Κεφάλαιο 5

Γραμμικές απεικονίσεις, βάσεις και πίνακες

Πίνακες πάνω από το σώμα $\mathbb{K}$

Το σύνολο των $m \times n$ πινάκων με όρους στο σώμα $\mathbb{K}$ συμβολίζεται $\mathcal{M}(m,\, n,\, \mathbb{K})$ ή $\mathbb{K}^{m,n}$ ή $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$.

Η θεωρία των πινάκων που μελετήσαμε στην Εισαγωγή στη Γραμμική Άλγεβρα, στο μεγαλύτερο μέρος της ισχύει επακριβώς για πίνακες με όρους σε οποιοδήποτε σώμα.

Για οποιοδήποτε σώμα $\mathbb{K}$, $\mathcal{M}(m,\, n,\, \mathbb{K})$ είναι διανυσματικός χώρος, και ο πολλαπλασιασμός πινάκων ορίζεται όταν αυτοί έχουν κατάλληλο σχήμα. Εάν A είναι $m \times n$ πίνακας, και B είναι $n \times k$ πίνακας πάνω από το σώμα $\mathbb{K}$, ορίζεται το γινόμενο AB, και είναι ο $m \times k$ πίνακας C_1 ο οποίος έχει στη θέση $i\,j$, δηλαδή στην i γραμμή και στην j στήλη, τον όρο

$$\begin{aligned} c_{i\,j} &= a_{i\,1}\, b_{1\,j} + \cdots + a_{i\,n}\, b_{n\,j} \\ &= \sum_{\ell=1}^{n} a_{i\,\ell}\, b_{\ell\,j}\,. \end{aligned}$$

Η απαλοιφή Gauss μπορεί επίσης να εφαρμοστεί σε οποιοδήποτε σώμα $\mathbb{K}$ για να μετατρέψουμε ένα $m \times n$ πίνακα σε ένα γραμμοϊσοδύναμο πίνακα σε κλιμακωτή μορφή.

Η ***τάξη*** του πίνακα A (ή ***βαθμός*** του πίνακα A) είναι ο αριθμός $r(A)$,

$$\begin{aligned} r(A) &= \text{αριθμός γραμμικά ανεξάρτητων γραμμών του } A \\ &= \text{αριθμός γραμμικά ανεξαρτήτων στηλών του } A \\ &= \text{αριθμός οδηγών στο γραμμοϊσοδύναμο πίνακα σε κλιμακωτή μορφή} \end{aligned}$$

Προσέξτε ότι σε ένα πίνακα σε κλιμακωτή μορφή, κάθε μή μηδενική γραμμή έχει έναν οδηγό. (Καμία φορά δεν προσέχουμε τον οδηγό στην τελευταία γραμμή, επειδή δεν τον χρησιμοποιούμε κατά την απαλοιφή)

Πρόταση 5.1 *Κάθε γραμμική απεικόνιση $L : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ αντιστοιχεί σε ένα $m \times n$ πίνακα A, τέτοιο ώστε, για κάθε $b \in \mathbb{K}^n$,* $\quad L(b) = Ab$,

$$L(b_1, \ldots, b_n) = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Απόδειξη. Θεωρούμε την κανονική βάση $\{e_1, \ldots, e_n\}$ του $\mathbb{K}^n$,

$$e_1 = (1,\, 0,\, \ldots,\, 0), \ldots, e_n = (0,\, \ldots, 0,\, 1)$$

και τα διανύσματα $L(e_1), \ldots, L(e_n) \quad \in \mathbb{K}^m$.

Ορίζουμε τον πίνακα A να έχει στη j στήλη, για $j = 1, \ldots, n$, το διάνυσμα $L(e_j) \in \mathbb{K}^m$. Δηλαδή

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & & a_{mn} \end{bmatrix}$$

όπου $(a_{1j}, \ldots, a_{mj}) = L(e_j)$.

Εάν $b = (b_1, \ldots, b_n)$ έχουμε $b = b_1 e_1 + \cdots + b_n e_n$, και συνεπώς

$$\begin{aligned} L(b) &= b_1 L(e_1) + \cdots + b_n L(e_n) \\ &= b_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + \cdots + b_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \\ &= Ab\,. \end{aligned}$$

□

Γραμμικές απεικονίσεις και πίνακες

Θεωρούμε διανυσματικούς χώρους πεπερασμένης διάστασης V και W, και γραμμική απεικόνιση $L : V \to W$. Εάν επιλέξουμε μία βάση $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ του V, γνωρίζουμε ότι ορίζεται ισομορφισμός

$$\iota_{\mathcal{B}} : V \to \mathbb{K}^n$$

ο οποίος απεικονίζει κάθε διάνυσμα $v \in V$ στο διάνυσμα συντεταγμένων του v ως προς τη βάση $\mathcal{B}$: εάν $v = b_1 v_1 + \cdots + b_n v_n$, τότε

$$\iota_{\mathcal{B}}(v) = (b_1, \ldots, b_n)\,.$$

Εάν επιλέξουμε μία βάση $\mathcal{C} = \{w_1, \ldots, w_m\}$ του W, έχουμε επίσης τον ισομορφισμό

$$\iota_{\mathcal{C}} : W \to \mathbb{K}^m\,,$$

ο οποίος απεικονίζει το διάνυσμα $w = c_1 w_1 + \cdots + c_m w_m$ στο διάνυσμα συντεταγμένων του w ως προς τη βάση $\mathcal{C}$,

$$\iota_{\mathcal{C}}(w) = (c_1, \ldots, c_m)\,.$$

Εάν συνθέσουμε τη γραμμική απεικόνιση $L : V \to W$ από τα δεξιά με τον ισομορφισμό $\iota_{\mathcal{B}}^{-1} : \mathbb{K}^n \to V$ και από τα αριστερά με τον ισομορφισμό $\iota_{\mathcal{C}} : W \to \mathbb{K}^m$, έχουμε την απεικόνιση

$$\iota_{\mathcal{C}} \circ L \circ \iota_{\mathcal{B}}^{-1} : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$$

Σύμφωνα με την Πρόταση 5.1, αυτή η απεικόνιση αντιστοιχεί σε πολλαπλασιασμό με ένα $m \times n$ πίνακα A, τέτοιο ώστε

$$A \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix}$$

εάν και μόνον εάν

$$L(b_1 v_1 + \cdots + b_n v_n) = c_1 w_1 + \ldots + c_m w_m\,.$$

Πιο αναλυτικά, για κάθε διάνυσμα v_j της βάσης $\mathcal{B}$ του V, το διάνυσμα $L(v_j) \in W$ γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων της βάσης $\mathcal{C}$ του W. Γράφουμε $(a_{1j}, \ldots, a_{mj})$ για το διάνυσμα συντεταγμένων του $L(v_j)$ ως προς τη βάση $\mathcal{C}$:

$$\begin{aligned} L(v_j) &= a_{1j} w_1 + \cdots + a_{mj} w_m \\ &= \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i\,. \end{aligned}$$

Ο $m \times n$ πίνακας

$$A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,n}}$$

ονομάζεται ***πίνακας της απεικόνισης*** L ***ως προς τις βάσεις*** $\mathcal{B}$ ***και*** $\mathcal{C}$. Ο πίνακας A έχει στη j στήλη το διάνυσμα συντεταγμένων του $L(v_j)$ ως προς τη βάση $\mathcal{C}$, και

$$A \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix}$$

εάν και μόνον εάν

$$L(b_1 v_1 + \cdots + b_n v_n) = c_1 w_1 + \cdots + c_m w_m\,.$$

Παρατήρηση: Προσοχή στη σειρά των δεικτών, που δεν είναι αυτή που έχουμε συνηθίσει, π.χ. σε πολλαπλασιασμό πίνακα επί διάνυσμα: $(Ab)_i = \sum a_{ij} b_j$. Η διάταξη που χρησιμοποιήσαμε επιβάλλεται για να ταιριάζει ο πολλαπλασιασμός πινάκων με τη σύνθεση απεικονίσεων, 5.5.

Θα δούμε αργότερα ότι η διάταξη των δεικτών αντιστρέφεται όταν περνάμε από διάνυσμα της βάσης σε διάνυσμα συντεταγμένων ως προς τη βάση.

Αντίστροφα, εάν $A = (a_{ij})$ είναι ένας $m \times n$ πίνακας, γνωρίζουμε από την Πρόταση 3.9 ότι υπάρχει μία μοναδική γραμμική απεικόνιση

$$L : V \longrightarrow W$$

τέτοια ώστε

$$L(v_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i \text{ για } j = 1, \ldots, n\,.$$

Θεώρημα 5.2 *X, Y διανυσματικοί χώροι πεπερασμένης διαστάστασης, $\mathcal{B}\{x_1, \ldots, x_n\}$ βάση του X, $\mathcal{C} = \{m\}$ βάση του Y. Η αντιστοιχία $A \mapsto L_A$ ορίζει έναν ισομορφισμό από το χώρο $\mathcal{M}(m, n, \mathbb{K})$ στο χώρο $\mathcal{L}(X, Y)$.*

Απόδειξη. Έχουμε δει ότι η αντιστοιχία είναι αμφιμονοσήμαντη. Αρκεί να ελέγξουμε ότι είναι γραμμική. Εάν A, $B \in \mathcal{M}(m, n, \mathbb{K})$ και $c \in \mathbb{K}$,

$$\begin{aligned} L_{cA+B}(x_j) = \sum_{i=1}^{n}(ca_{ij} + b_{ij})y_i &= c\sum a_{ij}y_i + \sum b_{ij}y_i \\ &= cL_A(x_j) + L_B(x_j)\,. \end{aligned}$$

□

Παράδειγμα 5.1 Θεωρούμε την απεικόνιση $L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $L(u, v, w) = (u + v - w,\ 2u + w)$, και τις κανονικές βάσεις του $\mathbb{R}^3$ και του $\mathbb{R}^2$,

$\mathcal{E} = \{e'_1 = (1, 0, 0),\ e'_2 = (0, 1, 0),\ e'_3 = (0, 0, 1)\}$ και $\mathcal{E} = \{e_1 = (1, 0,),\ e_2 = (0, 1,)\}$

αντίστοιχα.

Ο πίνακας της L ως προς τις βάσεις $\mathcal{E}'$ και $\mathcal{E}$ δίδεται από τις σχέσεις

$$L(e'_j) = \sum a_{ij}e_i \qquad j = 1, 2, 3\,.$$

Για $j = 1$

$$L(1, 0, 0) = (1, 2) = a_{11}(1, 0) + a_{21}(0, 1)$$

άρα $a_{11} = 1$, $a_{21} = 2$.

