

ΣΤΡΕΨΗ

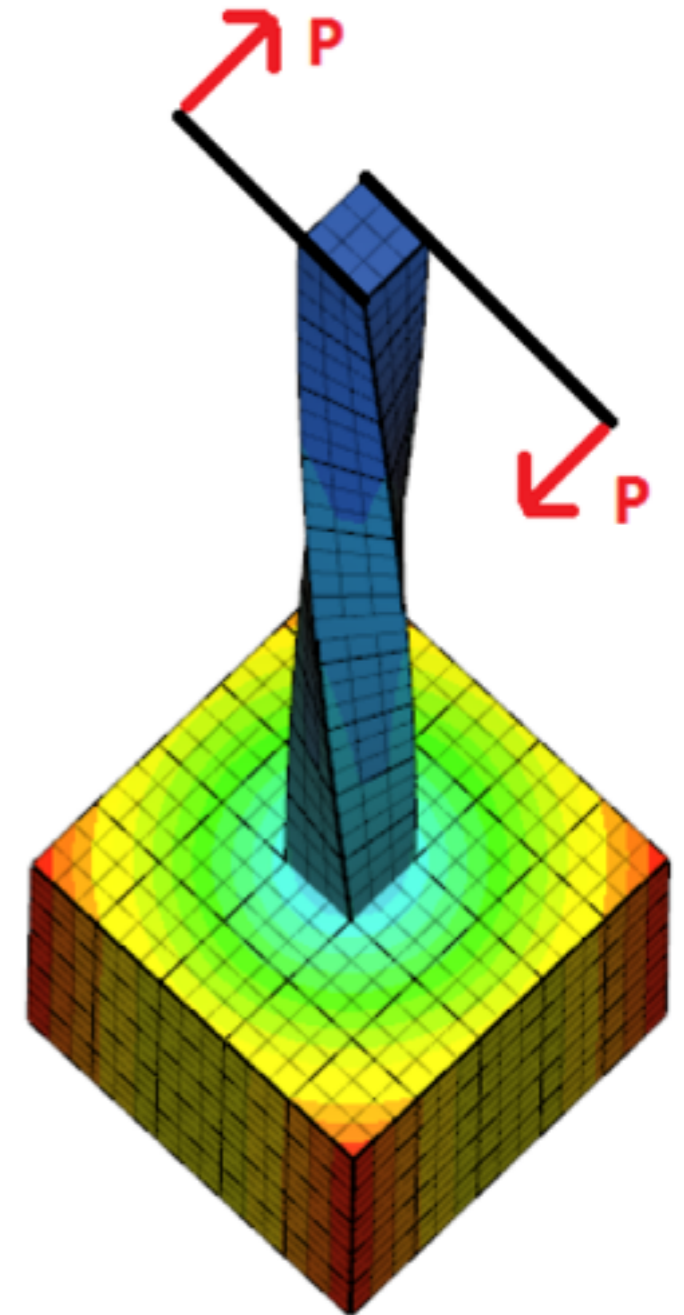
Στρέψη



- Θα αναλύσουμε τις τάσεις και τις ροπές δομικών στοιχείων κυκλικής εγκάρσιας διατομής τα οποία υπόκεινται σε ζεύγη ροπών στρέψης.
- Τα ζεύγη αυτά έχουν ίσο μέτρο και αντίθετες διευθύνσεις και εφαρμόζονται περί τον κεντροβαρικό άξονα των στοιχείων.

Ορισμός Στρέψης

- Ένας άξονας ή μια ράβδος καταπονείται σε στρέψη όταν επάνω σε αυτή επενεργούν ζεύγη ίσων και αντίθετων δυνάμεων που τα επίπεδα τους είναι κάθετα στον κεντροβαρικό της άξονα.
- Η στρέψη αποτελεί ένα είδος απλής καταπόνησης όπως αυτό της κάμψης και του εφελκυσμού.

