frac{\omega_{10}e^y}{y+1}$, για κάθε $x, y \in [0,1]$. [100]

Λύση. 1. Για τυχόντα $x, y \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ με $x < y$, από το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Lagrange για τη συνάρτηση $f(t) = \mathrm{ctg(t)}$ στο διάστημα $[x, y]$, έχουμε ότι υπάρχει $\xi \in (x, y)$ τέτοιο ώστε

$$\mathrm{ctg(y)} - \mathrm{ctg(x)} = \mathrm{(y-x)}\left(-\frac{1}{\sin^2 \xi}\right) = \frac{\mathrm{x-y}}{\sin^2 \xi}.$$

Όμως ισχύει ότι

$$0 < x < \xi < y < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin^2 x < \sin^2 \xi < \sin^2 y \Rightarrow \frac{1}{\sin^2 y} < \frac{1}{\sin^2 \xi} < \frac{1}{\sin^2 x}$$

οπότε, αφού $x - y < 0$, έχουμε

$$\frac{x-y}{\sin^2 x} < \frac{x-y}{\sin^2 \xi} < \frac{x-y}{\sin^2 y},$$

και έτσι

$$\frac{x-y}{\sin^2 x} < \mathrm{ctg(y)} - \mathrm{ctg(x)} < \frac{\mathrm{x-y}}{\sin^2 \mathrm{y}}.$$

2. Θεωρούμε τις συναρτήσεις

$$f(x) = (x+\omega_{10})^{\frac{1}{x-\omega_{10}}},\ x \in [0,1],$$

και

$$g(y) = \frac{\omega_{10}e^y}{y+1},\ y \in [0,1],$$

οπότε, για $x \in [0,1]$, έχουμε

$$f'(x) = \left((x+\omega_{10})^{\frac{1}{x-\omega_{10}}}\right)' = \left(e^{\log(x+\omega_{10})^{\frac{1}{x-\omega_{10}}}}\right)' = \left(e^{\frac{1}{x-\omega_{10}}\log(x+\omega_{10})}\right)'$$

$$= (x+\omega_{10})^{\frac{1}{x-\omega_{10}}}\left(\frac{1}{(x-\omega_{10})(x+\omega_{10})} - \frac{\log(x+\omega_{10})}{(x-\omega_{10})^2}\right),$$

και

$$g'(y) = \frac{\omega_{10}e^y y}{(y+1)^2},\ y \in [0,1].$$

Επειδή

$$\log(x+\omega_{10}) \ge 0,\ \forall x \in [0,1],$$

και

$$x - \omega_{10} \le 0,\ \forall x \in [0,1],$$

έχουμε ότι

$$f'(x) \le 0,\ \forall x \in [0,1].$$

Επίσης είναι προφανές ότι

$$g'(y) \ge 0,\ \forall y \in [0,1].$$

Άρα η συνάρτηση f είναι φθίνουσα στο $[0,1]$ και η συνάρτηση g είναι αύξουσα στο $[0,1]$, οπότε

$$f(x) \le f(0) = \omega_{10}^{-\omega_{10}},\ \forall x \in [0,1]$$

και

$$g(y) \ge g(0) = \omega_{10},\ \forall y \in [0,1].$$

Όμως

$$\omega_{10} \ge \frac{1}{\omega_{10}^{\omega_{10}}},$$

οπότε έχουμε

$$f(x) \le f(0) = \omega_{10}^{-\omega_{10}} \le \omega_{10} = g(0) \le g(y),\ \forall x, y \in [0,1].$$

Άρα τελικά ισχύει ότι

$$f(x) \le g(y),\ \forall x, y \in [0,1],$$

δηλαδή

$$(x+\omega_{10})^{\frac{1}{x-\omega_{10}}} \le \frac{\omega_{10}e^y}{y+1},\ \forall x, y \in [0,1].$$

□

9.2 ΠΤΥΧΙΑΚΗ 2008-2009

Θέμα 9.2.1. Βρείτε μια ακολουθία $(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ τέτοια ώστε να πληρούνται και οι δυο ακόλουθες ιδιότητες

1. $\sup\{a_\nu : \nu \in \mathbb{N}\} = +\infty$,
2. $\inf\{a_\nu : \nu \in \mathbb{N}\} = -\infty$. [1.5]

Λύση. Θεωρούμε την ακολουθία

$$a_\nu = \begin{cases} \nu, & \text{αν } \nu \text{ άρτιος,} \\ -\nu, & \text{αν } \nu \text{ περιττός.} \end{cases}$$

Για την υπακολουθία $(a_{2\nu})_{\nu\in\mathbb{N}}$ της ακολουθίας $(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$, ισχύει ότι

$$\lim(a_{2\nu}) = \lim(\nu) = +\infty,$$

οπότε το σύνολο $\{a_{2\nu} : \nu \in \mathbb{N}\}$ δεν είναι άνω φραγμένο. Από τον ορισμό της έννοιας της υπακολουθίας προκύπτει άμεσα ότι

$$\{a_{2\nu} : \nu \in \mathbb{N}\} \subseteq \{a_\nu : \nu \in \mathbb{N}\},$$

συνεπώς και το σύνολο $\{a_\nu : \nu \in \mathbb{N}\}$ δεν είναι άνω φραγμένο, δηλαδή

$$\sup\{a_\nu : \nu \in \mathbb{N}\} = +\infty.$$

Ομοίως, για την υπακολουθία $(a_{2\nu-1})_{\nu\in\mathbb{N}}$ της ακολουθίας $(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$, ισχύει ότι

$$\lim(a_{2\nu-1}) = \lim(-\nu) = -\infty,$$

οπότε το σύνολο $\{a_{2\nu-1} : \nu \in \mathbb{N}\}$ δεν είναι κάτω φραγμένο, συνεπώς και το σύνολο $\{a_\nu : \nu \in \mathbb{N}\}$ δεν είναι κάτω φραγμένο, δηλαδή

$$\inf\{a_\nu : \nu \in \mathbb{N}\} = -\infty.$$

□

Θέμα 9.2.2. Βρείτε μια ακολουθία $(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ τέτοια ώστε να πληρούνται και οι τρεις ακόλουθες ιδιότητες

1. το $\lim a_{2\nu}$ υπάρχει στο $\mathbb{R}$,
2. το $\lim a_{2\nu-1}$ υπάρχει στο $\mathbb{R}$,
3. το $\lim a_\nu$ ***δεν*** υπάρχει. [1.5]

Λύση. Για την ακολουθία

$$a_\nu = \begin{cases} 1, & \text{αν } \nu \text{ άρτιος,} \\ -1, & \text{αν } \nu \text{ περιττός,} \end{cases}$$

έχουμε

$$\lim(a_{2\nu}) = \lim(1) = 1 \in \mathbb{R}$$

και

$$\lim(a_{2\nu-1}) = \lim(-1) = -1 \in \mathbb{R}.$$

Επίσης, επειδή

$$\lim(a_{2\nu}) = 1 \neq -1 = \lim(a_{2\nu-1}),$$

το $\lim a_\nu$ δεν υπάρχει. □

Θέμα 9.2.3. Βρείτε μια ακολουθία $(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ τέτοια ώστε να πληρούνται και οι δυο ακόλουθες ιδιότητες

1. το $\lim a_\nu$ υπάρχει στο $\mathbb{R}$,
2. η σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$ απειρίζεται θετικά. [1.5]

Λύση. Για την ακολουθία $a_\nu = \frac{1}{\nu}$, $\nu \in \mathbb{N}$, έχουμε

$$\lim(a_\nu) = \lim \frac{1}{\nu} = 0 \in \mathbb{R}$$

και

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}(a_\nu) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu} = +\infty.$$

Η σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu}$ είναι γνωστή ως *αρμονική σειρά.* □

Θέμα 9.2.4. Βρείτε μια συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε να πληρούνται και οι δυο ακόλουθες ιδιότητες

1. το όριο της ακολουθίας $\left(f\left(2\nu\pi + \frac{\pi}{2}\right)\right)_{\nu\in\mathbb{N}}$ υπάρχει στο $\mathbb{R}$,
2. το $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ ***δεν*** υπάρχει. [1.5]

Λύση. Για τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = \sin x, \ x \in \mathbb{R},$$