Για $j = 2$

$$L(0, 1, 0) = (1, 0) = a_{12}(1, 0) + a_{22}(0, 1)$$

άρα $a_{12} = 1$, $a_{22} = 0$.

Για $j = 3$

$$L(0, 0, 1) = (-1, 1) = a_{13}(1, 0) + a_{23}(0, 1)$$

άρα $a_{13} = -1$, $a_{23} = 1$.

Συνεπώς

$$A = (a_{ij}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Παρατηρούμε ότι για το γενικό διάνυσμα $x = (u, v, w) \in \mathbb{R}^3$, ισχύει

$$L(x) = \begin{bmatrix} u + v - w \\ 2u + w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = Ax\,.$$

Δηλαδή ο πίνακας που αντιστοιχεί στην απεικόνιση L ως προς τις ***κανονικές βάσεις***, είναι ακριβώς ο πίνακας που δίδει την απεικόνιση L με πολλαπλασιασμό από τα αριστερά.

Τώρα θέλουμε να υπολογίσουμε τον πίνακα B της L ως προς κάποιες άλλες βάσεις, έστω την

$$\mathcal{B} = \{(1, 0, -1),\ (1, 1, 1),\ (1, 0, 0)\} \text{ και την } \mathcal{E} = \{(1, 0),\ (0, 1)\}\,.$$

$$L(1,\,0,\,-1) = (2,\,1) = 2(1,\,0) + (0,\,1)$$

άρα $b_{11} = 2$, $b_{21} = 1$

$$L(1,\,1,\,1) = (1,\,3) = (1,\,0) + 3(0,\,1)$$

άρα $b_{12} = 1$, $b_{22} = 3$
και

$$L(1,\,0,\,0) = (1,\,2) = (1,\,0) + 2(0,\,1)$$

άρα $b_{13} = 1$, $b_{23} = 2$
συνεπώς ο πίνακας B είναι ο

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Τώρα θα χρησιμοποιήσουμε αυτή την αντιστοιχία μεταξύ γραμμικών απεικονίσεων και πινάκων, για να βρούμε γενικές μεθόδους υπολογισμού μίας βάσης του πυρήνα ή της εικόνας μίας γραμμικής απεικόνισης μεταξύ χώρων πεπερασμένης διάστασης.

Θεωρούμε διανυσματικούς χώρους V, με βάση $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$, W, με βάση $\mathcal{C} = \{w_1, \ldots, w_m\}$ και γραμμική απεικόνιση $L : V \to W$. Έστω $A =_{\mathcal{C}} L_{\mathcal{B}}$ ο πίνακας της L ως προς τις βάσεις $\mathcal{B}$ και $\mathcal{C}$.

Υπενθυμίζουμε ότι για την απεικόνιση $\tilde{A} : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m : x \mapsto Ax$, έχουμε:

- η εικόνα $\operatorname{im} \tilde{A}$ είναι ο χώρος στηλών του A, $\mathcal{R}(A)$, και μία βάση του $\operatorname{im} \tilde{A}$ δίδεται από τις στήλες του A που αντιστοιχούν σε στήλες του κλιμακωτού πίνακα U οι οποίες περιέχουν οδηγούς.

- ο πυρήνας $\ker \tilde{A}$ είναι μηδενοχώρος του A, $\mathcal{N}(A)$, και μία βάση του $\ker \tilde{A}$ δίδεται από ένα πλήρες σύστημα γραμμικά ανεξάρτητων λύσεων της ομογενούς εξίσωσης $Ax = 0$.

Πως σχετίζονται αυτά με την εικόνα και τον πυρήνα της L;

Θεωρούμε τους ισομορφισμούς

$$\iota_{\mathcal{B}} : V \to \mathbb{K}^n : a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n \mapsto (a_1, \ldots, a_n)$$

και

$$\iota_{\mathcal{C}} : W \to \mathbb{K}^m : b_1 w_1 + \ldots + b_m w_n \mapsto (b_1, \ldots, b_m)$$

Λήμμα 5.3

$$L\iota_{\mathcal{C}}^{-1} \circ \tilde{A} \circ \iota_{\mathcal{B}}$$

Απόδειξη. Συμβολίζουμε $e_1, \ldots, e_n$ τα διανύσματα της κανονικής βάσης του $\mathbb{K}^n$, και $e'_1, \ldots, e'_m$ τα διανύσματα της κανονικής βάσης του $\mathbb{K}^m$. Για κάθε $u_j \in \mathcal{B}$, $\iota_{\mathcal{B}}(u_j) = e_j$, και έχουμε

$$\begin{aligned}
\iota_{\mathcal{C}}^{-1} \circ \tilde{A} \circ \iota_{\mathcal{B}}(u_j) &= \iota_{\mathcal{C}}^{-1} \circ \tilde{A}(e_j) \\
&= \iota_{\mathcal{C}}^{-1}(Ae_j) \\
&= \iota_{\mathcal{C}}^{-1} \begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix} \\
&= \iota_{\mathcal{C}}^{-1}(a_{1j} e'_1 + \cdots + a_{mj} e'_m) \\
&= a_{1j} w_1 + \cdots + a_{mj} w_m \\
&= L(v_j)
\end{aligned}$$

□

Πόρισμα 5.4 *1.* $\ker L = \iota_{\mathcal{B}}^{-1}(\ker \tilde{A}) = \iota_{\mathcal{B}}^{-1}(\mathcal{N}(A))$ *δηλαδή* $a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n \in \ker L$ *εάν και μόνον εάν* $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathcal{N}(A)$.

2. $\operatorname{im} L = \iota_{\mathcal{C}}^{-1}(\operatorname{im} \tilde{A}) = \iota_{\mathcal{C}}^{-1}(\mathcal{R}(A))$ *δηλαδή* $b_1 w_1 + \cdots + b_m w_m \in \operatorname{im} L$ *εάν και μόνον εάν* $(b_1, \ldots, b_m) \in \mathcal{R}(A)$.

□

Θεώρημα 5.5 *Θεωρούμε διανυσματικούς χώρους* V, W, Z *πεπερασμένης διάστασης, και βάσεις* $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$, $\mathcal{C} = \{w_1, \ldots, w_m\}$ *και* $\mathcal{D}\{z_1, \ldots, z_\ell\}$ *αντίστοιχα. Εάν* $L : V \to W$ *και* $M : W \to Z$ *είναι γραμμικές απεικονίσεις, και*

$$A = (a_{jk})_{\substack{k=1,\ldots,n \\ j=1,\ldots,m}} = {}_{\mathcal{C}}L_{\mathcal{B}}$$

$$B = (b_{ij})_{\substack{j=1,\ldots,m \\ i=1,\ldots,\ell}} = {}_{\mathcal{D}}M_{\mathcal{C}}$$

και

$$C = (c_{ik})_{\substack{k=1,\ldots,m \\ i=1,\ldots,\ell}} = {}_{\mathcal{D}}(M \circ L)_{\mathcal{B}},$$

τότε

$$C = BA$$

δηλαδή

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{m} b_{ij}\, a_{jk}$$

για κάθε $k = 1, \ldots, n$

$$M \circ L(v_k) = \sum_{i=1}^{\ell} \left(\sum_{j=1}^{m} b_{ij}\, a_{jk} \right) z_i\,.$$

Απόδειξη. Από τον ορισμό των A, B, C έχουμε

$$L(v_k) = \sum_{j=1}^{m} a_{jk} w_j \qquad k = 1, \ldots, n$$

$$M(w_j) = \sum_{i=1}^{\ell} b_{ij} z_i \qquad j = 1, \ldots, m$$

και

$$M \circ L(v_k) = \sum_{i=1}^{\ell} c_{ik}\, z_i \qquad k = 1, \ldots, n$$

Αλλά

$$\begin{aligned} M \circ L(v_k) &= M\left(L(v_k)\right) \\ &= M\left(\sum_{j=1}^{m} a_{jk}\, w_j\right) \\ &= \sum_{j=1}^{m} a_{jk}\, M(w_j) \\ &= \sum_{j=1}^{m} a_{jk}\left(\sum_{i=1}^{\ell} b_{ij}\, z_i\right) \\ &= \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{\ell} a_{jk}\, b_{ij}\, z_i \\ &= \sum_{i=1}^{\ell}\left(\sum_{j=1}^{m} b_{ij}\, a_{jk}\right) z_i\,. \end{aligned}$$

Από τη μοναδικότητα των συντελεστών έχουμε

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{m} b_{ij}\, a_{jk}\,,$$

και συνεπώς $C = BA$.

□

Πόρισμα 5.6 *Εάν $L : V \to W$ είναι ισομορφισμός, και $A = {}_{\mathcal{C}}L_{\mathcal{B}}$, τότε ο πίνακας της L^{-1}, ως προς τις ίδιες βάσεις είναι ο A^{-1},*

$${}_{\mathcal{B}}(L^{-1})_{\mathcal{C}} = ({}_{\mathcal{C}}L_{\mathcal{B}})^{-1}\,.$$

Απόδειξη. Εάν $B = {}_{\mathcal{B}}(L^{-1})_{\mathcal{C}}$, τότε BA είναι ο πίνακας της απεικόνισης $L^{-1} \circ L = \mathbf{I}_V$, άρα $BA = \mathbf{I}$, και $B = A^{-1}$.

□

Αλλαγή βάσης

Θεωρούμε τον διανυσματικό χώρο πεπερασμένης διάστασης V, και δύο διαφορετικές βάσεις του V,

$$\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$$

και

$$\mathcal{B}' = \{x_1, \ldots, x_n\}\,.$$

Θέλουμε να προσδιορίσουμε τη σχέση ανάμεσα στις συντεταγμένες ενός διανύσματος $v \in V$ ως προς τη βάση $\mathcal{B}$ και τις συντεταγμένες του v ως προς τη βάση $\mathcal{B}'$. Υποθέτουμε ότι

$$\begin{aligned} v &= a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n \\ &= c_1 x_1 + \cdots + c_n x_n\,, \end{aligned}$$

δηλαδή
$$v_{\mathcal{B}} = (a_1, \ldots, a_n)$$
και
$$v_{\mathcal{B}'} = (c_1, \ldots, c_n) \, .$$
Επίσης θεωρούμε τον πίνακα B που παριστάνει την ταυτοτική απεικόνιση $\mathbf{I}_V$ ως προς τις βάσεις $\mathcal{B}'$ και $\mathcal{B}$:
$$B = (b_{ij})_{\substack{i=1,\ldots,n \\ j=1,\ldots,n}} = {}_{\mathcal{B}}(\mathbf{I}_V)_{\mathcal{B}'} \, .$$
Οι όροι b_{ij} προσδιορίζονται από τις σχέσεις, για κάθε $j = 1, \ldots, n$
$$x_j = \mathbf{I}_V(x_j) = b_{1j}\, v_1 + \cdots + b_{nj}\, v_n \, . \tag{5.1}$$
Ο πίνακας B έχει στη j στήλη το διάνυσμα συντεταγμένων του $x_j \in \mathcal{B}'$ ως προς τη βάση $\mathcal{B}$.