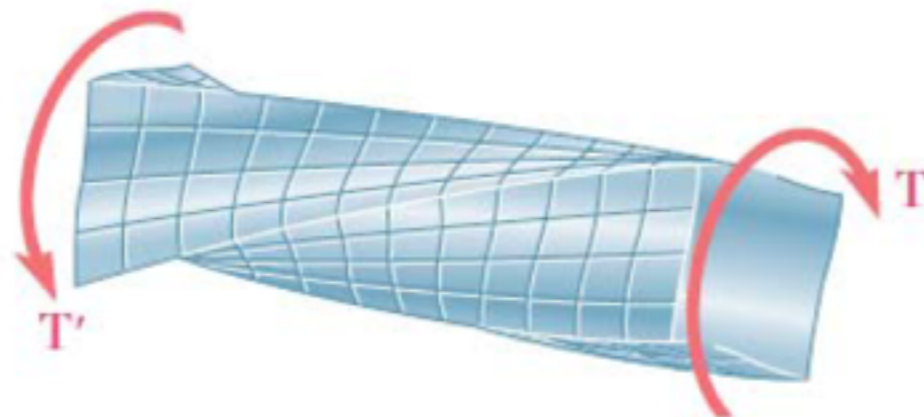


Βασικές παραδοχές

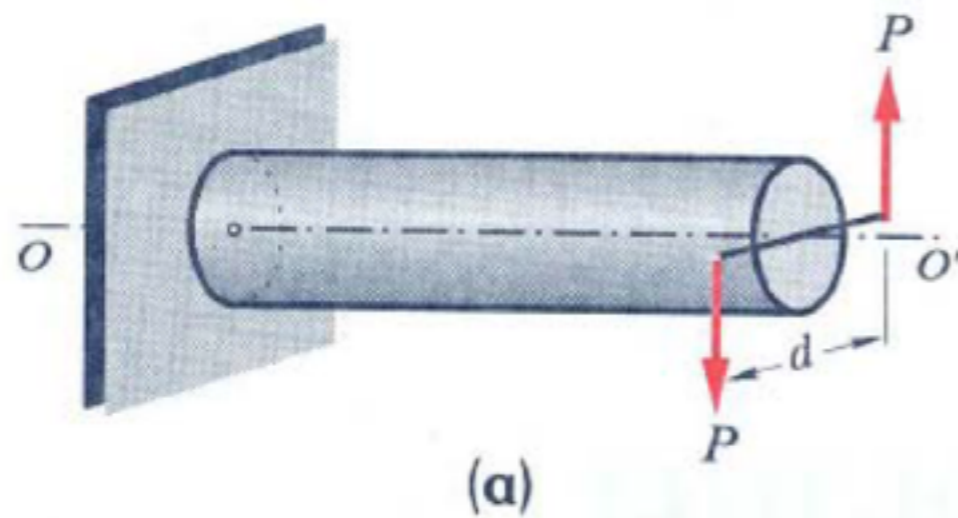
- Επειδή η πραγματική κατανομή των τάσεων υπό την επίδραση ενός δεδομένου φορτίου είναι υπερστατική και συνεπώς η ανάλυση είναι πολύπλοκη θα αναπτύξουμε μία απλή θεωρία η οποία βασίζεται στις εξής απλές παραδοχές:
 1. Το υλικό είναι ομογενές και γραμμικά ελαστικό
 2. Οι κυκλικές διατομές παραμένουν κυκλικές κατά την στρέψη
 3. Οι κυκλικές διατομές παραμένουν επίπεδες κατά την στρέψη
 4. Οι κυκλικές διατομές περιστρέφονται σαν στερεοί δίσκοι.
- Οι παραδοχές αυτές επαληθεύονται πειραματικά όχι για άξονες με τυχαία διατομή αλλά μόνο για άξονες με κυκλική διατομή.

Βασικές έννοιες στρέψης

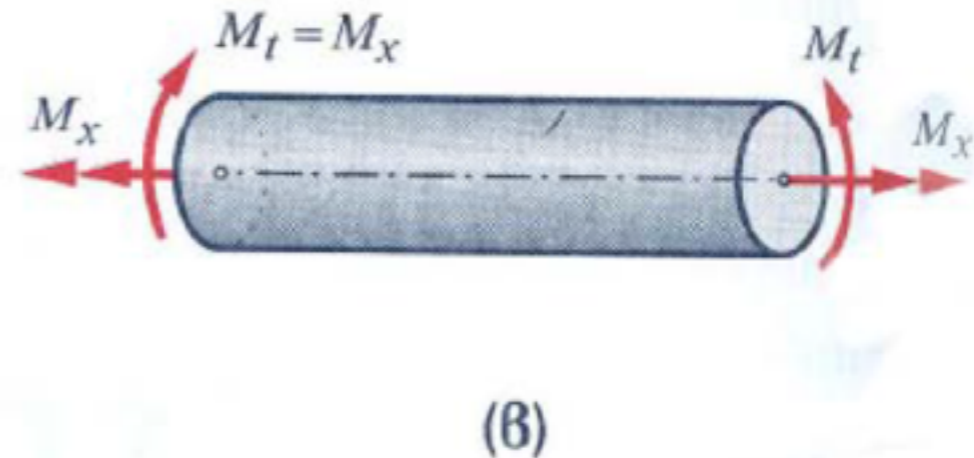
- Το ζεύγος των δυνάμεων προκαλεί σε κάθε διατομή της ράβδου μια ροπή, που ονομάζεται ροπή στρέψης.
- Αν τα ζεύγη είναι περισσότερα τότε η ροπή στρέψης ισούται με το αλγεβρικό άθροισμα όλων των ροπών που προκαλούν τα ζεύγη.
- Αυτό το είδος καταπόνησης τείνει να περιστρέψει την ράβδο γύρω από τον άξονά της.



Στρέψη ράβδου κυκλικής διατομής



Πακτωμένη ράβδος



Διάγραμμα ελευθέρου σώματος

- Στην καταπόνηση της στρέψης απαιτείται ο προσδιορισμός των διατμητικών δυνάμεων, τ , και της γωνίας στροφής ϕ των διατομών.
- Το μέτρο διάτμησης, G , είναι ο λόγος της διατμητικής τάσης, τ , ως προς τη διατμητική παραμόρφωση, γ :
$$G = \frac{\tau}{\gamma}$$
- Το G συνδέεται με το μέτρο Young και το λόγο Poisson, ν , από τη σχέση:
$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

Ανηγμένη γωνία στρώσης

- Θεωρούμε στοιχειώδη δίσκο μήκους με σχετική περιστροφή $d\phi$.