έχουμε

$$\lim\left(f\left(2\nu\pi + \frac{\pi}{2}\right)\right) = \lim\left(\sin\left(2\nu\pi + \frac{\pi}{2}\right)\right) = \lim(1) = 1 \in \mathbb{R}.$$

Επίσης, για την ακολουθία $b_\nu = 2\nu\pi + \frac{3\pi}{2}$, $\nu \in \mathbb{N}$, έχουμε

$$\lim(f(b_\nu)) = \lim\left(\sin\left(2\nu\pi + \frac{3\pi}{2}\right)\right) = \lim(-1) = -1.$$

Έτσι, έχουμε βρει δυο ακολουθίες, τις $a_\nu = 2\nu\pi + \frac{\pi}{2}$, $\nu \in \mathbb{N}$, και $b_\nu = 2\nu\pi + \frac{3\pi}{2}$, $\nu \in \mathbb{N}$, για τις οποίες ισχύει ότι

$$\lim a_\nu = \lim\left(2\nu\pi + \frac{\pi}{2}\right) = +\infty = \lim\left(2\nu\pi + \frac{3\pi}{2}\right) = \lim b_\nu$$

και

$$\lim(f(a_\nu)) = \lim\left(f\left(2\nu\pi + \frac{\pi}{2}\right)\right) = 1 \neq -1 = \lim\left(f\left(2\nu\pi + \frac{3\pi}{2}\right)\right) = \lim(f(b_\nu)).$$

Άρα το $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ δεν υπάρχει. □

Θέμα 9.2.5. Βρείτε μια συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και ένα σημείο $\xi \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε να πληρούνται και οι τρεις ακόλουθες ιδιότητες

1. το $\lim_{x\to\xi-} f(x)$ υπάρχει στο $\mathbb{R}$,
2. το $\lim_{x\to\xi+} f(x)$ υπάρχει στο $\mathbb{R}$,
3. η f ***δεν*** είναι συνεχής στο ξ. [1.5]

Λύση. Για τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}, \\ 0, & \text{αν } x = 0, \end{cases}$$

και το σημείο $\xi = 0$ έχουμε

$$\lim_{x\to\xi-} f(x) = \lim_{x\to 0-} (1) = 1 = \lim_{x\to 0+} (1) = \lim_{x\to\xi+} f(x)$$

και

$$f(\xi) = f(0) = 0.$$

Αφού

$$\lim_{x\to\xi-} f(x) = \lim_{x\to\xi+} f(x) \neq f(\xi),$$

η f δεν είναι συνεχής στο ξ. □

Θέμα 9.2.6. Βρείτε μια συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και ένα σημείο $\xi \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε να πληρούνται και οι δυο ακόλουθες ιδιότητες

1. η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$,
2. η f ***δεν*** είναι παραγωγίσιμη στο ξ. [1.5]

Λύση. Για τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} -x, & \text{αν } x < 0, \\ x, & \text{αν } x \geq 0, \end{cases}$$

και το σημείο $\xi = 0$ έχουμε

$$\lim_{x \to \xi-} f(x) = \lim_{x \to 0-} (-x) = 0 = \lim_{x \to 0+} (x) = \lim_{x \to \xi+} f(x)$$

και

$$f(\xi) = f(0) = 0,$$

οπότε η f είναι συνεχής στο 0. Επίσης, η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ ως πολυωνυμική. Άρα η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$. Όμως η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0, αφού

$$\lim_{x \to 0-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0-} \frac{(-x) - 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0-} (-1) = -1,$$

και

$$\lim_{x \to 0+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0+} \frac{x - 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0+} (1) = 1,$$

δηλαδή

$$\lim_{x \to 0-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -1 \neq 1 = \lim_{x \to 0+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}.$$

□

Θέμα 9.2.7. Βρείτε μια συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και ένα σημείο $\xi \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε να πληρούνται και οι τρεις ακόλουθες ιδιότητες

1. η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$,
2. $f'(\xi) = 0$,
3. η f ***δεν*** παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο ξ. [1.5]

Λύση. Για τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x^3$, $x \in \mathbb{R}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική, και το σημείο $\xi = 0$, έχουμε

$$f'(x) = 3x^2, \ x \in \mathbb{R}.$$

Έτσι

$$f'(\xi) = f'(0) = 3(0)^2 = 0.$$

Επίσης, αφού $f'(x) = 3x^2 \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, η f είναι αύξουσα σε ολόκληρο το $\mathbb{R}$, οπότε δεν παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο ξ. □

9.3 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2009

Σε όλα τα θέματα ισχύει ότι

$$2 \leq \omega_i \leq 8, \quad i = 1, 2, \ldots, 7.$$

Θέμα 9.3.1. Θεωρούμε το σύνολο

$$A = \left\{ \sin \frac{\pi}{(\omega_1 + 1)\nu} : \nu \in \mathbb{N} \right\}$$

και θέτουμε

$$\omega_1 A = \{\omega_1 x : x \in A\}.$$

Αποδείξτε ότι

1. τα $\inf(\omega_1 A)$ και $\sup(\omega_1 A)$ υπάρχουν. [30]
2. $\inf(\omega_1 A) = 0$. [60]
3. ο πραγματικός αριθμός ω_1 ***δεν*** είναι το supremum του συνόλου $\omega_1 A$. [60]

Λύση. 1. Παρατηρούμε ότι, για τυχόν $\nu \in \mathbb{N}$, έχουμε

$$\omega_1 \sin \frac{\pi}{(\omega_1+1)\nu} \leq \omega_1,$$

συνεπώς το σύνολο $\omega_1 A$ είναι άνω φραγμένο, οπότε έχει supremum. Επίσης, για τυχόν $\nu \in \mathbb{N}$, ισχύει ότι

$$\omega_1 \sin \frac{\pi}{(\omega_1+1)\nu} \geq -\omega_1,$$

οπότε το $\omega_1 A$ είναι και κάτω φραγμένο, συνεπώς έχει infimum.

2. Αρχικά θα δείξουμε ότι $\inf A = 0$. Παρατηρούμε ότι

$$0 \leq \frac{\pi}{(\omega_1+1)\nu} \leq \frac{\pi}{2}, \ \forall \nu \in \mathbb{N},$$

οπότε επειδή η συνάρτηση $f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = \sin x, \ x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],$$

είναι αύξουσα στο πεδίο ορισμού της, έχουμε ότι

$$0 = \sin 0 \leq \sin \frac{\pi}{(\omega_1+1)\nu}, \ \forall \nu \in \mathbb{N}.$$

Άρα το μηδέν είναι κάτω φράγμα του συνόλου A.

Επιλέγουμε ένα τυχαίο $\epsilon > 0$. Δεδομένου ότι ενδιαφερόμαστε για οσοδήποτε ¨μικρά¨ $\epsilon > 0$, υποθέτουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $\epsilon < 1$. Αναζητούμε $x \in A$ τέτοιο ώστε $0 + \epsilon > x$. Το x, ως στοιχείο του συνόλου A, έχει τη μορφή

$$x = \sin \frac{\pi}{(\omega_1+1)\nu_x},$$

συνεπώς αρκεί να βρούμε ένα φυσικό αριθμό ν_x τέτοιο ώστε

$$\epsilon > \sin \frac{\pi}{(\omega_1+1)\nu_x}.$$

Γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση

$$\text{Arcsin} : [0,1] \to \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της. Έτσι έχουμε

$$\sin \frac{\pi}{(\omega_1+1)\nu} < \epsilon \Leftrightarrow \text{Arcsin}\left(\sin \frac{\pi}{(\omega_1+1)\nu}\right) < \text{Arcsin}\epsilon \Leftrightarrow \frac{\pi}{(\omega_1+1)\nu} < \text{Arcsin}\epsilon$$
$$\Leftrightarrow \nu > \frac{\pi}{(\omega_1+1)\text{Arcsin}\epsilon} \Leftrightarrow \nu \geq \left[\frac{\pi}{(\omega_1+1)\text{Arcsin}\epsilon}\right] + 1.$$