Θέλουμε να υπολογίσουμε τα c_j συναρτήσει των a_i και των b_{ij}. Έχουμε
$$\begin{aligned} v &= \sum_{j=1}^{n} c_j\, x_j \\ &= \sum_{j=1}^{n} c_j \left(\sum_{i=1}^{n} b_{ij}\, v_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} b_{ij}\, c_j \right) v_i \, . \end{aligned}$$
Αλλά από τη μοναδικότητα των συντεταγμένων έχουμε
$$a_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ij}\, c_j \, , \tag{5.2}$$
δηλαδή
$$\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} .$$
Καταλήγουμε ότι το διάνυσμα συντεταγμένων c του v ως προς τη βάση $\mathcal{B}' = \{x_1, \ldots, x_n\}$ είναι λύση της εξίσωσης
$$Bc = a \tag{5.3}$$
όπου a είναι το διάνυσμα συντεταγμένων του v ως προς τη βάση $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$. Χρησιμοποιώντας το συμβολισμό της προηγούμενης παραγράφου η 5.3 γίνεται
$${}_{\mathcal{B}}(\mathbf{I}_V)_{\mathcal{B}'}\, v_{\mathcal{B}'} = v_{\mathcal{B}}$$
Θα ονομάσουμε τον πίνακα $B = {}_{\mathcal{B}}(\mathbf{I}_V)_{\mathcal{B}'}$, οι όροι του οποίου δίδονται από την 5.1, ***πίνακα μετάβασης από τη βάση $\mathcal{B}'$ στη βάση $\mathcal{B}$***, ορολογία που συμφωνεί με αυτήν που χρησιμοποιήσαμε στην Αναλυτική Γεωμετρία.

Ο πίνακας B είναι αντιστρέψιμος, και ο αντίστροφος

$$B^{-1} = {}_{\mathcal{B}'}(\mathbf{I}_V)_{\mathcal{B}}$$

είναι ο πίνακας μετάβασης από τη βάση $\mathcal{B}$ στη βάση $\mathcal{B}'$.

Από την 5.3 βλέπουμε ότι

$$c = B^{-1}a\,.$$

Συνήθως είναι υπολογιστικά προτιμότερο να βρούμε το c λύνοντας την εξίσωση 5.3 χρησιμοποιώντας απαλοιφή Gauss, παρά να υπολογίσουμε τον αντίστροφο πίνακα B^{-1}.

Το επόμενο πρόβλημα που θα εξετάσουμε είναι η επίπτωση αλλαγής βάσεων στον πίνακα που παριστάνει μία γραμμική απεικόνιση μεταξύ διανυσματικών χώρων πεπερασμένης τάξεως.

Θεωρούμε διανυσματικούς χώρους V και W, και βάσεις $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ και $\mathcal{B}' = \{x_1, \ldots, x_n\}$ του V, και $\mathcal{C} = \{w_1, \ldots, w_m\}$ και $\mathcal{C}' = \{y_1, \ldots, y_m\}$ του W. Ο πίνακας μετάβασης από τη βάση $\mathcal{B}'$ στη βάση $\mathcal{B}$ του V είναι

$$B = {}_{\mathcal{B}}(\mathbf{I}_V)_{\mathcal{B}'} = (b_{ij})$$

και ο πίνακας μετάβασης από τη βάση $\mathcal{C}'$ στη βάση $\mathcal{C}$ του W είναι

$$C = {}_{\mathcal{C}}(\mathbf{I}_W)_{\mathcal{C}'} = (c_{k\ell})\,.$$

Για κάθε $j = 1, \ldots, n$ έχουμε

$$x_j = \sum_{i=1}^{n} b_{ij}\, v_i$$

και για κάθε $\ell = 1, \ldots, m$ έχουμε

$$y_\ell = \sum_{k=1}^{m} c_{k\ell}\, w_k\,.$$

Θεωρούμε γραμμική απεικόνιση $L : V \to W$, τον πίνακα A της απεικόνισης L ως προς τις βάσεις $\mathcal{B}$ και $\mathcal{C}$,

$$A = {}_{\mathcal{C}}L_{\mathcal{B}} = (a_{ki})_{\substack{k=1,\ldots,m\\ i=1,\ldots,n}}$$

και τον πίνακα D της απεικόνισης L ως προς τις βάσεις $\mathcal{B}'$ και $\mathcal{C}'$,

$$D = {}_{\mathcal{C}'}L_{\mathcal{B}'} = (d_{\ell j})_{\substack{\ell=1,\ldots,m\\ j=1,\ldots,n}}\,.$$

Θέλουμε να εκφράσουμε τον D συναρτήσει των A, B και C. Έχουμε, για κάθε $i = 1, \ldots, n$

$$L(v_i) = \sum_{k=1}^{m} a_{ki}\, w_k$$

και για κάθε $j = 1, \ldots, n$

$$L(x_j) = \sum_{\ell=1}^{m} d_{\ell j}\, y_\ell\,.$$

Αλλά

$$x_j = \sum_{i=1}^{n} b_{ij}\, v_j\,,$$

και συνεπώς

$$\begin{aligned} L(x_j) &= L\left(\sum_{i=1}^{n} b_{ij}\, v_j\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} b_{ij}\, L(v_j) \\ &= \sum_{i=1}^{n} b_{ij} \left(\sum_{k=1}^{m} a_{ki}\, w_k\right) \\ &= \sum_{k=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ki}\, b_{ij}\right) w_k \end{aligned} \tag{5.4}$$

Εξ άλλου, έχουμε

$$y_\ell = \sum_{k=1}^{m} c_{k\ell}\, w_k\,,$$

και συνεπώς

$$\begin{aligned} \text{Ł}(x_j) &= \sum_{\ell=1}^{m} d_{\ell j}\, y_\ell \\ &= \sum_{\ell=1}^{m} d_{\ell j} \left(\sum_{k=1}^{m} c_{k\ell}\, w_k\right) \\ &= \sum_{k=1}^{m} \left(\sum_{\ell=1}^{m} c_{k\ell}\, d_{\ell j}\right) w_k\,. \end{aligned} \tag{5.5}$$

Συγκρίνοντας τις 5.4 και 5.5 έχουμε, από τη μοναδικότητα των συντεταγμένων, για κάθε $j = 1, \ldots, n$ και $k = 1, \ldots, m$,

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ki}\, b_{ij} = \sum_{\ell=1}^{m} c_{k\ell}\, d_{\ell j}\,,$$

δηλαδή

$$AB = CD\,.$$

Συμπεραίνουμε ότι

$$D = C^{-1} AB\,, \tag{5.6}$$

ή με το συμβολισμό της προηγούμενης παραγράφου,

$${}_{\mathcal{C}'}L_{\mathcal{B}'} = {}_{\mathcal{C}'}(\mathbf{I}_W)_{\mathcal{C}}\, {}_{\mathcal{C}}L_{\mathcal{B}}\, {}_{\mathcal{B}}(\mathbf{I}_V)_{\mathcal{B}'}\,.$$

Κεφάλαιο 6

Αναλλοίωτοι υπόχωροι, ιδιοτιμές, ιδιοδιανύσματα

Αναλλοίωτοι υπόχωροι

Θα μελετήσουμε πιο αναλυτικά την περίπτωση μίας απεικόνισης από ένα διανυσματικό χώρο V στον εαυτό του,

$$L : V \to V$$

Μία τέτοια απεικόνιση την ονομάζουμε ***γραμμικό τελεστή*** στο V. Γνωρίζουμε ήδη ότι τα σύνολα $\ker V$ και $\operatorname{im} V$ είναι υπόχωροι του V, και εύκολα ελέγχουμε ότι

$$\begin{aligned} L(\ker V) &\subseteq \ker V \\ L(\operatorname{im} V) &\subseteq \operatorname{im} V\,. \end{aligned}$$

Για να μελετήσουμε σε βάθος τη δομή του τελεστή $L : V \to V$, θα εξετάσουμε εάν υπάρχουν άλλοι υπόχωροι $X \subseteq V$ τέτοιοι ώστε $L(X) \subseteq X$.

Ορισμός. $L : V \to V$ γραμμικός τελεστής. Ο υπόχωρος $X \subseteq V$ ονομάζεται ***αναλλοίωτος*** υπόχωρος από τον τελεστή L, εάν

$$L(X) \subseteq X\,.$$

Προσέξτε ότι δεν υποθέτουμε ότι $L(X) = X$, ούτε ότι $L^{-1}(X) \subseteq X$.

Παράδειγμα 6.1 Στο χώρο των πολυωνύμων $\mathbb{R}[x]$, θεωρούμε τον υπόχωρο $\mathbf{P}_k$ των πολυωνύμων βαθμού μικρότερου ή ίσου με k, και τον τελεστή παραγώγισης $D : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$. Για κάθε k ο υπόχωρος $\mathbf{P}_k$ είναι αναλλοίωτος από τον D, καθώς η παράγωγος ενός πολυωνύμου βαθμού μικρότερου ή ίσου με k είναι επίσης πολυώνυμο του $\mathbf{P}_k$.

Εάν V είναι χώρος πεπερασμένης διάστασης, και X είναι υπόχωρος, γνωρίζουμε ότι κάθε βάση $\{x_1, \dots, x_k\}$ του X μπορεί να επεκταθεί σε βάση $\{x_1, \dots, x_k, v_{k+1}, \dots, v_n\}$ του V. Εάν X είναι αναλλοίωτος από τον τελεστή $L : V \to V$, και (a_{ij}) είναι ο πίνακας του L ως προς τη βάση $\{x_1, \dots, x_k, v_{k+1}, \dots, v_n\}$ τότε

$$L(x_j) = \sum_{i=1}^{k} a_{ij} x_i + \sum_{i=k+1}^{n} a_{ij} v_i\,.$$

Όμως $L(x_j) \in U$ και συνεπώς $a_{ij} = 0$ για $i = k+1, \ldots, n$.