- Η ακτίνα $R=(KB)=(KB')$

- Η ευθεία περιφέρειας $(AB)=(AB')$

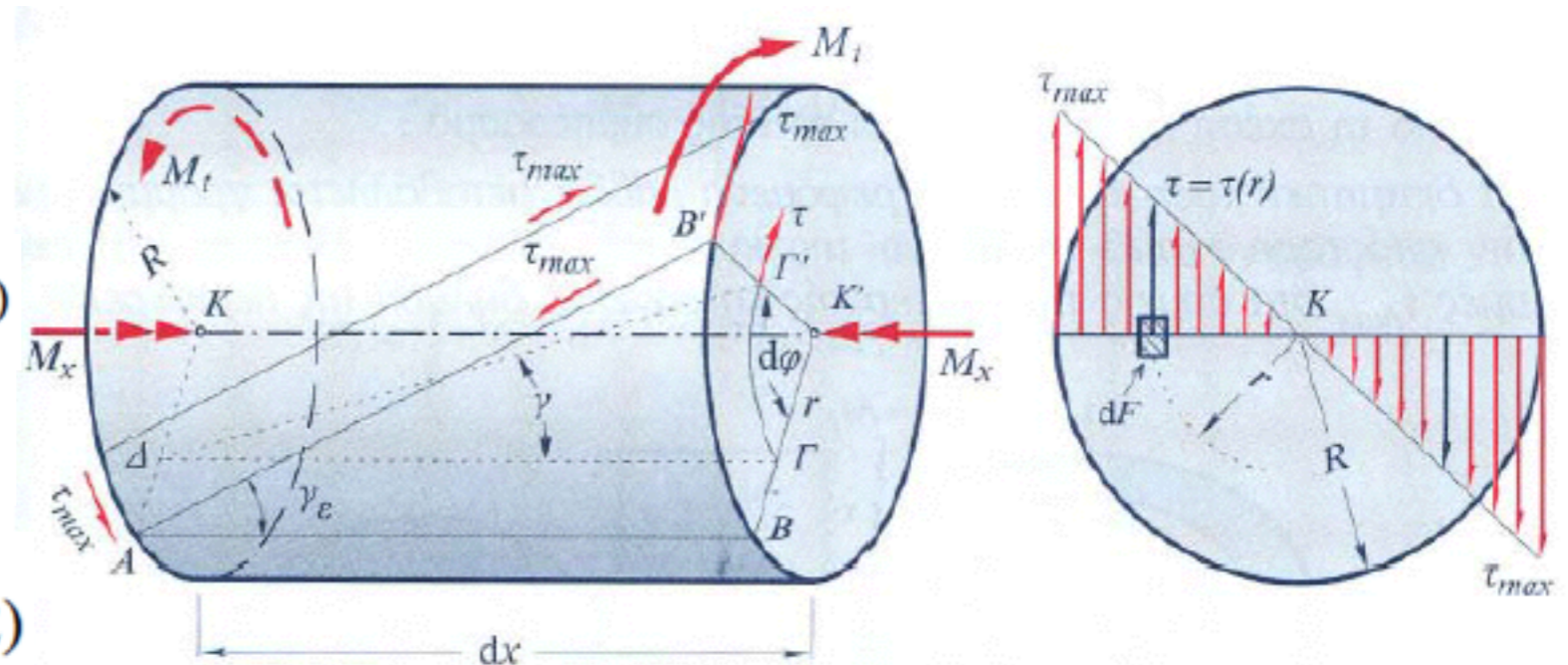
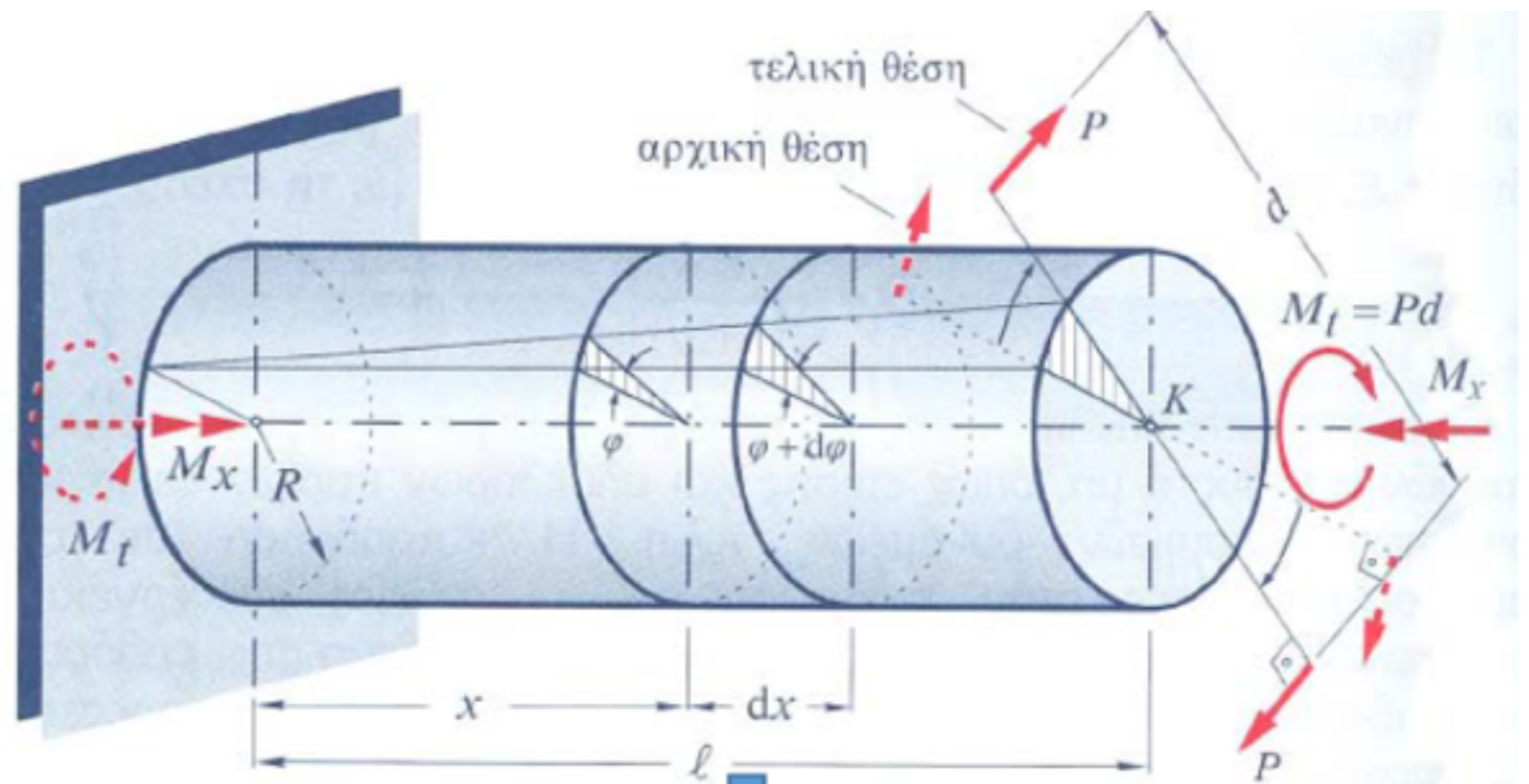
- Η τυχαία ευθεία $(\Gamma\Delta)=(\Gamma\Delta')$