Άρα για

$$\nu_x = \left[\frac{\pi}{(\omega_1+1)\text{Arcsin}\epsilon}\right] + 1$$

έχουμε το ζητούμενο. Σημειώνουμε ότι μπορούμε να καταλήξουμε στο ίδιο συμπέρασμα χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι

$$\lim \sin \frac{\pi}{(\omega_1+1)\nu} = 0.$$

Επιπρόσθετα, αφού $\omega_1 > 0$, ισχύει ότι

$$\inf(\omega_1 A) = \omega_1 \inf A = 0.$$

3. Ο πραγματικός αριθμός

$$\omega_1 \sin \frac{\pi}{\omega_1 + \frac{1}{2}}$$

είναι άνω φράγμα του συνόλου $\omega_1 A$, αφού για τυχόν $\nu \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$\begin{aligned} & 0 < \frac{\pi}{(\omega_1+1)\nu} \leq \frac{\pi}{\omega_1+\frac{1}{2}} < \frac{\pi}{2} \\ \Rightarrow\ & \sin\frac{\pi}{(\omega_1+1)\nu} \leq \sin\frac{\pi}{\omega_1+\frac{1}{2}} \\ \Rightarrow\ & \omega_1 \sin\frac{\pi}{(\omega_1+1)\nu} \leq \omega_1 \sin\frac{\pi}{\omega_1+\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Όμως

$$\sin\frac{\pi}{\omega_1+\frac{1}{2}} < 1,$$

οπότε

$$\omega_1 \sin\frac{\pi}{\omega_1+\frac{1}{2}} < \omega_1.$$

Άρα, ο αριθμός ω_1 είναι γνήσια μεγαλύτερος από ένα άνω φράγμα του συνόλου $\omega_1 A$, συνεπώς δεν είναι το supremum του $\omega_1 A$.

□

Θέμα 9.3.2. Δίνεται η ακολουθία $(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ με $a_1 = 0$, $a_2 = 1$ και

$$a_\nu = \frac{1}{\omega_2}((\omega_2 - 1)a_{\nu-1} + a_{\nu-2}),\ \nu \geq 3.$$

Εξετάστε αν η $(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει και, αν συγκλίνει, βρείτε το όριο της. [150]

Λύση. Για τυχόν $\nu \geq 3$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} & a_\nu = \frac{1}{\omega_2}((\omega_2-1)a_{\nu-1} + a_{\nu-2}) \\ \Leftrightarrow\ & \omega_2 a_\nu = (\omega_2-1)a_{\nu-1} + a_{\nu-2} \\ \Leftrightarrow\ & \omega_2(a_\nu - a_{\nu-1}) = -(a_{\nu-1} - a_{\nu-2}) \\ \Leftrightarrow\ & a_\nu - a_{\nu-1} = -\frac{1}{\omega_2}(a_{\nu-1} - a_{\nu-2}), \end{aligned}$$

άρα

$$|a_\nu - a_{\nu-1}| = \frac{1}{\omega_2}|a_{\nu-1} - a_{\nu-2}|,\ \forall \nu \geq 3,$$

οπότε ισχύει ότι

$$|a_3 - a_2| = \frac{1}{\omega_2}|a_2 - a_1|,\ |a_4 - a_3| = \frac{1}{\omega_2}|a_3 - a_2|,\ \ldots\ , |a_\nu - a_{\nu-1}| = \frac{1}{\omega_2}|a_{\nu-1} - a_{\nu-2}|.$$

Πολλαπλασιάζοντας τις προηγούμενες σχέσεις κατά μέλη, έχουμε

$$|a_\nu - a_{\nu-1}| = \left(\frac{1}{\omega_2}\right)^{\nu-2}|a_2 - a_1| = \left(\frac{1}{\omega_2}\right)^{\nu-2}.$$

Ας είναι $\mu, \nu \in \mathbb{N}$ με $\mu > \nu \geq 3$. Τότε έχουμε

$$\begin{aligned} |a_\mu - a_\nu| &\leq |a_\mu - a_{\mu-1}| + |a_{\mu-1} - a_{\mu-2}| + \ \ldots\ + |a_{\nu+2} - a_{\nu+1}| + |a_{\nu+1} - a_\nu| \\ &= \left(\frac{1}{\omega_2}\right)^{\mu-2} + \left(\frac{1}{\omega_2}\right)^{\mu-3} + \ \ldots\ + \left(\frac{1}{\omega_2}\right)^{\nu} + \left(\frac{1}{\omega_2}\right)^{\nu-1} \\ &= \left(\frac{1}{\omega_2}\right)^{\nu-1}\left[1 + \left(\frac{1}{\omega_2}\right) + \ \ldots\ + \left(\frac{1}{\omega_2}\right)^{\mu-\nu-2} + \left(\frac{1}{\omega_2}\right)^{\mu-\nu-1}\right] \\ &= \left(\frac{1}{\omega_2}\right)^{\nu-1} \frac{1 - \left(\frac{1}{\omega_2}\right)^{\mu-\nu}}{1 - \frac{1}{\omega_2}} \\ &\leq \left(\frac{1}{\omega_2}\right)^{\nu-1} \frac{\omega_2}{\omega_2 - 1} \to 0. \end{aligned}$$

Άρα η $(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ είναι βασική ακολουθία, οπότε συγκλίνει. Για να βρούμε το όριο της, παρατηρούμε ότι

$$l = \frac{1}{\omega_2}((\omega_2 - 1)l + l) \Leftrightarrow \omega_2 l = \omega_2 l,$$

συνεπώς με αυτόν τον τρόπο δεν μπορούμε να προσδιορίσουμε το l. Ισχύει όμως ότι

$$\omega_2 a_3 = (\omega_2 - 1)a_2 + a_1,\ \omega_2 a_4 = (\omega_2 - 1)a_3 + a_2,\ \ldots\ ,\omega_2 a_\nu = (\omega_2 - 1)a_{\nu-1} + a_{\nu-2}.$$

Προσθέτοντας τις παραπάνω σχέσεις κατά μέλη, έχουμε

$$\omega_2 a_\nu = a_1 - a_{\nu-1} + \omega_2$$

ή ισοδύναμα

$$\omega_2 a_\nu + a_{\nu-1} = a_1 + \omega_2 = \omega_2$$

και έτσι

$$(\omega_2 + 1)l = \omega_2 \Leftrightarrow l = \frac{\omega_2}{1+\omega_2}.$$

Άρα

$$\lim a_\nu = \frac{\omega_2}{1+\omega_2}.$$

□

Θέμα 9.3.3. Χρησιμοποιώντας το κριτήριο δυνάμεων του 2, αποδείξτε ότι η σειρά

$$\sum_{\nu=1}^{+\infty} \frac{(\log \nu)^{\omega_3}}{\nu}$$

απειρίζεται θετικά. [150]

Λύση. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = \frac{(\log x)^{\omega_3}}{x},$$

για την οποία έχουμε

$$f'(x) = \frac{1}{x^2}(\log x)^{\omega_3 - 1}(\omega_3 - \log x),\ x \in [1, +\infty).$$

Παρατηρούμε ότι η f' αλλάζει πρόσημο στο πεδίο ορισμού της, συνεπώς η f δεν είναι μονότονη στο $[1, +\infty)$. Αν όμως περιοριστούμε στο διάστημα $[e^{\omega_3}, +\infty)$ τότε έχουμε

$$f'(x) \leq 0,\ \forall x \in [e^{\omega_3}, +\infty),$$

οπότε ο περιορισμός της f στο $[e^{\omega_3}, +\infty)$ είναι φθίνουσα συνάρτηση. Έτσι η ακολουθία

$$a_\nu = \frac{(\log \nu)^{\omega_3}}{\nu},\ \nu \geq [e^{\omega_3}] + 1$$

είναι φθίνουσα. Επίσης είναι προφανές ότι

$$a_\nu \geq 0,\ \forall \nu \geq [e^{\omega_3}] + 1.$$

Εφαρμόζοντας το κριτήριο δυνάμεων του 2 έχουμε

$$\sum_{\nu=[e^{\omega_3}]+1}^{+\infty} 2^{\nu-1}\frac{(\log 2^{\nu-1})^{\omega_3}}{2^{\nu-1}} = \sum_{\nu=[e^{\omega_3}]+1}^{+\infty} ((\nu-1)^{\omega_3}(\log 2)^{\omega_3}) = (\log 2)^{\omega_3} \sum_{\nu=[e^{\omega_3}]}^{+\infty} (\nu^{\omega_3}).$$