Άρα ο πίνακας (a_{ij}) είναι της μορφής:

$$\begin{bmatrix} * & \vdots & * \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \vdots & * \end{bmatrix}$$

με ένα $(n-k) \times k$ μηδενικό μπλόκ κάτω αριστερά.

Θα μελετήσουμε αναλλοίωτους υπόχωρους σε χώρους πεπερασμένης διάστασης. Το αντίστοιχο για χώρους άπειρης διάστασης αποτελεί ένα από τα σημαντικά προβλήματα της Συναρτησιακής Ανάλυσης.

Ιδιοδιανύσματα, Ιδιοτιμές

Σε ένα αναλλοίωτο υπόχωρο διάστασης 1, ο τελεστής L έχει πολύ απλή δομή: Εάν X είναι ανλλοίωτους από τον L και $\dim X = 1$, τότε για κάθε $x \in X$, $L(x) \in X$ και συνεπώς $L(x) = \lambda x$ για κάποιο $\lambda \in \mathbb{K}$. Αντίστροφα, εάν υπάρχει $x \in V$, $x \neq 0$, τέτοιο ώστε $L(x) = \lambda x$ για κάποιο $\lambda \in \mathbb{K}$, τότε ο υπόχωρος $X = \langle x \rangle$ είναι αναλλοίωτος υπόχωρος της L, διάστασης 1.

Ορισμός. Θεωρούμε γραμμικό τελεστή $L : V \to V$. Οι αριθμοί λ του $\mathbb{K}$ για τους οποίους υπάρχουν μη μηδενικά διανύσματα $v \in V$ που ικανοποιούν

$$L\,v = \lambda v$$

ονομάζονται ***ιδιοτιμές*** του γραμμικού τελεστή L, ενώ τα *μη μηδενικά* διανύσματα που ικανοποιούν την 6.1 ονομάζονται ***ιδιοδιανύσματα*** του L για την ιδιοτιμή λ. Το σύνολο των ιδιοδιανυσμάτων του L για την ιδιοτιμή λ, μαζί με το διάνυσμα 0, αποτελεί έναν υπόχωρο του V αναλλοίωτο από τον L, που ονομάζεται ***ιδιόχωρος*** του L για την ιδιοτιμή λ.

Άσκηση 6.1 Ελέγξατε ότι πράγματι ο ιδιόχωρος του L για την ιδιοτιμή λ είναι γραμμικός υπόχωρος του V.

Παράδειγμα 6.2 Ο τελεστής $a\mathbf{I}_V : v \mapsto av$ έχει μοναδική ιδιοτιμή a. Κάθε μη μηδενικό διάνυσμα του V είναι ιδιοδιάνυσμα του L για την ιδιοτιμή a. Ο ιδιοχώρος του L για την ιδιοτιμή a είναι όλος ο χώρος V.

Πρόταση 6.1 *Εάν $L : V \to V$ και $M : W \to W$ είναι γραμμικοί τελεστές και υπάρχει ισομορφισμός $T : V \to W$ τέτοιος ώστε*

$$L = T^{-1} \circ M \circ T$$

τότε οι τελεστές L και M έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές.

Απόδειξη. Για κάθε $v \in V$ έχουμε $L(v) = \lambda v$ εάν και μόνον εάν $T^{-1} \circ M \circ T(v) = \lambda v$, δηλαδή $M \circ T(v) = T(\lambda v) = \lambda T(v)$. Συνεπώς λ είναι ιδιοτιμή του L, με ιδιοδιάνυσμα v, εάν και μόνον εάν λ είναι ιδιοτιμή του M, με ιδιοδιάνυσμα $T(v)$.

□

Θεώρημα 6.2 *Θεωρούμε τελεστή $L : V \to V$, και $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ διαφορετικές ιδιοτιμές του L, με αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα $v_1, \ldots, v_m$. Τότε το σύνολο $\{v_1, \ldots, v_m\}$ είναι γραμμικό ανεξάρτητο.*

Απόδειξη. Εάν το $\{v_1, \ldots, v_m\}$ είναι γραμμικά εξαρτημένο, τότε υπάρχει k, με $1 < k \leq m$, τέτοιο ώστε $\{v_1, \ldots, v_{k-1}\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο, αλλά

$$v_k = a_1 v_1 + \cdots + a_{k-1} v_{k-1} \,. \tag{6.1}$$

Εφαρμόζοντας την L στις δύο πλευρές της 6.1 έχουμε

$$L(v_k) = a_1 L(v_1) + \cdots + a_{k-1} L(v_{k-1})$$

και αφού v_i είναι ιδιοδιανύσματα για την ιδιοτιμή λ_i

$$\lambda_k v_k = a_1 \lambda_1 v_1 + \cdots + a_{k-1} \lambda_{k-1} v_{k-1} \tag{6.2}$$

Πολλαπλασιάζουμε την 6.1 με λ_k, και την αφαιρούμε από την 6.2:

$$0 = a_1(\lambda_1 - \lambda_k) v_1 + \cdots + a_{k-1}(\lambda_k - \lambda_{k-1}) v_{k-1} \,.$$

Εφ' όσον τα $v_1, \ldots, v_{k-1}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, $a_i(\lambda_i - \lambda_k) = 0$ για κάθε $i = 1, \ldots, k-1$, αλλά $\lambda_i - \lambda_k \neq 0$, και συνεπώς $a_1 = \cdots = a_{k-1} = 0$. Αλλά τότε, από την 6.1, $v_k = 0$, άτοπο. Συμπεραίνουμε ότι το σύνολο $\{v_1, \ldots, v_m\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο.

□

Πόρισμα 6.3 *Κάθε τελεστής στο V έχει το πολύ $\dim V$ διαφορετικές ιδιοτιμές*

□

Λήμμα 6.4 *Ο αριθμός $\lambda \in \mathbb{K}$ είναι ιδιοτιμή του τελεστή $L : V \to V$ εάν και μόνον εάν $L - \lambda \mathbf{I}$ δεν είναι $1-1$. Σε αυτήν την περίπτωση, ο ιδιοχώρος της ιδιοτιμής λ είναι ο πυρήνας $\ker(L - \lambda \mathbf{I})$, και κάθε διάνυσμα του L για την ιδιοτιμή λ.*

Απόδειξη. Εάν $L - \lambda \mathbf{I}$ δεν είναι $1-1$, τότε υπάρχει μη μηδενικό διάνυσμα $v \in V$ τέτοιο ώστε $(L - \lambda \mathbf{I})(v) = 0$, δηλαδή $L(v) = \lambda v$, και συνεπώς v είναι ιδιοδιάνυσμα του L και λ ιδιοτιμή του L.

Αντίστροφα, εάν $\lambda \in \mathbb{K}$ είναι ιδιοτιμή του L, τότε υπάρχει μη μηδενικό διάνυσμα $v \in V$ τέτοιο ώστε $L(v) = \lambda v$, και συνεπώς $(L - \lambda \mathbf{I})(v) = 0$, άρα $L - \lambda \mathbf{I}$ δεν είναι $1-1$.

□

Πολυώνυμα και τελεστές

Εάν p είναι ένα πολυώνυμο με συντελεστές στο $\mathbb{K}$,

$$p(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_k t^k$$

και Ł : $V \to V$ είναι γραμμική απεικόνιση στο V, μπορούμε να αντικαταστήσουμε τον τελεστή L στη θέση της μεταβλητής του πολυωνύμου, και το αποτέλεσμα είναι πάλι μία γραμμική απεικόνιση στο V,

$$p(L) = a_0 \mathbf{I}_V + a_1 L + \cdots + a_k L^k$$

$$p(L) \,:\, V \to V \,:\, v \mapsto a_0 v + a_1 L(v) + \cdots + a_k L^k(v)\,.$$

Παρατηρούμε ότι εάν $p(x)$, $q(x)$ είναι πολυώνυμα, οι τελεστές $p(L)$ και $q(L)$ μετατίθενται:

$$p(L)q(L) = (pq)(L) = (qp)(L) = q(L)p(L)\,.$$

Θα χρησιμοποιήσουμε το ακόλουθο σημαντικό αποτέλεσμα από τη θεωρία των πολυωνύμων.

Θεώρημα 6.5 *Εάν $\mathbb{K}$ είναι το σώμα των μιγαδικών αριθμών (ή οποιοδήποτε αλγεβρικό κλειστό σώμα) κάθε πολυώνυμο βαθμού n παραγοντοποιείται σε γινόμενο n διωνύμων. Δηλαδή υπάρχουν αριθμοί $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ τέτοιοι ώστε:*

$$a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n = a_n (t - \lambda_1) \cdots (t_n - \lambda_n)\,.$$

□

Ύπαρξη ιδιοτιμών

Θεώρημα 6.6 *Κάθε τελεστής σε ένα μη μηδενικό διανυσματικό χώρο πεπερασμένης διάστασης, πάνω από το $\mathbb{C}$, έχει τουλάχιστον μία ιδιοτιμή.*

Απόδειξη. Θεωρούμε διανυσματικό χώρο V, $\dim V = n$, ένα γραμμικό τελεστή Ł : $V \to V$, και ένα μη μηδενικό διάνυσμα $v \in V$. Τότε η συλλογή $v,\ L(v),\ L^2(v), \ldots, L^n(v)$ έχει $n+1$ στοιχεία, και συνεπώς είναι γραμμικά εξαρτημένη. Δηλαδή υπάρχουν αριθμοί $a_i \in \mathbb{C}$, όχι όλοι μηδέν, τέτοιοι ώστε

$$a_0 v + a_1 L(v) + \cdots + a_n L^n(v) = 0$$

Θεωρούμε το πολυώνυμο $p(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n$. Σύμφωνα με το Θεώρημα 6.5 αυτό παραγοντοποιείται σε γινόμενο n διωνύμων, δηλαδή υπάρχουν μιγαδικοί αριθμοί $c_1, \ldots, c_n$ τέτοιοι ώστε

$$p(x) = a_n (x - c_1) \cdots (x - c_n)\,.$$

Συνεπώς ο τελεστής $p(L)$ είναι ίσος με τον τελεστή $a_n(L - c_1 \mathbf{I}_V) \circ \cdots \circ (L - c_n \mathbf{I}_V)$, και

$$a_n(L - c_1 \mathbf{I}_V) \circ \cdots \circ (L - c_n \mathbf{I}_V)(v) = 0\,.$$

Αφού $v \neq 0$, ο τελεστής $(L - c_1 \mathbf{I}_V) \circ \cdots \circ (L - c_n \mathbf{I}_V)$ δεν είναι 1-1, και συμπεραίνουμε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα i, $i = 1, \ldots, n$, για το οποίο $L - c_i \mathbf{I}_V$ δεν είναι $1-1$. Συνεπώς υπάρχει $w \in V$ τέτοιο ώστε $(L - c_i \mathbf{I}_V)(w) = 0$, δηλαδή $L(w) = c_i(w)$, και $\lambda = c_i$ είναι ιδιοτιμή του L.