- Ισχύει: $\gamma_\epsilon \approx \tan \gamma_\epsilon = \frac{(BB')}{dx} = \frac{Rd\phi}{dx} = R\theta$ (1)

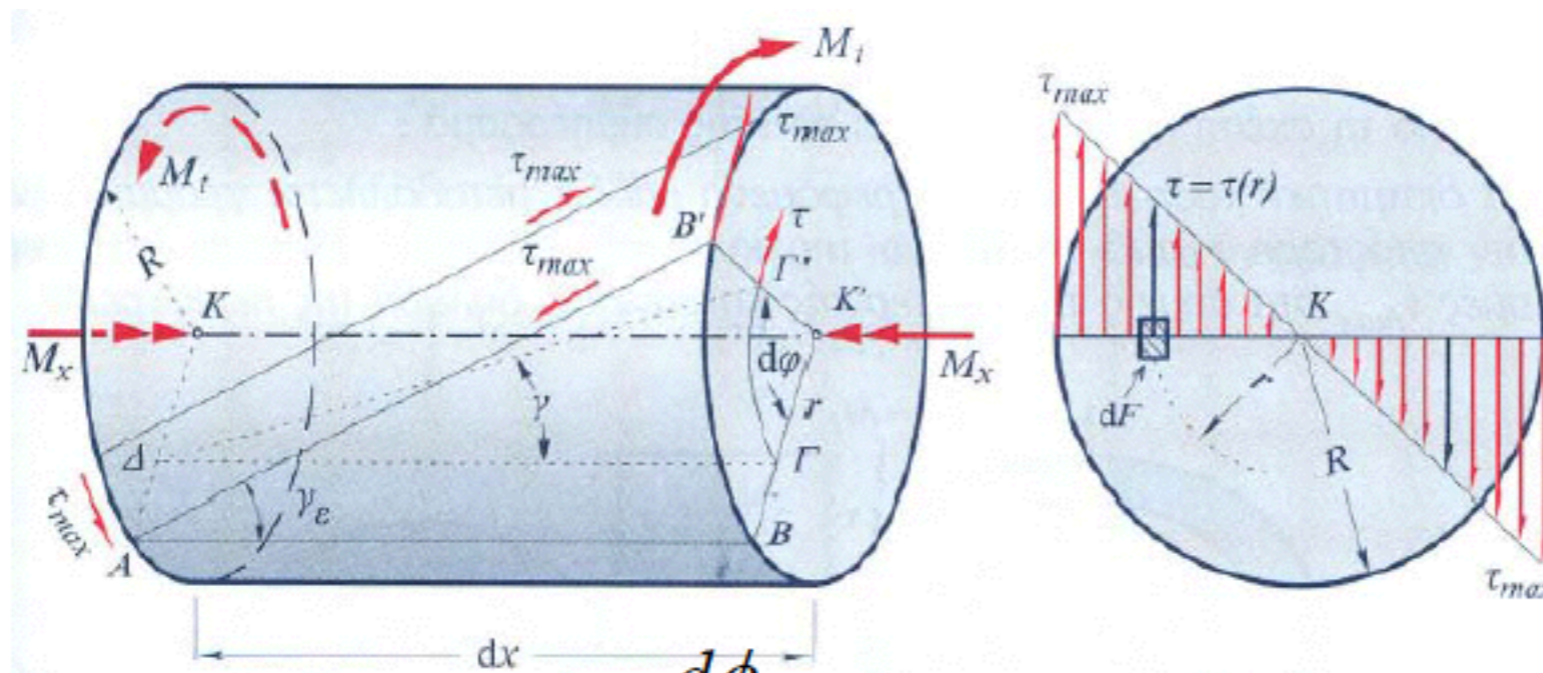
$$\theta = \frac{d\phi}{dx}$$

- για τυχαία ακτίνα r :