Όμως προφανώς

$$\sum_{\nu=[e^{\omega_3}]}^{+\infty} (\nu^{\omega_3}) = +\infty,$$

οπότε

$$\sum_{\nu=[e^{\omega_3}]+1}^{+\infty} 2^{\nu-1}\frac{(\log 2^{\nu-1})^{\omega_3}}{2^{\nu-1}} = +\infty$$

και έτσι η σειρά

$$\sum_{\nu=[e^{\omega_3}]+1}^{+\infty} a_\nu$$

απειρίζεται θετικά. Συνεπώς και η σειρά

$$\sum_{\nu=1}^{+\infty} a_\nu$$

απειρίζεται θετικά. □

Θέμα 9.3.4. Χρησιμοποιώντας τον $\epsilon - \delta$ ορισμό του ορίου, αποδείξτε ότι

$$\lim_{x\to\omega_4} (\omega_4 x^2 + x + \omega_4) = \omega_4(\omega_4^2 + 2).$$

[150]

Λύση. Θα δείξουμε ότι

$$(\forall\epsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall x \in \mathbb{R}) \text{ με } 0 < |x - \omega_4| < \delta \Rightarrow \left|(\omega_4 x^2 + x + \omega_4) - (\omega_4\omega_4^2 + \omega_4 + \omega_4)\right| < \epsilon.$$

Όμως

$$\begin{aligned}\left|(\omega_4 x^2 + x + \omega_4) - (\omega_4\omega_4^2 + \omega_4 + \omega_4)\right| &= \left|\omega_4(x^2 - \omega_4^2) + (x - \omega_4)\right| \\ &= |\omega_4(x - \omega_4)(x + \omega_4) + (x - \omega_4)| \\ &= |(x - \omega_4)(\omega_4(x + \omega_4) + 1)| \\ &= |x - \omega_4|\,|\omega_4(x + \omega_4) + 1|\,.\end{aligned}$$

Εμφανίσαμε λοιπόν την παράσταση $|x-\omega_4|$ για την οποία γνωρίζουμε ότι $|x-\omega_4| < \delta$. Πρέπει να βρούμε ένα άνω φράγμα για την παράσταση $|\omega_4(x+\omega_4)+1|$. Χωρίς να κάνουμε την τελική επιλογή του δ, υποθέτουμε ότι $\delta \le 1$, κάτι που δε δημιουργεί πρόβλημα, αφού ενδιαφερόμαστε για ¨μικρά¨ δ. Έτσι, έχουμε

$$\begin{aligned}|x - \omega_4| < \delta \le 1 &\Rightarrow -1 \le x - \omega_4 \le 1 \\ &\Rightarrow 2\omega_4 - 1 \le x + \omega_4 \le 2\omega_4 + 1 \\ &\Rightarrow \omega_4(2\omega_4 - 1) \le \omega_4(x + \omega_4) \le \omega_4(2\omega_4 + 1) \\ &\Rightarrow \omega_4(2\omega_4 - 1) + 1 \le \omega_4(x + \omega_4) + 1 \le \omega_4(2\omega_4 + 1) + 1 \\ &\Rightarrow |\omega_4(x + \omega_4) + 1| \le \omega_4(2\omega_4 + 1) + 1,\end{aligned}$$

οπότε

$$|x - \omega_4||\omega_4(x + \omega_4) + 1| < \delta(\omega_4(2\omega_4 + 1) + 1).$$

Επιλέγοντας, λοιπόν, το δ να είναι τέτοιο ώστε

$$\delta(\omega_4(2\omega_4 + 1) + 1) < \epsilon,$$

δηλαδή

$$\delta < \frac{\epsilon}{\omega_4(2\omega_4 + 1) + 1},$$

έχουμε το ζητούμενο. Άρα τελικά

$$\delta = \min\left\{1, \frac{\epsilon}{\omega_4(2\omega_4 + 1) + 1}\right\}.$$

□

Θέμα 9.3.5. Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα του Bolzano, αποδείξτε ότι

1. αν $a \in (0, +\infty)$ και $f : [a, a\omega_5] \to [a, a\sqrt{\omega_5}]$ είναι μια συνεχής συνάρτηση, τότε υπάρχει $\xi \in [a, a\sqrt{\omega_5}]$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = \xi$. [100]
2. η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = x^{\omega_5+5} + x^{\omega_5+4} + x^{\omega_5+3} + x^{\omega_5+2} + x^{\omega_5+1} - e^{x-\omega_5},\ x \in \mathbb{R},$$

έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $\mathbb{R}$. [50]

Λύση. 1. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g : [a, a\omega_5] \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$g(x) = f(x) - x, \; x \in [a, a\omega_5].$$

Η g ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων είναι συνεχής συνάρτηση. Έχουμε

$$g(a) = f(a) - a.$$

Όμως

$$f(a) \in [a, a\sqrt{\omega_5}] \Rightarrow f(a) \geq a \Rightarrow f(a) - a \geq 0,$$

οπότε

$$g(a) \geq 0.$$

Αντίστοιχα, έχουμε

$$g(a\omega_5) = f(a\omega_5) - a\omega_5.$$

Όμως

$$\begin{aligned} f(a\omega_5) \in [a, a\sqrt{\omega_5}] &\Rightarrow f(a\omega_5) \leq a\sqrt{\omega_5} \leq a\omega_5 \\ &\Rightarrow f(a\omega_5) - a\omega_5 \leq 0, \end{aligned}$$

οπότε

$$g(a\omega_5) \leq 0.$$

Άρα, σύμφωνα με το Θεώρημα του Bolzano, υπάρχει $\xi \in [a, a\omega_5]$ τέτοιο ώστε

$$g(\xi) = 0$$

ή ισοδύναμα

$$f(\xi) = \xi.$$

Όμως $f(\xi) \in [a, a\sqrt{\omega_5}]$ οπότε και $\xi \in [a, a\sqrt{\omega_5}]$.

2. Παρατηρούμε ότι

$$f(0) = -e^{-\omega_5} < 0$$

και

$$f(\omega_5) = \omega_5^{\omega_5+5} + \; \ldots \; + \omega_5^{\omega_5+1} - 1 > 0.$$

Επίσης, η f ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων, είναι συνεχής συνάρτηση. Άρα, σύμφωνα με το Θεώρημα του Bolzano, υπάρχει μια τουλάχιστον ρίζα της f στο διάστημα $(0, \omega_5)$.

□

Θέμα 9.3.6. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} x^{2\omega_6} \sin \frac{1}{x^{2\omega_6 - 1}}, & \text{αν } x \neq 0 \\ 0, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$$

1. είναι παραγωγίσιμη για κάθε $x \in \mathbb{R}$. [50]
2. έχει ασυνεχή παράγωγο. [50]
3. σε τυχούσα περιοχή του μηδενός είναι μη-μονότονη. [50]

Λύση. 1. Έχουμε

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} x^{2\omega_6 - 1} \sin \frac{1}{x^{2\omega_6 - 1}} = 0$$

οπότε $f'(0) = 0$. Επίσης, για $x \neq 0$, έχουμε

$$f'(x) = 2\omega_6 x^{2\omega_6 - 1} \sin \frac{1}{x^{2\omega_6 - 1}} + (1 - 2\omega_6) \cos \frac{1}{x^{2\omega_6 - 1}},$$

οπότε

$$f'(x) = \begin{cases} 2\omega_6 x^{2\omega_6 - 1} \sin \frac{1}{x^{2\omega_6 - 1}} + (1 - 2\omega_6) \cos \frac{1}{x^{2\omega_6 - 1}}, & \text{αν } x \neq 0 \\ 0, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$$

2. Για τις ακολουθίες
$$x_\nu = \sqrt[2\omega_6-1]{\frac{1}{2\nu\pi}}, \quad \nu \in \mathbb{N}$$
και
$$y_\nu = \sqrt[2\omega_6-1]{\frac{1}{2\nu\pi + \frac{\pi}{2}}}, \quad \nu \in \mathbb{N}$$
έχουμε
$$f'(x_\nu) = \frac{\omega_6}{\nu\pi}\sin(2\nu\pi) + (1-2\omega_6)\cos(2\nu\pi) = 1 - 2\omega_6$$
και
$$f'(y_\nu) = \frac{\omega_6}{\nu\pi + \frac{\pi}{4}}\sin\left(2\nu\pi + \frac{\pi}{2}\right) + (1-2\omega_6)\cos\left(2\nu\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\omega_6}{\nu\pi + \frac{\pi}{4}}.$$
Έτσι
$$\lim f'(x_\nu) = 1 - 2\omega_6$$
και
$$\lim f'(y_\nu) = 0.$$
Προφανώς $1 - 2\omega_6 \neq 0$, οπότε το όριο της f' στο σημείο μηδέν δεν υπάρχει. Άρα η f' είναι ασυνεχής στο μηδέν.