□

Ιδιοτιμές και πίνακες

Εάν A είναι $n \times n$ πίνακας στο $M(n, n, \mathbb{K})$, ένα μη μηδενικό διάνυσμα $v \in \mathbb{K}^n$ λέγεται ***ιδιοδιάνυσμα*** του πίνακα A εάν

$$Av = \lambda v$$

για κάποιο $\lambda \in \mathbb{K}$. Ένας αριθμός $\lambda \in \mathbb{K}$ λέγεται ***ιδιοτιμή*** του πίνακα A εάν υπάρχει μη μηδενικό διάνυσμα $v \in \mathbb{K}^n$ τέτοιο ώστε

$$Av = \lambda v\,.$$

Πρόταση 6.7 *Θεωρούμε διανυσματικό χώρο πεπερασμένης διάστασης, βάση mathcalB του V, και γραμμικό τελεστή $L : V \to V$. Τότε $\lambda \in \mathbb{K}$ είναι ιδιοτιμή του τελεστή L εάν και μόνον εάν λ είναι ιδιοτιμή του πίνακα ${}_{\mathcal{B}}L_{\mathcal{B}}$ που παριστάνει τον L ως προς τη βάση $\mathcal{B}$.*

Απόδειξη. Εάν $v_{\mathcal{B}}$ συμβολίζει το διάνυσμα συντεταγμένων του διανύσματος $v \in V$ ως προς τη βάση $\mathcal{B}$, τότε, από τον ορισμό του ${}_{\mathcal{B}}L_{\mathcal{B}}$ έχουμε

$$(L(v))_{\mathcal{B}} = {}_{\mathcal{B}}L_{\mathcal{B}}\, v_{\mathcal{B}}\,.$$

Συνεπώς $L(v) = \lambda v$ εάν και μόνον εάν ${}_{\mathcal{B}}L_{\mathcal{B}}\, v_{\mathcal{B}} = (\lambda v)_{\mathcal{B}} = \lambda v_{\mathcal{B}}$.

□

Δύο πίνακες A και B λέγονται ***όμοιοι*** εάν υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας S τέτοιος ώστε $A = S^{-1}BS$.

Πρόταση 6.8 *Δύο όμοιοι πίνακες έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές.*

□

Υπολογισμός ιδιοτιμών και ιδιοδιανυσμάτων

Οι ιδιοτιμές ενός $n \times n$ πίνακα A είναι οι αριθμοί $\lambda \in \mathbb{K}$ για τους οποίους η εξίσωση

$$Ax = \lambda x$$

έχει μη μηδενικές λύσεις. Δηλαδή οι αριθμοί λ για τους οποίους η ομογενής εξίσωση

$$(A - \lambda \mathbf{I})x = 0$$

έχει μη μηδενικές λύσεις. Από την Εισαγωγή στη Γραμμική Άλγεβρα γνωρίζουμε ότι η εξίσωση

$$Bx = 0$$

έχει μη μηδενικές λύσεις εάν και μόνον εάν ο πίνακας B είναι ιδιόμορφος, και ότι ένας πίνακας είναι ιδιόμορφος εάν και μόνον εάν η ορίζουσα του είναι μηδέν. Συνεπώς οι ιδιοτιμές του πίνακα A είναι ακριβώς οι αριθμοί $\lambda \in \mathbb{K}$ για τους οποίους

$$\det(A - \lambda \mathbf{I}) = 0\,.$$

Η ορίζουσα $\det(A - \lambda \mathbf{I})$ είναι ένα πολυώνυμο βαθμού n ως προς τη μεταβλητή λ, το οποίο ονομάζεται ***χαρακτηριστικό πολυώνυμο*** του πίνακα A.

Πρόταση 6.9 *Οι ιδιοτιμές του πίνακα A είναι οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου του A.*

□

Παράδειγμα 6.3 Θεωρούμε τον πίνακα $A \in \mathcal{M}(2, 2, \mathbb{R})$,

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}.$$

Για να υπολογίσουμε τις ιδιοτιμές, θεωρούμε την ορίζουσα

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda \mathbf{I}) &= \begin{vmatrix} 4-\lambda & -5 \\ 2 & -3-\lambda \end{vmatrix} \\ &= -(4-\lambda)(3+\lambda)+10 \\ &= \lambda^2 - \lambda + 10 \end{aligned}$$

Οι ρίζες του πολυωνύμου $\lambda^2 - \lambda + 10$ είναι -1 και 2.

Άρα οι ιδιοτιμές του πίνακα A είναι

$$\lambda_1 = -1 \quad \text{και} \quad \lambda_2 = 2\,.$$

Τα ιδιοδιανύσματα για την ιδιοτιμή $\lambda_1 = -1$, είναι οι μη μηδενικές λύσεις της ομογενούς εξίσωσης

$$A - \lambda_1 \mathbf{I})x = 0\,,$$

δηλαδή της εξίσωσης

$$\begin{bmatrix} 5 & -5 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0\,.$$

Ένα *ιδιοδιάνυσμα* είναι το $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, ενώ ο *ιδιόχωρος* του A για την ιδιοτομή $\lambda_1 = -1$ είναι ο μηδενοχώρος του πίνακα $A - \lambda_1 \mathbf{I}$, δηλαδή ο υπόχωρος

$$X_{\lambda_1} = \{t(1,\,1) \mid t \in \mathbb{R}\}\,.$$

Για την ιδιοτιμή $\lambda_2 = 2$ έχουμε, ανάλογα,

$$(A - \lambda_2 \mathbf{I})x = 0$$

ή

$$\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 2 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0\,.$$

Ένα ιδιοδιάνυσμα είναι το $x = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$, και ο ιδιόχωρος του A για την ιδιοτιμή $\lambda_2 = 2$ είναι ο υπόχωρος

$$X_2 = \{t(5,\,2) \mid t \in \mathbb{R}\}\,.$$

Παράδειγμα 6.4 Θεωρούμε τον πίνακα

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Οι ιδιοτιμές του A είναι οι ρίζες του πολυωνύμου

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda \mathbf{I}) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 2 \\ -2 & 1-\lambda & 2 \\ -2 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (1-\lambda)^2(3-\lambda) + 8 + 4(1-\lambda) - 4(3-\lambda) \\ &= (1-\lambda)^2(3-\lambda). \end{aligned}$$

Άρα οι ιδιοτιμές είναι $\lambda_1 = 1$ και $\lambda_2 = 3$.

Τα ιδιοδιανύσματα για την ιδιοτιμή $\lambda_1 = 1$ είναι οι μη μηδενικές λύσεις της εξίσωσης

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0.$$

Φέρνουμε τον πίνακα σε κλιμακωτή μορφή, και έχουμε την εξίσωση

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0.$$

Ένα ιδιοδιάνυσμα του A για την ιδιοτιμή $\lambda_1 = 1$ είναι το $x = (1, 1, 1)$. Ο ιδιόχωρος του A για την ιδιοτιμή $\lambda_1 = 1$ είναι ο χώρος λύσεων της εξίσωσης,

$$X_1 = \{t(1, 1, 1) \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

Τα ιδιοδιανύσματα για την ιδιοτιμή $\lambda_2 = 3$ είναι λύσεις της εξίσωσης

$$\begin{bmatrix} -2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0.$$

Ένα ιδιοδιάνυσμα του A για την ιδιοτιμή $\lambda_2 = 3$ είναι το $x = (0, 1, 1)$. Ο ιδιόχωρος του A για την ιδιοτιμή $\lambda_2 = 3$ είναι

$$X_2 = \{t(0, 1, 1) \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

Παράδειγμα 6.5 Θεωρούμε τον πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Οι ιδιοτιμές του A είναι οι ρίζες του

$$\begin{aligned}\det(A-\lambda\mathbf{I}) &= \begin{vmatrix} 4-\lambda & 0 & 3 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ -3 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (\lambda^2-8\lambda+25)(2-\lambda)\,.\end{aligned}$$

Το πολυώνυμο έχει μία πραγματική ρίζα, $\lambda_1 = 2$. Οι άλλες δύο ρίζες είναι μιγαδικές,

$$\lambda_2 = 4+3i \quad \text{και} \quad \lambda_3 = 4-3i\,.$$

Για την ιδιοτιμή $\lambda_1 = 2$ έχουμε την εξίσωση

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

από την οποία βρίσκουμε ότι ένα ιδιοδιάνυσμα του A για την ιδιοτιμή $\lambda_1 = 2$ είναι το $x = (0,\,1,\,0)$.

Για την ιδιοτιμή $\lambda_2 = 4+3i$ έχουμε την εξίσωση

$$\begin{bmatrix} -3i & 0 & 3 \\ 0 & -2-3i & 0 \\ -3 & 0 & -3i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

Φέρνουμε τον πίνακα σε κλιμακωτή μορφή και έχουμε την εξίσωση

$$\begin{bmatrix} -3i & 0 & 3 \\ 0 & -2-3i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

από την οποία βρίσκουμε ότι ένα ιδιοδιάνυσμα του A για την ιδιοτιμή $\lambda_2 = 4+3i$ είναι το $x = (-i,\,0,\,1)$.

Για την ιδιοτιμή $\lambda_3 = 4-3i$ έχουμε την εξίσωση

$$\begin{bmatrix} 3i & 0 & 3 \\ 0 & -2+3i & 0 \\ -3 & 0 & 3i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

από την οποία βρίσκουμε ότι ένα ιδιοδιάνυσμα του A για την ιδιοτιμή $\lambda_3 = 4-3i$ είναι το $x = (i,\,0,\,1)$.