- (1) = $\gamma \approx \tan \gamma = \frac{(\Gamma\Gamma')}{dx} = \frac{rd\phi}{dx} = r\theta$ (2)



Ανηγμένη γωνία στροφής



Στη στρέψη θεωρούμε ότι ο λόγος $\frac{d\phi}{dx}$ είναι σταθερός σε όλο το μήκος της ράβδου εφόσον δέχεται την ίδια στρεπτική ροπή. Άρα με ολοκλήρωση:

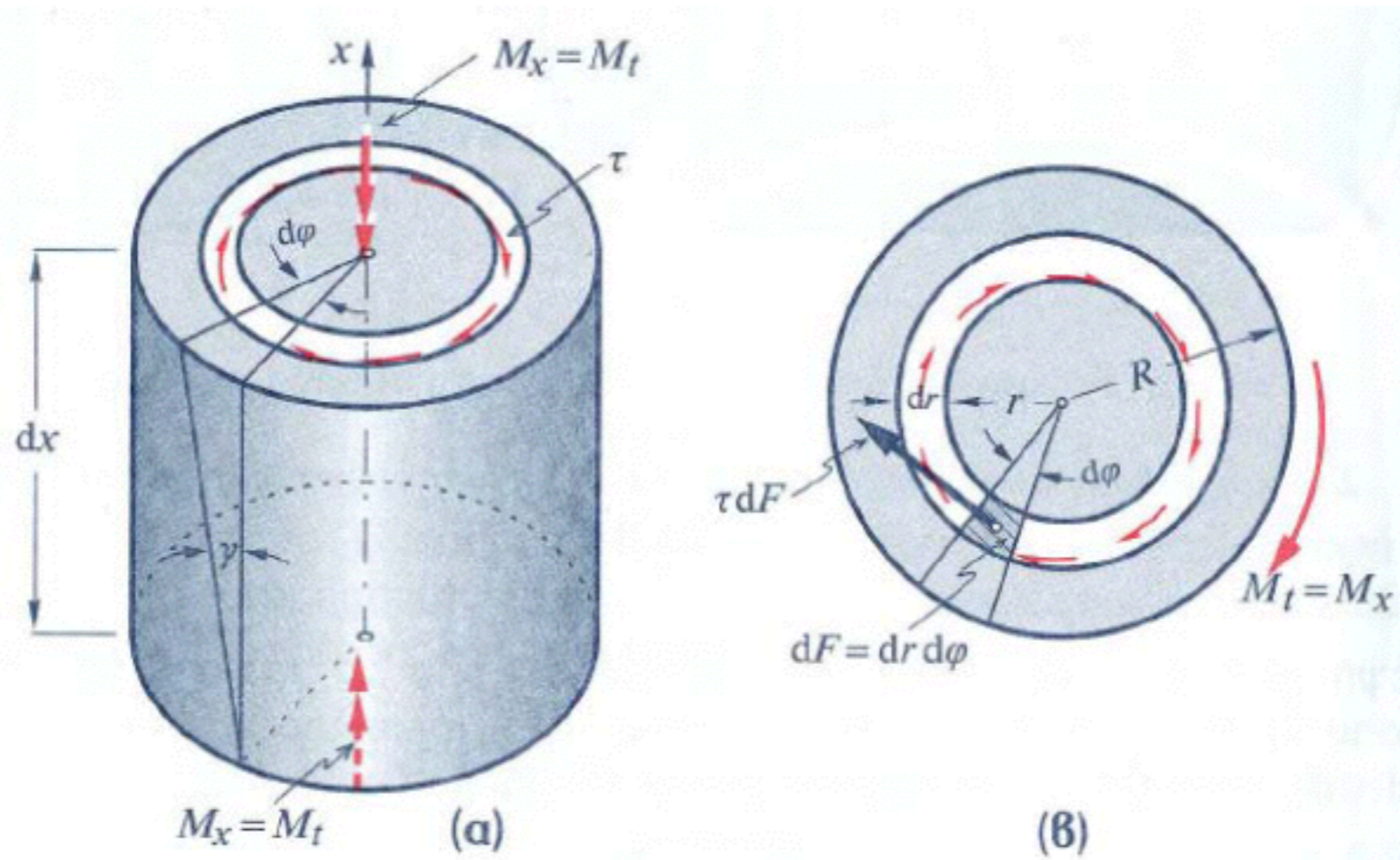
$$\theta = \frac{\phi}{l} \quad (3)$$

$$(1), (2), (3) \Rightarrow \gamma = \gamma_\varepsilon \frac{r}{R} \quad (4)$$

Από την (4) είναι προφανές ότι η μέγιστη τιμή γωνιακής παραμόρφωσης είναι στην περιφέρεια ($r \equiv R$). Επίσης παρατηρούμε ότι $(BB') = \gamma_\varepsilon l = \phi R \Rightarrow \frac{\gamma_\varepsilon}{R} = \frac{\phi}{l} \equiv \theta$

$$(4) \Rightarrow \gamma = \theta r \quad (5) \text{ και } \tau = G\gamma = G\theta r \quad (6)$$