3. Για τις ακολουθίες
$$a_\nu = \sqrt[2\omega_6-1]{\frac{1}{2\nu\pi + \frac{\pi}{2}}}\ , \quad \nu \in \mathbb{N}$$
και
$$b_\nu = \sqrt[2\omega_6-1]{\frac{1}{2\nu\pi + \frac{3\pi}{2}}}\ , \quad \nu \in \mathbb{N}$$
έχουμε
$$f'(a_\nu) = \frac{\omega_6}{\nu\pi + \frac{\pi}{4}},\ \forall \nu \in \mathbb{N},$$
και
$$f'(b_\nu) = -\frac{\omega_6}{\nu\pi + \frac{3\pi}{4}},\ \forall \nu \in \mathbb{N}.$$
Έτσι ισχύει ότι
$$f'(a_\nu) > 0,\ \forall \nu \in \mathbb{N},$$
και
$$f'(b_\nu) < 0,\ \forall \nu \in \mathbb{N},$$
δηλαδή σε τυχούσα περιοχή του μηδενός η f' αλλάζει πρόσημο, οπότε εκεί η f είναι μη-μονότονη.

□

Θέμα 9.3.7. Ας είναι $a \in (0, +\infty)$ και f, g δυο συναρτήσεις ορισμένες στο $[a, a\omega_7]$ με τιμές στο $\mathbb{R}$, οι οποίες πληρούν τις ακόλουθες ιδιότητες

1. οι f, g είναι παραγωγίσιμες στο $(a, a\omega_7)$,
2. ισχύει ότι $f(a) \leq g(a)$,
3. ισχύει ότι $f'(x) \leq g'(x)$, $\forall x \in (a, a\omega_7)$.

Εξετάστε αν από τις παραπάνω ιδιότητες προκύπτει η σχέση
$$f(x) \leq g(x),\ \forall x \in [a, a\omega_7].$$
Συγκεκριμένα, στην περίπτωση που η απάντηση είναι καταφατική δώστε πλήρη απόδειξη, ενώ στην περίπτωση που η απάντηση είναι αρνητική δώστε κατάλληλο αντιπαράδειγμα. [100]

Λύση. Από τις ιδιότητες που έχουν δωθεί, δεν προκύπτει το ζητούμενο συμπέρασμα. Για παράδειγμα, για τις συναρτήσεις $f : [1, \omega_7] \to \mathbb{R}$ και $g : [1, \omega_7] \to \mathbb{R}$ με τύπους

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{αν } x \in [1, \omega_7) \\ 1 + \omega_7, & \text{αν } x = \omega_7 \end{cases}$$

και

$$g(x) = x, \quad \forall x \in [1, \omega_7]$$

έχουμε

1. προφανώς οι f, g είναι παραγωγίσιμες στο $(1, \omega_7)$
2. ισχύει ότι $f(1) = 1 = g(1)$
3. ισχύει ότι $f'(x) = 1 = g'(x)$, $\forall x \in (1, \omega_7)$,

αλλά το ζητούμενο συμπέρασμα δεν ισχύει αφού

$$f(\omega_7) = 1 + \omega_7 > \omega_7 = g(\omega_7).$$

Σημειώνουμε ότι, με την επιπλέον υπόθεση ότι οι f, g είναι συνεχείς στο σημείο $a\omega_7$, το συμπέρασμα ισχύει. □

9.4 ΠΡΩΤΗ ΠΡΟΟΔΟΣ 2009–2010

Θέμα 9.4.1. Αν τα σύνολα $A, B \subseteq \mathbb{R}$ είναι φραγμένα και $\xi \in \mathbb{R}$, δείξτε ότι

1. $\sup(A \cup B) = \max\{\sup A,\ \sup B\}$ [0.8]
2. $\inf B - \sup A = \inf\{y - x :\ x \in A \quad \text{και} \quad y \in B\}$ [0.8]
3. $\sup\{\xi + y :\ y \in A\} = \xi + \sup A$ [0.8]

Λύση. 1. Για τυχόν $x \in A \cup B$ έχουμε

- αν $x \in A$ τότε
$$x \leq \sup A \leq \max\{\sup A,\ \sup B\}.$$
- αν $x \in B$ τότε
$$x \leq \sup B \leq \max\{\sup A,\ \sup B\}.$$

Άρα σε κάθε περίπτωση έχουμε
$$x \leq \max\{\sup A,\ \sup B\}$$
οπότε ο πραγματικός αριθμός $\max\{\sup A,\ \sup B\}$ είναι άνω φράγμα του $A \cup B$.

Έστω $\epsilon > 0$.

- Αν $\max\{\sup A,\ \sup B\} = \sup A$ τότε $(\exists x \in A)$ τέτοιο ώστε
$$x > \sup A - \epsilon = \max\{\sup A, \sup B\} - \epsilon.$$
- Αν $\max\{\sup A,\ \sup B\} = \sup B$ τότε $(\exists x \in B)$ τέτοιο ώστε
$$x > \sup B - \epsilon = \max\{\sup A, \sup B\} - \epsilon.$$

Άρα σε κάθε περίπτωση έχουμε ότι $(\exists x \in A \cup B)$ τέτοιο ώστε
$$x > \max\{\sup A, \sup B\} - \epsilon.$$

Από τα παραπάνω προκύπτει το ζητούμενο.

2. Για τυχόν $z \in \{y - x : x \in A \quad \text{και} \quad y \in B\}$ έχουμε ότι υπάρχουν $u \in A$ και $v \in B$ τέτοια ώστε
$$z = v - u.$$
Έτσι έχουμε
$$z = v - u \geq \inf B - \sup A,$$
οπότε ο πραγματικός αριθμός $\inf B - \sup A$ είναι κάτω φράγμα του $\{y - x : x \in A \quad \text{και} \quad y \in B\}$.
Έστω $\epsilon > 0$. Τότε υπάρχουν $u \in A$ και $v \in B$ τέτοια ώστε
$$u > \sup A - \epsilon$$
και
$$v < \inf B + \epsilon$$
οπότε
$$v - u < (\inf B + \epsilon) - (\sup A - \epsilon) = \inf B - \sup A + 2\epsilon.$$
Προφανώς $v - u \in \{y - x : x \in A \quad \text{και} \quad y \in B\}$.
Από τα παραπάνω προκύπτει το ζητούμενο.

3. Για τυχόν $z \in \{\xi + y : y \in A\}$ έχουμε ότι υπάρχει $x \in A$ τέτοιο ώστε
$$z = \xi + x.$$
Έτσι έχουμε
$$z = \xi + x \leq \xi + \sup A,$$
οπότε ο πραγματικός αριθμός $\xi + \sup A$ είναι άνω φράγμα του $\{\xi + y : y \in A\}$.
Έστω $\epsilon > 0$. Τότε υπάρχει $x \in A$ τέτοιο ώστε
$$x > \sup A - \epsilon$$
οπότε
$$\xi + x > \xi + \sup A - \epsilon.$$
Προφανώς $\xi + x \in \{\xi + y : y \in A\}$.
Από τα παραπάνω προκύπτει το ζητούμενο.

□

Θέμα 9.4.2. Δείξτε ότι οι παρακάτω ακολουθίες είναι βασικές.