Εάν θεωρήσουμε τον πίνακα A πάνω από τους πραγματικούς αριθμούς, έχει μόνο μία ιδιοτιμή, $\lambda_1 = 2$, και ο αντίστοιχος ιδιόχωρος είναι ο

$$X_1 = \{t(0,\,1,\,0) \mid t \in \mathbb{R}\}\,.$$

Εάν θεωρήσουμε τον πίνακα A πάνω από τους μιγαδικούς αριθμούς τότε ο ιδιόχωρος για την ιδιοτιμή $\lambda_1 = 2$ είναι ο

$$X_1 = \{t(0,\,1,\,0) \mid t \in \mathbb{C}\}\,.$$

ο ιδιόχωρος για την ιδιοτιμή $\lambda_2 = 4+3i$ είναι ο

$$X_2 = \{t(-i,\,0,\,1) \mid t \in \mathbb{C}\}$$

και ο ιδιόχωρος για την ιδιοτιμή $\lambda_3 = 4 - 3i$ είναι ο

$$X_3 = \{t(i,\, 0,\, 1) \mid t \in \mathbb{C}\}\,.$$

Ανακεφαλαιώνουμε τη διαδικασία για τον υπολογισμό των ιδιοτιμών και των ιδιδοδιανυσμάτων ενός $n \times n$ πίνακα

1. Υπολογίζουμε την ορίζουσα του πίνακα $A - \lambda\mathbf{I}$. Αυτή είναι ένα πολυώνυμο βαθμού n ως προς τη μεταβλητή λ, το *χαρακτηριστικό πολυώνυμο* του Α.

2. Βρίσκουμε τις ρίζες του χαρακτηριστικού πολυώνυμου. Αυτές είναι οι *ιδιοτιμές* του A.

3. Για κάθε ιδιοτιμή λ_i, βρίσκουμε τις λύσεις της ομογενούς εξίσωσης

$$(A_\lambda \mathbf{I})x = 0\,.$$

   Κάθε μη μηδενική λύση είναι ένα *ιδιοδιάνυσμα* του πίνακα A για την ιδιοτιμή λ_i, ενώ το σύνολο όλων των λύσεων είναι ο *ιδιόχωρος* του A για την ιδιοτιμή λ_i.

Εν αντιθέσει με την περίπτωση της λύσης του συστήματος $Ax = b$ με απαλοιφή Gauss, η διαδικασία που περιγράφουμε εδώ δεν δίδει έναν αλγόριθμο για τον αναλυτικό υπολογισμό των ιδιοτιμών και των ιδιοδιανυσμάτων. Το πρόβλημα βρίσκεται στο βήμα 2. Ενώ γνωρίζουμε ότι κάθε πολυώνυμο βαθμού n έχει n ρίζες (πάνω από ένα αλγεβρικά κλειστό σώμα, όπως το σώμα $\mathbb{C}$ των μιγαδικών αριθμών), για πολυώνυμα βαθμού $n \geq 5$ δεν είναι δυνατόν να βρεθεί αναλυτικός τύπος για τον υπολογισμό τους (όπως ο τύπος των ριζών της δευτεροβάθμιας εξίσωσης)[1].

Παρ' όλο που δεν υπάρχει αναλυτικός τύπος που να δίδει τις ρίζες στη γενική περίπτωση, σε πολλές ειδικές περιπτώσεις μπορούμε να τις προσδιορίσουμε αναλυτικά, ή μπορούμε να τις προσεγγίσουμε αριθμητικά. Μπορούμε όμως να έχουμε κάποια πληροφορία για τις ιδιοτιμές ακόμα και χωρίς να τις βρούμε.

Το άθροισμα των διαγώνιων στοιχείων ενός πίνακα ονομάζεται ***ίχνος*** του πίνακα (trace) και συμβολίζεται $\operatorname{tr} A$.

Πρόταση 6.10 *Θεωρούμε έναν πίνακα A πάνω από τους μιγαδικούς αριθμούς*

1. *Το άθροισμα των ιδιοτιμών του A είναι ίσο με το ίχνος του πίνακα,*

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = \operatorname{tr} A$$

2. *Το γινόμενο των ιδιοτιμών του A είναι ίσο με την ορίζουσα του πίνακα,*

$$\lambda_1\, \lambda_2 \cdots \lambda_n = \det A\,.$$

Απόδειξη.

[1]Αυτό είναι το περιεχόμενο της θεωρίας Galois (την οποία μπορείτε να μελετήσετε στο μάθημα Θεωρία Σωμάτων), μίας πολύ ενδιαφέρουσας θεωρίας που δημιούργησε ένας ακόμη πιο ενδιαφέρων άνθρωπος.

1. Εάν $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ είναι οι ιδιοτιμές του πίνακα A, έχουμε

$$\det(A - \lambda \mathbf{I}) = (\lambda_1 - \lambda) \cdots (\lambda_n - \lambda) .$$

Συγκρίνουμε τους όρους τάξεως $n-1$ στα δύο πολυώνυμα. Οι όροι στους οποίους το λ εμφανίζεται στη δύναμη $n-1$ στην ορίζουσα

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix}$$

πρέπει να προέρχονται από όρους της ορίζουσας που είναι γινόμενο τουλάχιστον $n-1$ στοιχείων στη διαγώνιο του πίνακα. Αλλά ένας όρος της ορίζουσας δεν μπορεί να περιέχει περισσότερα από ένα στοιχείο από κάθε στήλη και από κάθε γραμμή του πίνακα. Συνεπώς, ο μοναδικός όρος που περιέχει το γινόμενο $n-1$ διαγώνιων στοιχείων, είναι το γινόμενο όλων των διαγώνιων στοιχείων,

$$(a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) \cdots (a_{nn} - \lambda) .$$

Ο όρος τάξεως $n-1$ αυτού του πολυωνύμου είναι

$$a_{11}\lambda^{n-1} + a_{22}\lambda^{n-1} + \cdots + a_{nn}\lambda^{n-1} = (a_{11} + \cdots + a_{nn})\lambda^{n-1} .$$

Από την άλλη πλευρά ο όρος τάξεως $n-1$ του πολυωνύμου $(\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda) \cdots (\lambda_n - \lambda)$ είναι

$$(\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n)\lambda^{n-1} .$$

Συμπεραίνουμε ότι

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} = \operatorname{tr} A .$$

2. Εξετάζουμε του σταθερούς όρους των πουωνύμων

$$\det(A - \lambda \mathbf{I}) = (\lambda_1 - \lambda) \cdots (\lambda_n - \lambda) .$$

Στη δεξιά πλευρά, ο σταθερός όρος είναι $\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$. Στην αριστερή πλευρά ο σταθερός όρος είναι η τιμή του πολυωνύμου για $\lambda = 0$, δηλαδή $\det A$. Άρα

$$\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n = \det A .$$

□

Διαγώνιοι και τριγωνικοί πίνακες

Πρόταση 6.11 *Εάν $L : V \to V$ είναι γραμμικός τελεστής, και ο διανυσματικός χώρος V έχει μία πεπερασμένη βάση από ιδιοδιανύσματα του L, τότε ο πίνακας του L ως προς αυτήν τη βάση είναι διαγώνιος.*

Απόδειξη. Έστω $\{v_1, \ldots, v_n\}$ μία βάση από ιδιοδιανύσματα, και $\lambda_1, \ldots \lambda_n$ οι αντίστοιχες ιδιοτιμές. Τότε

$$L(v_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} v_i = \lambda_j v_j \, .$$

Αφού τα $v_1, \ldots, v_n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, οι συντελεστές είναι μοναδικοί, και

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{εάν} \quad i \neq j \\ \lambda_j & \text{εάν} \quad i = j \, . \end{cases}$$

Συνεπώς ο πίνακας (a_{ij}) είναι διαγώνιος.

□

Πρόταση 6.12 *Θεωρούμε γραμμικό τελεστή $L : V \to V$, και βάση $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ του V. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

1. *Ο πίνακας A της L ως προς τη βάση V είναι άνω τριγωνικός*
2. *$L(v_j) \in \langle v_1, \ldots, v_j \rangle$ για $j = 1, \ldots, n$.*
3. *Για κάθε $j = 1, \ldots, n$ ο υπόχωρος $\langle v_1, \ldots, v_j \rangle$ είναι αναλλοίωτος από την L.*

Απόδειξη. Το 2 σημαίνει ότι το διάνυσμα συντεταγμένων του $L(v_j)$ ως προς τη βάση $\mathcal{B}$ έχει μηδενικά στις τελευταίες $n - j$ θέσεις, που είναι ακριβώς το ίδιο με το 1. Είναι προφανές ότι το 3 συνεπάγεται το 2. Θα δείξουμε ότι το 2 συνεπάγεται το 3. Εάν $v \in \langle v_1, \ldots, v_j \rangle$, τότε $v = a_1 v_1 + \cdots + a_j v_j$. Εάν ισχύει το 2, για κάθε $i = 1, \ldots, j$

$$L(v_i) \in \langle v_1, \ldots, v_i \rangle \subseteq \langle v_1, \ldots, v_j \rangle \, .$$

Συνεπώς

$$L(v) = a_1 L(v_1) + \cdots + a_j L(v_j) \in \langle v_1, \ldots, v_j \rangle \, .$$

□

Πρόταση 6.13 *Υποθέτουμε ότι ο τελεστής $L : V \to V$ έχει άνω τριγωνικό πίνακα ως προς κάποια πεπερασμένη βάση του διανυσματικού χώρου V. Τότε οι ιδιοτιμές του V είναι ακριβώς τα στοιχεία της διαγωνίου αυτού του πίνακα.*

Απόδειξη. Θεωρούμε τον άνω τριγωνικό πίνακα A της L, ως προς τη βάση $\mathcal{B}$:

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Τότε η απεικόνιση $L - \lambda \mathbf{I}$, για $\lambda \in \mathbb{K}$, έχει πίνακα ως προς τη βάση $\mathcal{B}$:

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 - \lambda & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n - \lambda \end{bmatrix}$$

ο οποίος είναι ιδιόμορφος εάν και μόνον εάν λ είναι ίσο με κάποιο από τα στοιχεία του διαγωνίου $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

Άρα οι ιδιοτιμές του L είναι ακριβώς $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

□

Θεώρημα 6.14 *Θεωρούμε διανυσματικό χώρο V πεπερασμένης διάστασης πάνω από το $\mathbb{C}$, και γραμμικό τελεστή $L : V \to V$. Τότε υπάρχει βάση του V ως προς την οποία ο L έχει άνω τριγωνικό πίνακα.*

□

Κεφάλαιο 7

Νόρμα και εσωτερικό γινόμενο

Μέχρι τώρα, οι ιδιότητες των διανυσμάτων των $\mathbb{R}^n$ τις οποίες γενικεύσαμε σε διανυσματικούς χώρους, βασίζονται στις πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού με αριθμό. Δεν έχουμε αναφερθεί σε εσωτερικό γινόμενο.