Διατμητικές τάσεις

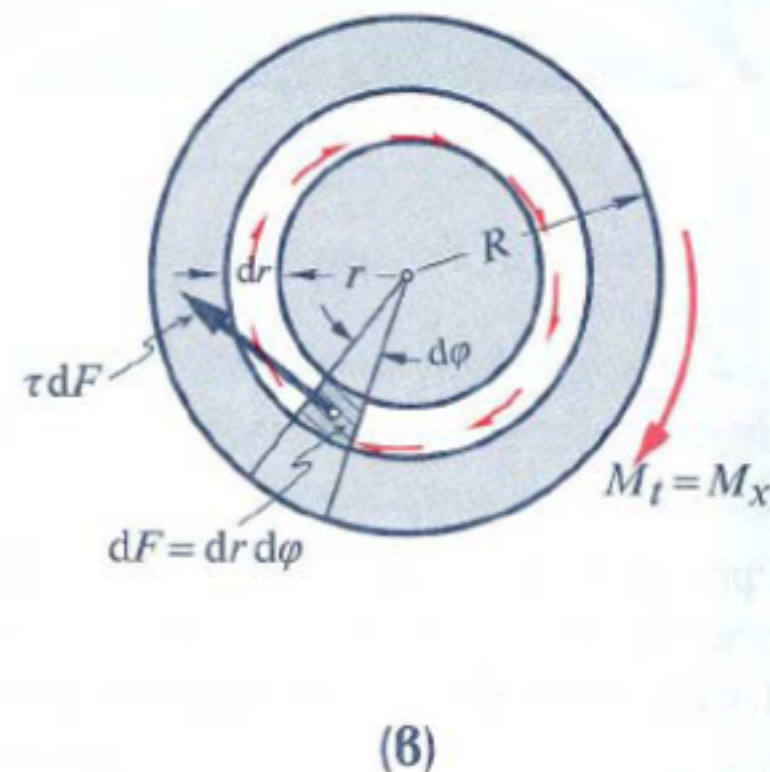
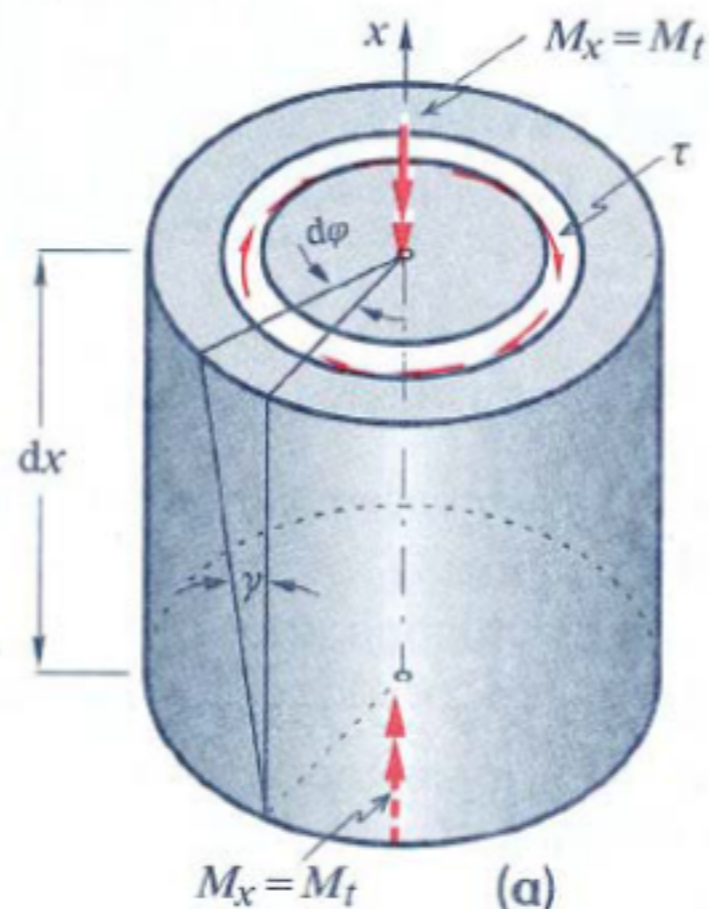


Από την (6) προκύπτει ότι η διατμητική τάση σε στρεφόμενη ράβδο μεταβάλλεται γραμμικά με r .

Για τυχαία ακτίνα προφανώς: $\tau(r) = \tau_{\max} \frac{r}{R}$ (7)

Για σταθερό r τότε προφανώς από την (6): $\tau(\theta) = (Gr_{con})\theta$ (8)

Πολική ροπή



Στη στοιχειώδη επιφάνεια dF που έχει απόσταση r από το κέντρο της διατομής ενεργεί στοιχειώδης δύναμη τdF με ροπή προς το κέντρο του κύκλου τιμής $r\tau dF$

Η ροπή όλων των στοιχειωδών δυνάμεων ως προς το κέντρο δίνεται από: $M_t = \int_F r\tau dF$ (9)

$$\text{Από (8), (9)} \Rightarrow M_t = \int_F r^2 G\theta dF = G\theta \int_F r^2 dF \quad (10)$$