1. $a_\nu = \frac{1}{\nu} + \frac{1}{\nu+1} + \ldots + \frac{1}{\nu+k}$, όπου το k είναι ένας σταθερός φυσικός αριθμός. [0.9]
2. $a_\nu = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + (-1)^\nu \frac{1}{\nu!}$ [0.9]
3. $a_\nu = 1 + \frac{1}{1^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \ldots + \frac{1}{\nu^\nu}$ [0.9]

Λύση. 1. Για τυχόντα $\mu, \nu \in \mathbb{N}$ με $\mu > \nu$ έχουμε
$$\begin{aligned}
|a_\mu - a_\nu| &= \left| \left(\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\mu+1} + \ldots + \frac{1}{\mu+k} \right) - \left(\frac{1}{\nu} + \frac{1}{\nu+1} + \ldots + \frac{1}{\nu+k} \right) \right| \\
&= \left| \left(\frac{1}{\mu} - \frac{1}{\nu} \right) + \left(\frac{1}{\mu+1} - \frac{1}{\nu+1} \right) + \ldots + \left(\frac{1}{\mu+k} - \frac{1}{\nu+k} \right) \right| \\
&\leq \frac{\mu+\nu}{\mu\nu} + \frac{\mu+\nu}{(\mu+1)(\nu+1)} + \ldots + \frac{\mu+\nu}{(\mu+k)(\nu+k)} \\
&\leq \frac{\mu+\nu}{\mu\nu} + \frac{\mu+\nu}{\mu\nu} + \ldots + \frac{\mu+\nu}{\mu\nu} \\
&= (k+1)\frac{\mu+\nu}{\mu\nu} \\
&= (k+1)\left(\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\nu} \right) \\
&< \epsilon,
\end{aligned}$$
αν
$$\mu > \nu > \left[\frac{2(k+1)}{\epsilon} \right] + 1.$$

2. Για τυχόντα $\mu, \nu \in \mathbb{N}$ με $\mu > \nu$ έχουμε

$$\begin{aligned}
|a_\mu - a_\nu| &= \Bigg|\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + (-1)^\nu \frac{1}{\nu!} + \ldots + (-1)^\mu \frac{1}{\mu!}\right) \\
&\qquad - \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + (-1)^\nu \frac{1}{\nu!}\right)\Bigg| \\
&= \left|(-1)^{\nu+1}\frac{1}{(\nu+1)!} + \ldots + (-1)^\mu \frac{1}{\mu!}\right| \\
&\leq \frac{1}{(\nu+1)!} + \ldots + \frac{1}{\mu!} \\
&= \frac{1}{(\nu+1)!}\left(1 + \frac{1}{\nu+2} + \ldots + \frac{1}{(\nu+2)(\nu+3)\ldots\mu}\right) \\
&\leq \frac{1}{(\nu+1)!}\left(1 + \frac{1}{\nu+1} + \ldots + \frac{1}{(\nu+1)(\nu+1)\ldots(\nu+1)}\right) \\
&= \frac{1}{(\nu+1)!}\left(1 + \frac{1}{\nu+1} + \ldots + \frac{1}{(\nu+1)^{\mu-\nu-1}}\right) \\
&= \frac{1}{(\nu+1)!}\left(\frac{1 - \left(\frac{1}{\nu+1}\right)^{\mu-\nu}}{1 - \frac{1}{\nu+1}}\right) \\
&\leq \frac{1}{(\nu+1)!}\left(\frac{\nu+1}{\nu}\right) \\
&= \frac{1}{\nu!\nu}\,.
\end{aligned}$$

Όμως

$$\lim \frac{1}{\nu!\nu} = 0,$$

οπότε υπάρχει $\nu_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε για τυχόν $\nu \in \mathbb{N}$ με $\nu > \nu_0$ να ισχύει

$$\frac{1}{\nu!\nu} < \epsilon,$$

οπότε για $\mu > \nu > \nu_0$ έχουμε το ζητούμενο.

3. Για τυχόντα $\mu, \nu \in \mathbb{N}$ με $\mu > \nu$ έχουμε

$$\begin{aligned}
|a_\mu - a_\nu| &= \left|\left(1 + \frac{1}{1^1} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{\nu^\nu} + \frac{1}{(\nu+1)^{\nu+1}} + \ldots + \frac{1}{\mu^\mu}\right) - \left(1 + \frac{1}{1^1} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{\nu^\nu}\right)\right| \\
&= \frac{1}{(\nu+1)^{\nu+1}} + \ldots + \frac{1}{\mu^\mu} \\
&\leq \frac{1}{2^{\nu+1}} + \ldots + \frac{1}{2^\mu} \\
&= \frac{1}{2^{\nu+1}}\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^{\mu-\nu-1}}\right) \\
&= \frac{1}{2^{\nu+1}}\left(\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{\mu-\nu}}{1 - \frac{1}{2}}\right) \\
&\leq \frac{2}{2^{\nu+1}} = \frac{1}{2^\nu}.
\end{aligned}$$

Όμως

$$\lim \frac{1}{2^\nu} = 0,$$

οπότε υπάρχει $\nu_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε για τυχόν $\nu \in \mathbb{N}$ με $\nu > \nu_0$ να ισχύει

$$\frac{1}{2^\nu} < \epsilon,$$

οπότε για $\mu > \nu > \nu_0$ έχουμε το ζητούμενο.

□

Θέμα 9.4.3. Εξετάστε αν οι παρακάτω σειρές συγκλίνουν.

1. $\sum_{\nu=1}^{+\infty} \frac{(\nu!)^2}{(2\nu)!}$ [0.8]
2. $\sum_{\nu=1}^{+\infty} \nu^2 e^{-\nu}$ [0.8]
3. $\sum_{\nu=1}^{+\infty} e^{-\nu^2}$ [0.8]
4. $\sum_{\nu=1}^{+\infty} \nu! \nu^{-\nu}$ [0.8]
5. $\sum_{\nu=2}^{+\infty} \frac{\nu^{\nu-1}}{3^{\nu-1}(\nu-1)!}$ [0.8]
6. $\sum_{\nu=1}^{+\infty} \frac{10\nu+3}{2^\nu \nu}$ [0.9]

Λύση. 1. Έχουμε

$$\begin{aligned}\frac{a_{\nu+1}}{a_\nu} &= \frac{((\nu+1)!)^2(2\nu)!}{(2(\nu+1))!(\nu!)^2}\\ &= \frac{(\nu!)^2(\nu+1)^2(2\nu)!}{(2\nu)!(2\nu+1)(2\nu+2)(\nu!)^2}\\ &= \frac{(\nu+1)^2}{(2\nu+1)(2\nu+2)}.\end{aligned}$$

Προφανώς

$$\lim \frac{a_{\nu+1}}{a_\nu} = \lim \frac{(\nu+1)^2}{(2\nu+1)(2\nu+2)} = \frac{1}{4}$$

οπότε, αφού $0 \leq \frac{1}{4} < 1$ και σύμφωνα με το κριτήριο πηλίκων του D' Alembert, η σειρά συγκλίνει.

2. Έχουμε

$$\frac{a_{\nu+1}}{a_\nu} = \frac{(\nu+1)^2 e^\nu}{\nu^2 e^{\nu+1}} = \left(1+\frac{1}{\nu}\right)^2 \frac{1}{e}.$$

Προφανώς

$$\lim \frac{a_{\nu+1}}{a_\nu} = \lim \left(\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^2 \frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e}$$

οπότε, αφού $0 \leq \frac{1}{e} < 1$ και σύμφωνα με το κριτήριο πηλίκων του D' Alembert, η σειρά συγκλίνει.

3. Έχουμε

$$\sqrt[\nu]{a_\nu} = \sqrt[\nu]{e^{-\nu^2}} = e^{-\nu} = \frac{1}{e^\nu}.$$

Προφανώς

$$\lim \sqrt[\nu]{a_\nu} = \lim \frac{1}{e^\nu} = 0$$

οπότε, αφού $0 \leq 0 < 1$ και σύμφωνα με το κριτήριο $\nu-$οστής ρίζας του Cauchy, η σειρά συγκλίνει.

4. Έχουμε

$$\begin{aligned}\frac{a_{\nu+1}}{a_\nu} &= \frac{(\nu+1)!\nu^\nu}{(\nu+1)^{\nu+1}\nu!}\\ &= \frac{\nu!(\nu+1)\nu^\nu}{(\nu+1)^\nu(\nu+1)\nu!}\\ &= \left(\frac{\nu}{\nu+1}\right)^\nu\\ &= \frac{1}{\left(\frac{\nu+1}{\nu}\right)^\nu}\\ &= \frac{1}{\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^\nu}.\end{aligned}$$

Προφανώς

$$\lim \frac{a_{\nu+1}}{a_\nu} = \lim \frac{1}{\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^\nu} = \frac{1}{e}$$

οπότε, αφού $0 \leq \frac{1}{e} < 1$ και σύμφωνα με το κριτήριο πηλίκων του D' Alembert, η σειρά συγκλίνει.