Στη συνέχεια θα ορίσουμε εσωτερικό γινόμενο σε γενικούς διανυσματικούς χώρους, και θα μελετήσουμε κάποιες ιδιότητες του. Γι' αυτό πρέπει να περιορίσουμε το σώμα $\mathbb{K}$ να είναι οι πραγματικοί ή οι μιγαδικοί αριθμοί:

$$\mathbb{K} = \mathbb{R} \text{ ή } \mathbb{C}\,.$$

Νόρμα

Για το $\mathbb{R}^n$, έχουμε δει το εσωτερικό γινόμενο

$$\langle x,\, y\rangle = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n$$

και τη νόρμα

$$||x|| = \sqrt{\langle x,\, y\rangle}\,.$$

Στο $\mathbb{C}$, θα θέλαμε η νόρμα να συμπίπτει με το μέτρο $|z|$ και, εάν $z = x + iy$ με τη νόρμα του $(x,\, y)$:

$$||z|| = |z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2} = ||(x,\, y)||\,.$$

Ανάλογα, στο $\mathbb{C}^n$, εάν θέλουμε $||(z_1, \ldots, z_n)||$ να συμπίπτει με το $||(x_1,\, y_1,\, x_2,\, y_2, \ldots, x_n,\, y_n)||$ στο $\mathbb{R}^{2n}$ όπου $z_j = x_j + iy_j$, πρέπει να ορίσουμε τη νόρμα

$$||z|| = \sqrt{z_1\bar{z}_1 + \cdots + z_n\bar{z}_n}$$

και το εσωτερικό γινόμενο

$$\langle z,\, w\rangle = z_1\bar{w}_1 + \cdots + z_n\bar{w}_n\,.$$

Με αυτές τις παρατηρήσεις, δίδουμε τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός. V διανυσματικός χώρος πάνω από το σώμα $\mathbb{K}(= \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C})$. Μια απεικόνιση $V \to \mathbb{K} : v \mapsto ||v||$ ονομάζεται ***νόρμα*** (ή ***στάθμη***) εάν

N 1. $||v|| = 0$ εάν και μόνον εάν $v = 0$

Ν 2. Για κάθε $v \in V$ και $a \in \mathbb{K}$, $||av|| = |a|\,||v||$

Ν 3. Για κάθε $v,\, w \in V$, $||v + w|| \leq ||v|| + ||w||$ (τριγωνική ανισότητα)

Λήμμα 7.1 *Σε ένα διανυσματικό χώρο V με νόρμα,*

1. *Για κάθε $v \in V$, $||v|| \geq 0$.*
2. *Για κάθε $v,\, w \in V$, $||v - w|| \geq |\ ||v|| - ||w||\ |$*

Απόδειξη.

1. Για κάθε $v \in V$,

$$\begin{aligned} ||v|| &= \frac{1}{2}\left(||v|| + ||v||\right) = \frac{1}{2}\left(||v|| + ||-v||\right) \\ &\geq \frac{1}{2}||v + (-v)|| = \frac{1}{2}||0|| = 0\,. \end{aligned}$$

2. Για κάθε $v,\, w \in V$,

$$||v|| = ||(v - w) + w|| \leq ||v - w|| + ||w||\,,$$

και συνεπώς

$$||v - w|| \geq ||v|| - ||w||\,.$$

Ανάλογα

$$||v - w|| = ||w - v|| \geq ||w|| - ||v||\,.$$

□

Παράδειγμα 7.1 Στο $\mathbb{R}^n$ και στο $\mathbb{C}^n$ η ευκλείδεια νόρμα (ή ℓ_2- νόρμα) είναι η συνήθης νόρμα

$$||x|| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$$

και

$$||z|| = \sqrt{z_1\bar{z}_1 + \cdots + z_n\bar{z}_n}\,.$$

Παράδειγμα 7.2 Η ℓ_1-νόρμα στο $\mathbb{R}^n$ ορίζεται ως

$$||x||_1 = |x_1| + \cdots + |x_n|\,.$$

Ελέγχουμε τα αξιώματα:

Ν 1.

$$\begin{aligned} ||x||_1 = 0 &\Leftrightarrow |x_1| = \cdots = |x_n| = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0\,. \end{aligned}$$

Ν 2.

$$||ax||_1 = \sum_{i=1}^{n} |ax_i| = |a| \sum_{i=1}^{n} |x_i| = |a|\,||x||_1\,.$$

N 3.

$$||x+y||_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i| + |y_i| = ||x||_1 + ||y||_1 \,.$$

Παράδειγμα 7.3 Η ℓ_∞-νόρμα στο $\mathbb{R}^n$ ορίζεται ώς

$$||x||_\infty = max\{|x_i| \mid i = 1, \ldots, n\} \,.$$

Άσκηση 7.1 Δείξτε ότι $||x||_\infty$ ικανοποιεί τα αξιώματα της νόρμας.

Παράδειγμα 7.4 Στο χώρο των πολυωνύμων $\mathbb{K}[x]$, με $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$, ορίζουμε, τη νόρμα

$$||p(x)|| = \left(\int_0^1 |p(t)|^2 dt \right)^{1/2} \,.$$

Ο έλεγχος των αξιωμάτων N 1 και N 2 είναι εύκολος. Για το N 3 παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} ||p(x)+q(x)||^2 &= \int_0^1 |p(t)+q(t)|^2 dt \\ &= \int_0^1 |p(t)|^2 dt + \int_0^1 |q(t)|^2 dt + 2\Re \int_0^1 p(t)\bar{q(t)} dt \end{aligned}$$

ενώ

$$(||p(x)|| + ||q(x)||)^2 = ||p(x)||^2 + ||q(x)||^2 + 2||p(x)||\,||q(x)|| \,.$$

Άρα για να ισχύει η τριγωνική ανισότητα, αρκεί να ισχύει η

$$\Re \int_0^1 p(t)\bar{q(t)} dt \leq ||p(x)||\ ||q(x)|| \,,$$

την οποία θα αποδείξουμε στην Πρόταση 7.3.

Παράδειγμα 7.5 Στο χώρο $C[a,\, b]$ των συνεχών συναρτήσεων στο διάστημα $[a,\, b]$ (με πραγματικές ή μιγαδικές τιμές) ορίζουμε την ℓ_2-νόρμα

$$||f|| = \left(\int_a^b |f(t)|^2 dt \right)^{1/2}$$

και την ℓ_∞-νόρμα

$$||f||_\infty = max\{|f(x)| \mid x \in [a,\, b]\} \,.$$

Άσκηση 7.2 Δείξτε ότι $||f||_\infty$ ικανοποιεί τα αξιώματα της νόρμας.

Εσωτερικό γινόμενο

Στη συνέχεια θα χρησιμοποιούμε το συμβολισμό του συζυγούς, $\bar{a}$, κατανοώντας ότι εάν το σώμα $\mathbb{K}$ είναι οι πραγματικοί αριθμοί, τότε $\bar{a} = a$.

Ορισμός. Θεωρούμε διανυσματικό χώρο V πάνω από το σώμα $\mathbb{K}$ $(= \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C})$. Μια απεικόνιση

$$V \times V \to \mathbb{K} \,:\, (v,\, w) \mapsto \langle v,\, w\rangle$$

ονομάζεται ***εσωτερικό γινόμενο*** εάν

ΕΓ 1. Είναι γραμμική στην πρώτη μεταβλητή, δηλαδή εάν για κάθε $u,\, v,\, w \in V$ και $a \in \mathbb{K}$,

$$\langle u + v,\, w\rangle = \langle u,\, w\rangle + \langle v,\, w\rangle$$

και

$$\langle av,\, w\rangle = a\langle v,\, w\rangle\,.$$

ΕΓ 2. Για κάθε $v,\, w \in V$,

$$\langle v,\, w\rangle = \overline{\langle w,\, v\rangle}$$

ΕΓ 3. Για κάθε $v \in V\ \{0\}$, $\langle v,\, v\rangle > 0$.

Εάν $\langle v,\, w\rangle = 0$, λέμε ότι τα διανύσματα v και w είναι ***ορθογώνια***.

Παρατηρούμε ότι εάν το σώμα $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, τότε η ιδιότητα ΕΓ 2 σημαίνει ότι το εσωτερικό γινόμενο είναι συμμετρικό, και μαζί με την ΕΓ 1, οτι είναι γραμμικό και στη δεύτερη μεταβλητή. Αντιθέτως, εάν $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, για τη δεύτερη μεταβλητή έχουμε

$$\begin{aligned}
\langle u,\, av + w\rangle &= \overline{\langle av + w,\, u\rangle} \\
&= \overline{a\langle v,\, u\rangle} + \overline{\langle w,\, u\rangle} \\
&= \bar{a}\langle u,\, v\rangle + \langle u,\, w\rangle\,.
\end{aligned}$$

Παράδειγμα 7.6 Στο $\mathbb{R}^n$ ορίζεται το ευκλείδειο εσωτερικό γινόμενο: εάν $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$,

$$\langle x,\, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i\,.$$

Τα διανύσματα $(x_1,\, x_2)$ και $(-x_2,\, x_1)$ είναι ορθογώνια διανύσματα στο $\mathbb{R}^2$ με το ευκλείδειο εσωτερικό γινόμενο.

Παράδειγμα 7.7 Στο $\mathbb{C}^n$ ορίζεται εσωτερικό γινόμενο για $z = (z_1, \dots, z_n)$, $w = (w_1, \dots, w_n)$,

$$\langle z,\, w\rangle = \sum_{i=1}^{n} z_i \bar{w}_i\,.$$

Άσκηση 7.3 Τα διανύσματα $(z_1,\, z_2)$ και $(-z_2,\, z_1)$ *δεν* είναι ορθογώνια στο $\mathbb{C}^2$ με αυτό το εσωτερικό γινόμενο. Βρείτε ένα μη μηδενικό διάνυσμα ορθογώνιο στο $(z_1,\, z_2)$

Παράδειγμα 7.8 Στο χώρο των πολυωνύμων $\mathbb{K}[x]$ ορίζουμε το εσωτερικό γινόμενο

$$\langle p(x),\, q(x)\rangle = \int_0^1 p(t)\,\overline{q(t)}\,dt \tag{7.1}$$

Άσκηση 7.4 Ελέγξτε ότι η 7.1 πράγματι ορίζει ένα εσωτερικό γινόμενο.

Τα πολυώνυμα $p(x) = (x - \frac{1}{2})^2$ και $q(x) = (x - \frac{1}{2})^3$ είναι ορθογώνια:

$$\begin{aligned} \langle p(x),\, q(x)\rangle &= \int_0^1 (t - \frac{1}{2})^2 (t - \frac{1}{2})^3 dt \\ &= \int_0^1 (t - \frac{1}{2})^5 dt \\ &= 0\,. \end{aligned}$$

Παράδειγμα 7.9 Στο χώρο των συνεχών συναρτήσεων στο διάστημα $[a,\, b]$, με πραγματικές τιμές, $C[a,\, b]$, ή με μιγαδικές τιμές , $C_{\mathbb{C}}[a,\, b]$, ορίζουμε το εσωτερικό γινόμενο

$$\langle f,\, g\rangle \int_a^b f(s)\,\overline{g(s)}\,ds \tag{7.2}$$

Άσκηση 7.5 Ελέγξτε ότι η 7.3 πράγματι ορίζει ένα εσωτερικό γινόμενο.