Ορίζουμε ως πολική ροπή αδρανείας της κυκλικής διατομής: $I_p = \int_F r^2 dF$ (11)

$$(10),(11) \Rightarrow M_t = \theta G I_p \quad (10)$$

Από τις σχέσεις:

$$\tau = G\theta r \quad (6)$$

$$M_t = \theta G I_p \quad (10)$$

διώχνουμε το θ για να εκφράσουμε τη διατμητική τάση ως συνάρτηση

$$\text{της στρεπτικής ροπής για κάθε } r: (6),(10) \Rightarrow \tau = M_t \left(\frac{r}{I_p} \right) \quad (11)$$

Για κυκλική διατομή η πολική ροπή αδρανείας, I_p ,

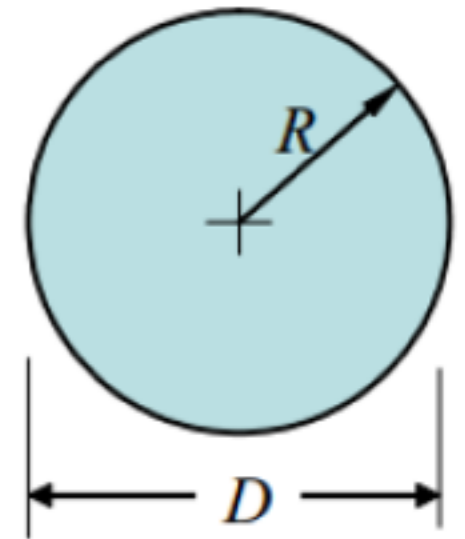
$$\text{δίνεται από: } I_p = \frac{\pi}{2} R^4 \quad (12) \quad [\text{απόδειξη: } I_p = \int r^2 d(\underbrace{\pi r^2}_A) = \int 2\pi r^3 dr = \frac{\pi}{2} R^4]$$

$$(11),(12) \Rightarrow \tau = \left(\frac{2M_t}{\pi R^4} \right) r \quad (13)$$

Η μέγιστη διατμητική (στρεπτική) τάση που ενδιαφέρει τεχνικά προκύπτει από την (13)

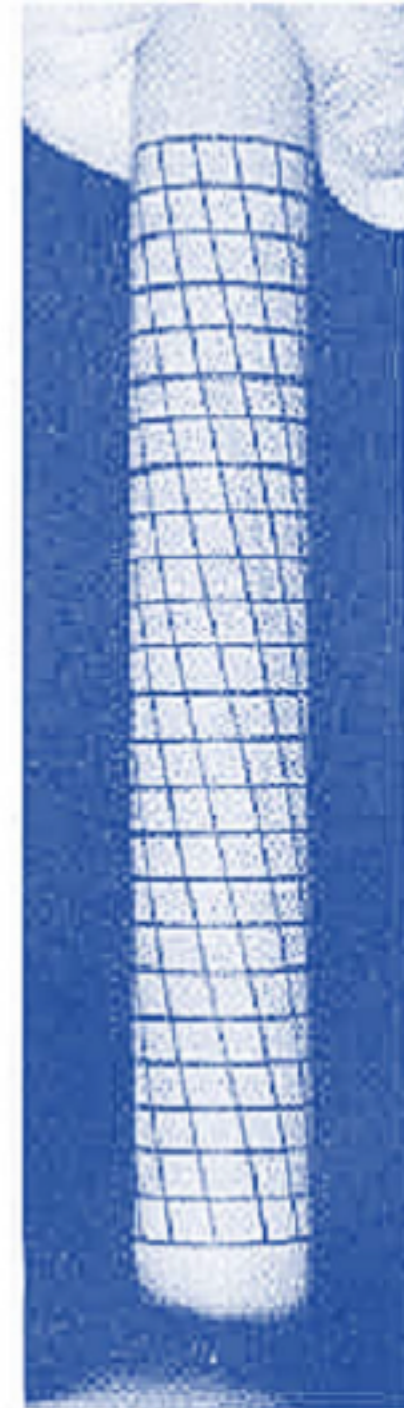
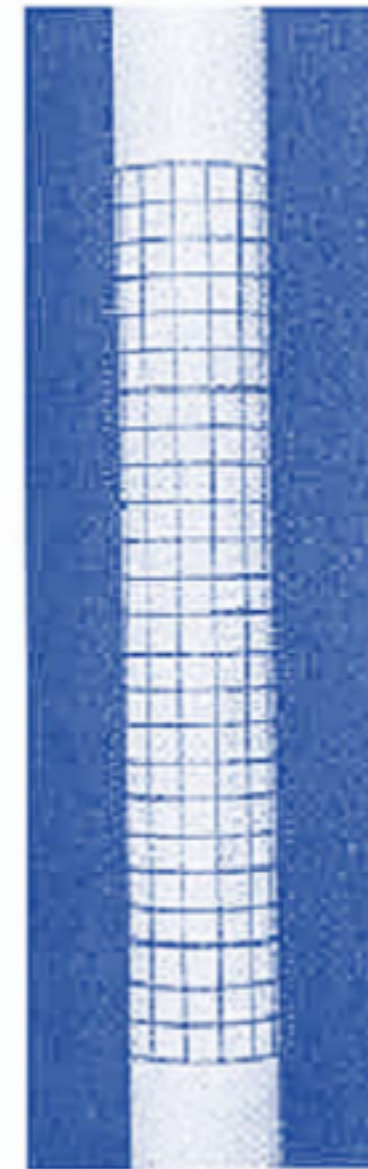
$$\text{για } r \equiv R: \tau_{\max} = \frac{2M_t}{\pi R^3} \quad (14)$$

Είναι προφανές ότι για να αποφύγουμε αστοχίες δεν πρέπει ποτέ η τ_{\max} να είναι μεγαλύτερη ή ίση της επιτρεπόμενης διατμητικής αντοχής του υλικού.