5. Έχουμε
$$\frac{a_{\nu+1}}{a_\nu} = \frac{(\nu+1)^\nu 3^{\nu-1}(\nu-1)!}{3^\nu \nu! \nu^{\nu-1}} = \frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^\nu.$$
Προφανώς
$$\lim \frac{a_{\nu+1}}{a_\nu} = \lim \frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^\nu = \frac{e}{3}$$
οπότε, αφού $0 \leq \frac{e}{3} < 1$ και σύμφωνα με το κριτήριο πηλίκων του D' Alembert, η σειρά συγκλίνει.

6. Θεωρούμε την $b_\nu = \frac{1}{2^\nu}$ και έχουμε
$$\lim \frac{a_\nu}{b_\nu} = \lim \frac{10\nu+3}{\nu} = 10,$$
άρα, σύμφωνα με το οριακό κριτήριο σύγκρισης σειρών, η συμπεριφορά της $\sum_{\nu=1}^{+\infty} a_\nu$ ως προς τη σύγκλιση είναι η ίδια με αυτήν της $\sum_{\nu=1}^{+\infty} b_\nu$. Έχουμε
$$\lim \sqrt[\nu]{\frac{1}{2^\nu}} = \frac{1}{2}.$$
Αφού $0 \leq \frac{1}{2} < 1$ και σύμφωνα με το κριτήριο $\nu-$οστής ρίζας του Cauchy, η $\sum_{\nu=1}^{+\infty} b_\nu$ συγκλίνει, άρα και η $\sum_{\nu=1}^{+\infty} a_\nu$ συγκλίνει.

□

9.5 ΔΕΥΤΕΡΗ ΠΡΟΟΔΟΣ 2009–2010

Θέμα 9.5.1. Δείξτε ότι υπάρχει $\xi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ τέτοιο ώστε
$$\lim_{x\to\xi} \frac{\sin x - \sin\xi - \xi x + \xi^2}{x-\xi} = 0.$$
[2.0]

Λύση. Έχουμε
$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to\xi} \frac{\sin x - \sin\xi - \xi x + \xi^2}{x-\xi} = 0\\
\Leftrightarrow &\lim_{x\to\xi} \frac{\sin x - \sin\xi - \xi(x-\xi)}{x-\xi} = 0\\
\Leftrightarrow &\lim_{x\to\xi} \left(\frac{\sin x - \sin\xi}{x-\xi} - \xi\right) = 0\\
\Leftrightarrow &\lim_{x\to\xi} \frac{\sin x - \sin\xi}{x-\xi} = \xi\\
\Leftrightarrow &\cos\xi = \xi,
\end{aligned}$$
συνεπώς αρκεί να αποδείξουμε ότι υπάρχει $\xi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ τέτοιο ώστε $\cos\xi = \xi$. Αυτό όμως προκύπτει άμεσα από το Θεώρημα Σταθερού Σημείου του Brouwer, αφού η συνάρτηση $f(x) = \cos x$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, είναι συνεχής και παίρνει τιμές στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. □

Θέμα 9.5.2. Έστω $a < c < b$ και $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της συνάρτηση, με τις ιδιότητες

1. η f' είναι συνεχής στο $[a,b]$,
2. η f' είναι παραγωγίσιμη στο (a,b),
3. ισχύει η σχέση
$$\frac{f(b)-f(c)}{b-c} = \frac{f(c)-f(a)}{c-a}.$$

Δείξτε ότι υπάρχει $\xi \in (a,b)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi) = 0$. [2.0]

Λύση. Εφαρμόζοντας το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Lagrange, για τη συνάρτηση f', στα διαστήματα (a, c) και (c, b) έχουμε ότι υπάρχουν $\xi_1 \in (a, c)$ και $\xi_2 \in (c, b)$ τέτοια ώστε

$$f'(\xi_1) = \frac{f(c) - f(a)}{c - a}$$

και

$$f'(\xi_2) = \frac{f(b) - f(c)}{b - c}.$$

Όμως έχουμε ότι

$$\frac{f(b) - f(c)}{b - c} = \frac{f(c) - f(a)}{c - a}$$

οπότε $f'(\xi_1) = f'(\xi_2)$. Το συμπέρασμα προκύπτει εφαρμόζοντας το Θεώρημα του Rolle, στο διάστημα (ξ_1, ξ_2). □

Θέμα 9.5.3. Ας είναι $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη και περιοδική, με περίοδο T, συνάρτηση. Δείξτε ότι η f' είναι περιοδική με περίοδο T. [2.0]

Λύση. Για τυχόν $\xi \in \mathbb{R}$, έχουμε

$$\begin{aligned}
f'(\xi + T) &= \lim_{x \to \xi + T} \frac{f(x) - f(\xi + T)}{x - (\xi + T)} \\
&= \lim_{(x-T) \to \xi} \frac{f(x) - f(\xi + T)}{x - (\xi + T)} \\
&= \lim_{y \to \xi} \frac{f(y + T) - f(\xi + T)}{(y + T) - (\xi + T)} \\
&= \lim_{y \to \xi} \frac{f(y) - f(\xi)}{y - \xi} \\
&= f'(\xi).
\end{aligned}$$

□

Θέμα 9.5.4. Ας είναι $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ δυο συναρτήσεις, με τις ιδιότητες

1. $f(x) = x + a$, $\forall x \in \mathbb{R}$, όπου $a \in \mathbb{R}$ είναι μια σταθερά,
2. η g είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της,
3. $f \circ g = g \circ f$.

Δείξτε ότι η g' είναι περιοδική, με περίοδο a. [2.0]

Λύση. Αρχικά παρατηρούμε ότι για τυχόν $x \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) \Leftrightarrow f(g(x)) = g(f(x)) \Leftrightarrow g(x) + a = g(x + a).$$

Έτσι, για τυχόν $\xi \in \mathbb{R}$, ισχύει ότι

$$\begin{aligned}
g'(\xi + a) &= \lim_{x \to \xi + a} \frac{g(x) - g(\xi + a)}{x - (\xi + a)} \\
&= \lim_{(x-a) \to \xi} \frac{g(x) - g(\xi) - a}{x - (\xi + a)} \\
&= \lim_{y \to \xi} \frac{g(y + a) - g(\xi) - a}{(y + a) - (\xi + a)} \\
&= \lim_{y \to \xi} \frac{g(y) + a - g(\xi) - a}{y - \xi} \\
&= \lim_{y \to \xi} \frac{g(y) - g(\xi)}{y - \xi} \\
&= g'(\xi).
\end{aligned}$$

Συνεπώς η συνάρτηση g είναι περιοδική, με περίοδο a. □

Θέμα 9.5.5. Ας είναι $f : I \to \mathbb{R}$, όπου I ένα διάστημα της πραγματικής ευθείας, μια παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της συνάρτηση, τέτοια ώστε η παράγωγος της να μηδενίζεται σε ολόκληρο το διάστημα I εκτός από ένα πεπερασμένο πλήθος σημείων του. Δείξτε ότι η f είναι σταθερή στο I. [2.0]

Λύση. Ας είναι $n \in \mathbb{N}$ και $x_1, x_2, \ldots, x_n$ τα σημεία του διαστήματος I στα οποία η f' δεν μηδενίζεται. Τότε σε κάθε διάστημα της μορφής (x_j, x_{j+1}), $j = 1, 2, \ldots, n-1$, η συνάρτηση f είναι σταθερή, δηλαδή υπάρχουν $c_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, 2, \ldots, n-1$, τέτοια ώστε $f(x) = c_j$, για κάθε $x \in (x_j, x_{j+1})$. Όμως η συνάρτηση f είναι συνεχής στο I ως παραγωγίσιμη σε αυτό, οπότε υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $c_1 = c_2 = \ldots = c_n = c$ και επιπλέον $f(x_j) = c$, $j = 1, 2, \ldots, n-1$, δηλαδή η f είναι σταθερή στο διάστημα I. □

9.6 ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΣ 2010

Σε όλα τα θέματα ισχύει ότι

$$2 \leq \omega_i \leq 8, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

Θέμα 9.6.1. Εξετάστε αν η ακολουθία $(x_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ με $x_1 = \omega_1$ και

$$x_{\nu+1} = \frac{1}{2}\left(x_\nu + \frac{\omega_1}{x_\nu}\right), \quad \nu \in \mathbb{N},$$

έχει υπακολουθία η οποία να συγκλίνει στο $\sqrt{\omega_1}$. [2.0]

Λύση. Η ακολουθία $(x_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ είναι κάτω φραγμένη. Πράγματι, χρησιμοποιώντας μαθηματική επαγωγή, έχουμε

- $x_1 = \omega_1 > 0$.
- Έστω ότι $x_\mu > 0$. Τότε

$$x_{\mu+1} = \frac{1}{2}\left(x_\mu + \frac{\omega_1}{x_\mu}\right) > 0.$$

Συνεπώς, τελικά έχουμε ότι $x_\nu > 0$, για όλα τα $\nu \in \mathbb{N}$, δηλαδή το μηδέν είναι ένα κάτω φράγμα της (x_ν), $\nu \in \mathbb{N}$.