Άσκηση 7.6 Δείξτε ότι οι συναρτήσεις sin και cos είναι ορθογώνιες στο $C[0,\, \pi]$.

Θεώρημα 7.2 *Σε ένα χώρο με εσωτερικό γινόμενο ισχύει, για κάθε v, w:*

$$|\langle v,\, w\rangle| \le \sqrt{\langle v,\, v\rangle}\sqrt{\langle w,\, w\rangle}\,.$$

Απόδειξη. Εάν $w = 0$, τότε και οι δύο πλευρές μηδενίζονται και η σχέση επαληθεύεται.

Υποθέτουμε ότι $w \neq 0$ και θεωρούμε, για $a \in \mathbb{K}$, το διάνυσμα $v - aw$:

$$\begin{aligned} 0 &\le \langle v - aw,\, v - aw\rangle \\ &= \langle v,\, v\rangle - \langle v,\, aw\rangle - \langle aw,\, v\rangle + \langle aw,\, aw\rangle \\ &= \langle v,\, v\rangle - \bar{a}\langle v,\, w\rangle - a\overline{\langle v,\, w\rangle} + a\bar{a}\langle w,\, w\rangle\,. \end{aligned}$$

Ειδικότερα, για $a = \frac{\langle v,\, w\rangle}{\langle w,\, w\rangle}$ έχουμε

$$\langle v,\, v\rangle \ge \frac{\langle v,\, w\rangle\overline{\langle v,\, w\rangle}}{\langle w,\, w\rangle}$$

ή

$$|\langle v,\, w\rangle|^2 \le \langle v,\, v\rangle\langle w,\, w\rangle\,,$$

και αφού οι πραγματικοί αριθμοί $\langle v, v\rangle$, $\langle w, w\rangle$ και $|\langle v, w\rangle|$ είναι θετικοί ή μηδέν, έχουμε

$$|\langle v, w\rangle| \leq \sqrt{\langle v, v\rangle}\sqrt{\langle w, w\rangle}\,.$$

□

Ειδικές περιπτώσεις της ανισότητας Cauchy-Schwarz είναι οι ακόλουθες ανισότητες.

Στο χώρο $\mathbb{R}^n$ ή $\mathbb{C}^n$, με το συνήθες εσωτερικό γινόμενο $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^n x_i\bar{y}_i$,

$$\left|\sum_{i=1}^n x_1\bar{y}_i\right| \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{i=1}^n |y_1|^2\right)^{1/2}.$$

Στο χώρο $C[a, b]$, με εσωτερικό γινόμενο $\langle f, g\rangle = \int_a^b f(s)g(s)ds$,

$$\left|\int_a^b f(s)g(s)ds\right| \leq \left(\int_a^b (f(s))^2\,ds\right)^{1/2}\left(\int_a^b (g(s))^2\,ds\right)^{1/2}.$$

Πρόταση 7.3 *Εάν V είναι χώρος με εσωτερικό γινόμενο, τότε ορίζεται μία νόρμα στο V:*

$$||v|| = \sqrt{\langle v, v\rangle}\,.$$

Απόδειξη. Η απόδειξη των Ν 1 και Ν 2 είναι απλή. Για να αποδείξουμε την τριγωνική ανισότητα Ν 3, παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} ||v+w||^2 &= \langle v+w, v+w\rangle \\ &= ||v||^2 + ||w||^2 + 2\Re\langle v, w\rangle\,, \end{aligned}$$

και ότι

$$(||v|| + ||w||)^2 = ||v||^2 + ||w||^2 + 2||v||\,||w||\,.$$

Αλλά από την ανισότητα Cauchy-Schwarz, $\langle v, w\rangle \leq ||v||\,||w||$ και συνεπώς

$$||v+w||^2 \leq (||v|| + ||w||)^2\,.$$

Αφού οι πραγματικοί αριθμοί $||v+w||$, $||v||$ και $||w||$ είναι θετικοί ή μηδέν, έχουμε

$$||v+w|| \leq ||v|| + ||w||\,.$$

□

Με τον συμβολισμό της νόρμας, η ανισότητα Cauchy-Scwarz γράφεται στη μορφή

$$|\langle v, w\rangle| \leq ||v||\,||w||\,.$$

Ορθοκανονικά σύνολα διανυσμάτων

Ένα σύνολο διανυσμάτων $S = \{v_1, \ldots, v_n\}$ ονομάζεται ***ορθογώνιο*** εάν τα στοιχεία του είναι ορθογώνια ανά δύο, δηλαδή εάν για κάθε $i,\, j = 1, \ldots, n, i \neq j$,

$$\langle v_i,\, v_j\rangle = 0\,.$$

Εάν επί πλέον, για κάθε $i = 1, \ldots, n$, $||v_i|| = 1$, το σύνολο ονομάζεται ***ορθοκανονικό***. Χρησιμοποιώντας το συμβολισμό του δ του Kronecker, βλέπουμε ότι το σύνολο S είναι ορθοκανονικό εάν και μόνον εάν, για κάθε $i,\, j = 1, \ldots, n$,

$$\langle v_i,\, v_j\rangle = \delta_{ij}\,.$$

Λήμμα 7.4 *Ένα ορθοκανονικό σύνολο είναι γραμμικά ανεξάρτητο.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι $\{v_1, \ldots, v_n\}$ είναι ένα ορθοκανονικό σύνολο, και $a_1, \ldots, a_n$ είναι αριθμοί τέτοιοι ώστε

$$a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n = 0\,.$$

Για κάθε $j = 1, \ldots, n$, έχουμε

$$\begin{aligned} 0 &= \langle 0,\, v_j\rangle \\ &= \langle \sum_{i=1}^{n} a_i v_i,\, v_j\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_i \langle v_i,\, v_j\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_i \delta_{ij} \\ &= a_j\,. \end{aligned}$$

Συνεπώς $a_j = 0$ για κάθε $j = 1, \ldots, n$, και το σύνολο $\{v_1, \ldots, v_n\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο.

□

Ένα ορθοκανονικό σύνολο αποτελεί μία ιδιαίτερα χρήσιμη βάση για το χώρο τον οποίο παράγει. Οι συντεταγμένες ενός διανύσματος ως προς μία ορθοκανονική βάση δίδονται απλώς από τα εσωτερικά γινόμενα του διανύσματος με τα διανύσματα της βάσης.

Εάν $\{v_1, \ldots, v_n\}$ είναι ορθοκανονική βάση, και

$$v = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n$$

τότε

$$\begin{aligned} \langle v,\, v_j\rangle &= \langle \sum_{i=1}^{n} a_i v_i\,,\, v_j\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_i \langle v_i,\, v_j\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_i \delta_{ij} \\ &= a_j\,. \end{aligned}$$

Σε ένα χώρο πεπερασμένης διάστασης με εσωτερικό γινόμενο, μπορούμε πάντα να κατασκευάσουμε μια ορθοκανονική βάση, εφαρμόζοντας τη διαδικασία ***ορθοκανονικοποίησης Gram-Schmidt***.

Θεώρημα 7.5 *(Gram-Schmidt) Θεωρούμε χώρο V με εσωτερικό γινόμενο, και ένα γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο $\{v_1, \ldots, v_n\}$. Τότε υπάρχει ορθοκανονικό σύνολο $e_1, \ldots, e_n\}$ τέτοιο ώστε για κάθε $i = 1, \ldots, n$*

$$e_i \in \langle v_1, \ldots, v_i \rangle$$

και

$$\langle e_1, \ldots, e_n \rangle = \langle v_1, \ldots, v_n \rangle .$$

Απόδειξη. Θα ορίσουμε πρώτα ένα σύνολο μη μηδενικών ορθογωνίων διανυσμάτων $e'_1, \ldots, e'_n$, και στη συνέχεια θα ορίσουμε τα μοναδιαία διανύσματα

$$e_i = \frac{1}{||e'_i||} e'_i .$$

Αφού τα $\{v_1, \ldots, v_n\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, $v_1 \neq 0$, και ορίζουμε

$$\begin{aligned} e'_1 &= v_1 , \\ e'_2 &= v_2 - \frac{\langle v_2, e'_1 \rangle}{\langle e'_1, e'_1 \rangle} e'_1 . \end{aligned}$$

Το e'_2 προκύπτει από το v_2 αφαιρώντας κατάλληλο πολλαπλάσιο του e'_1 ώστε e'_2 να είναι ορθογώνιο προς το e'_1. Πράγματι

$$\begin{aligned} \langle e'_2, e'_1 \rangle &= \langle v_2 - \frac{\langle v_2, e'_1 \rangle}{\langle e'_1, e'_1 \rangle} e'_1, e'_1 \rangle \\ &= \langle v_2, e'_1 \rangle - \frac{\langle v_2, e'_1 \rangle}{\langle e'_1, e'_1 \rangle} \langle e'_1, e'_1 \rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι αφού τα e'_1, v_2 είναι γραμμικά ανεξάρτητα, $e'_2 \neq 0$ και τα e'_1, e'_2 παράγουν τον ίδιο υπόχωρο που παράγουν τα v_1, v_2.

Στη συνέχεια, για $j = 3, \ldots, n$, ορίζουμε αναδρομικά τα μη μηδενικά διανύσματα

$$e'_j = v_j - \sum_{i=1}^{j-1} \frac{\langle v_j, e'_i \rangle}{\langle e'_i, e'_i \rangle} e'_i , \tag{7.3}$$

τα οποία ικανοποιούν $\langle e'_i, e'_j \rangle = 0$ για $i = 1, \ldots, j-1$.

Τέλος για κάθς $j = 1, \ldots, n$ ορίζουμε

$$e_j = \frac{i}{||e_j||} e'_j .$$

Από την 7.3 είναι φανερό ότι

$$e_j \in \langle v_1, \ldots, v_j \rangle$$

και ότι

$$v_j \in \langle e_1, \ldots, e_j \rangle$$

Συνεπώς, για κάθε $j = 1, \ldots, n$

$$\langle e_1, \ldots, e_j \rangle = \langle v_1, \ldots, v_j \rangle .$$

□