Επίσης, η ακολουθία $(x_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ είναι φθίνουσα. Πράγματι, για $\nu \geq 2$, έχουμε

$$\left(x_\nu - \frac{\omega_1}{x_\nu}\right)^2 \geq 0$$

συνεπώς

$$x_\nu^2 + \frac{\omega_1^2}{x_\nu^2} \geq 2\omega_1,$$

και έτσι

$$\begin{aligned} x_{\nu+1}^2 &= \frac{1}{4}\left(x_\nu + \frac{\omega_1}{x_\nu}\right)^2 \\ &= \frac{1}{4}\left(x_\nu^2 + 2\omega_1 + \frac{\omega_1^2}{x_\nu^2}\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(x_\nu^2 + \frac{\omega_1^2}{x_\nu^2}\right) + \frac{\omega_1}{2} \\ &\geq \frac{1}{4}(2\omega_1) + \frac{1}{2}\omega_1 \\ &= \omega_1, \end{aligned}$$

δηλαδή

$$x_{\nu+1}^2 \geq \omega_1, \quad \forall \nu \geq 2.$$

Έτσι, για τυχόν $\nu \geq 2$, ισχύει ότι

$$\begin{aligned} x_\nu - x_{\nu+1} &= x_\nu - \frac{1}{2}\left(x_\nu + \frac{\omega_1}{x_\nu}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(x_\nu - \frac{\omega_1}{x_\nu}\right) \\ &= \frac{1}{2}\frac{x_\nu^2 - \omega_1}{x_\nu} \\ &\geq 0, \end{aligned}$$

οπότε η $(x_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ είναι φθίνουσα.

Συνεπώς, ως φθίνουσα και κάτω φραγμένη, η ακολουθία $(x_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει, έστω στον πραγματικό αριθμό l. Για να προσδιορίσουμε το l, έχουμε

$$x_{\nu+1} = \frac{1}{2}\left(x_\nu + \frac{\omega_1}{x_\nu}\right) \Rightarrow l = \frac{1}{2}\left(l + \frac{\omega_1}{l}\right) \Rightarrow l = \frac{\omega_1}{l} \Rightarrow l = \pm\sqrt{\omega_1}.$$

Όμως η περίπτωση $l = -\sqrt{\omega_1}$ απορρίπτεται, αφού η $(x_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ είναι μια ακολουθία μη αρνητικών όρων, συνεπώς κάθε υπακολουθία της $(x_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει στο $\sqrt{\omega_1}$. □

Θέμα 9.6.2. Δείξτε ότι αν $(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ είναι μια ακολουθία θετικών όρων, τέτοια ώστε η σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$ να συγκλίνει, τότε και οι σειρές

1. $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu^2$
2. $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu a_{\nu+1}$

συγκλίνουν. [2.0]

Λύση. Αφού η σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$ συγκλίνει, έχουμε ότι

$$\lim a_\nu = 0,$$

άρα αφού $a_\nu \geq 0$, $\nu \in \mathbb{N}$, έχουμε ότι υπάρχει $\nu_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$0 < a_\nu < 1, \quad \forall \nu \geq \nu_0.$$

Έτσι, για τυχόν $\nu \geq \nu_0$, έχουμε $a_\nu^2 < a_\nu$ και $a_\nu a_{\nu+1} < a_\nu$. Το συμπέρασμα προκύπτει άμεσα από το κριτήριο σύγκρισης σειρών. □

Θέμα 9.6.3. Δείξτε ότι αν μια συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ πληροί τις ιδιότητες

1. η f είναι περιοδική με περίοδο ω_2
2. υπάρχει το όριο $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

τότε είναι σταθερή. [2.0]

Λύση. Έστω ότι

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = l.$$

Υποθέτουμε ότι η f δεν είναι σταθερή και θα καταλήξουμε σε άτοπο. Αφού δεν είναι σταθερή, υπάρχουν $y, m \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$$f(y) = m \neq l.$$

Όμως, για τυχόν $\nu \in \mathbb{N}$ έχουμε ότι

$$f(y) = f(y + \nu\omega_2)$$

οπότε

$$f(y + \nu\omega_2) = m \neq l, \quad \forall \nu \in \mathbb{N}.$$

Συνεπώς

$$\lim_{\nu\to\infty} f(y + \nu\omega_2) = m \neq l,$$

το οποίο είναι άτοπο, αφού

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = l.$$

□

Θέμα 9.6.4. Δείξτε ότι αν μια συνάρτηση $f : [\omega_3, 2\omega_3] \to \mathbb{R}$ πληροί τις ιδιότητες

1. η f είναι συνεχής
2. $f(\omega_3)f(2\omega_3) < 0$

τότε υπάρχει $\xi \in [\omega_3, 2\omega_3]$ τέτοιο ώστε

$$\omega_3 f(\omega_3) + 2\omega_3 f(2\omega_3) = 3\omega_3 f(\xi).$$

[2.0]

Λύση. Παρατηρούμε ότι η σχέση

$$\omega_3 f(\omega_3) + 2\omega_3 f(2\omega_3) = 3\omega_3 f(\xi)$$

είναι ισοδύναμη με την

$$\omega_3(f(\omega_3) - f(\xi)) + 2\omega_3(f(2\omega_3) - f(\xi)) = 0,$$

συνεπώς θεωρούμε τη συνάρτηση $g : [\omega_3, 2\omega_3] \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$g(x) = \omega_3(f(\omega_3) - f(x)) + 2\omega_3(f(2\omega_3) - f(x)) = 0.$$

Η g είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της και επιπλέον

$$g(\omega_3)g(2\omega_3) = -2\omega_3^2(f(\omega_3) - f(2\omega_3))^2 < 0.$$

Έτσι, από το Θεώρημα του Bolzano, έχουμε ότι υπάρχει $\xi \in [\omega_3, 2\omega_3]$ τέτοιο ώστε $g(\xi) = 0$ ή ισοδύναμα

$$\omega_3 f(\omega_3) + 2\omega_3 f(2\omega_3) = 3\omega_3 f(\xi).$$

□

Θέμα 9.6.5. Δείξτε ότι αν μια συνάρτηση $f : [0, \omega_4] \to \mathbb{R}$ πληροί τις ιδιότητες

1. η f είναι συνεχής στο $[0, \omega_4]$ και παραγωγίσιμη στο $(0, \omega_4)$
2. $f(0) = 0$

τότε υπάρχει $\xi \in (0, \omega_4)$ τέτοιο ώστε

$$f(\xi) = (\omega_4 - \xi)f'(\xi).$$

[2.0]

Λύση. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g : [0, \omega_4] \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$g(x) = (\omega_4 - x)f(x).$$

Η g είναι παραγωγίσιμη και μάλιστα έχουμε

$$g'(x) = -f(x) + (\omega_4 - x)f'(x), \quad x \in [0, \omega_4].$$

Επίσης

$$g(0) = 0 = g(\omega_4),$$

οπότε από το Θεώρημα του Rolle, υπάρχει $\xi \in (0, \omega_4)$ τέτοιο ώστε

$$g'(\xi) = 0$$

ή ισοδύναμα

$$f(\xi) = (\omega_4 - \xi)f'(\xi).$$

□