Στρέψη και διατμητική παραμόρφωση

- ❖ Αν σε μία ράβδο ζωγραφίσουμε ένα μοτίβο τετραγώνων επί της επιφάνειάς της πριν την στρέψη τότε μετά την συστροφή οι ευθείες γραμμές μετατρέπονται σε σπιδάλ γύρω από την ράβδο ενώ οι κυκλικές γραμμές παραμένουν κύκλοι.
- ❖ Τα τετράγωνα μετά συστροφή είναι τώρα ρομβοειδή παραλληλόγραμμα, γεγονός που υποδηλώνει ότι μια διατμητική τάση έχει εφαρμοστεί στα τετράγωνα. Έτσι λοιπόν μπορούμε να υπολογίσουμε την διατμητική τροπή που αναφέραμε νωρίτερα.



Πριν το
πείραμα

Μετά το
πείραμα

Προσδιορισμός γωνίας στροφής, φ

Από τις σχέσεις (3) και (10):

$$\theta = \frac{\varphi}{l} \quad (3)$$

$$M_t = \theta G I_p \quad (10)$$

διώχνουμε πάλι το θ και βρίσκουμε τη γωνία στροφής φ (σε rad) ως συνάρτηση της

στρεπτικής ροπής και του μήκους της ράβδου l : (6),(10) $\Rightarrow \varphi = \frac{M_t l}{G I_p} \quad (15)$

Όπως και στην κάμψη το γινόμενο του μέτρου διάτμησης επί της πολικής ροπής (ανηγμένης για 1) δίνει το λεγόμενο "μετρο δυστρεψίας" της ράβδου.

Είναι προφανές ότι για να αποφύγουμε αστοχίες δεν πρέπει ποτέ η γωνία στροφής φ ή η ανηγμένη γωνία στροφής θ να είναι μεγαλύτερη ή ίση κάποιων κρίσιμων τιμών γωνιών στροφής του υλικού.

Παραδείγματα/ Υπολογισμοί (1/2)

1. Ράβδος μήκους $l=1,5$ m κυκλικής διατομής διαμέτρου $d=100$ mm καταπονείται από ροπή στρέψης $M_t=1$ kNm. Να βρεθούν:
 - (a) Η μέγιστη διατμητική τάση που αναπτύσσεται εντός του υλικού.
 - (b) Η γωνία στροφής.

Δίδεται το μέτρο διάτμησης του υλικού (χάλυβας) $G=85$ GPa.

(a) Η μέγιστη τάση αναπτύσσεται στην περιφέρεια. Σύμφωνα με τη σχέση:

$$\tau_{\max} = \frac{2M_t}{\pi R^3} \quad (14) \Rightarrow \tau_{\max} = \frac{2 \times 1000 \text{ Nm}}{\pi (0,05)^3 \text{ m}^3} = 5 \cdot 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = 5 \text{ MPa}$$

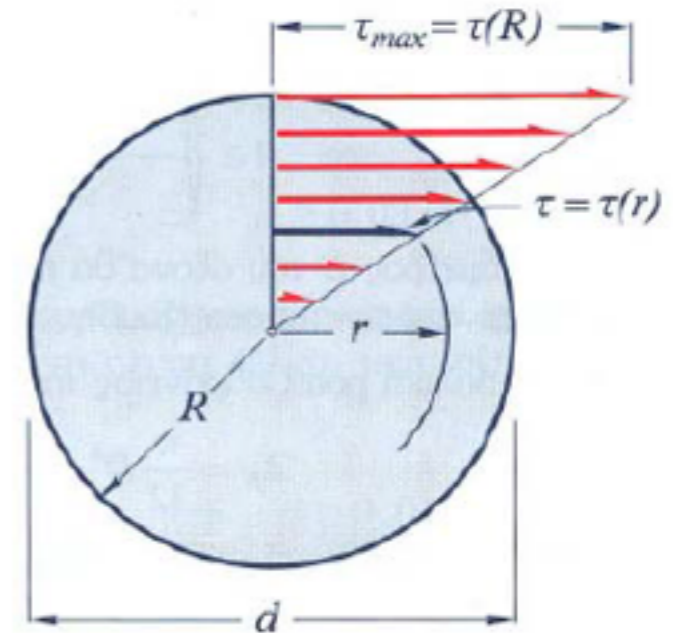
(b) Σύμφωνα με τη σχέση: $\varphi = \frac{M_t l}{GI_p}$ (15)

Γνωρίζουμε όλες τις παραμέτρους εκτός της I_p η οποία δίδεται από τον τύπο:

$$I_p = \frac{\pi}{2} R^4 \quad (12) \Rightarrow I_p = 9,81 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4$$

Οπότε αντικαθιστούμε όλες τιμές στην (15) και βρίσκουμε:

$$\varphi = \frac{M_t l}{GI_p} = \frac{1 \cdot 10^3 \times 1,5}{85 \cdot 10^9 \times 9,81 \cdot 10^{-6}} \frac{\text{Nm}^2}{(\text{N/m}^2) \text{m}^4} = 0,0018 \text{ rad} = 0,103^\circ$$



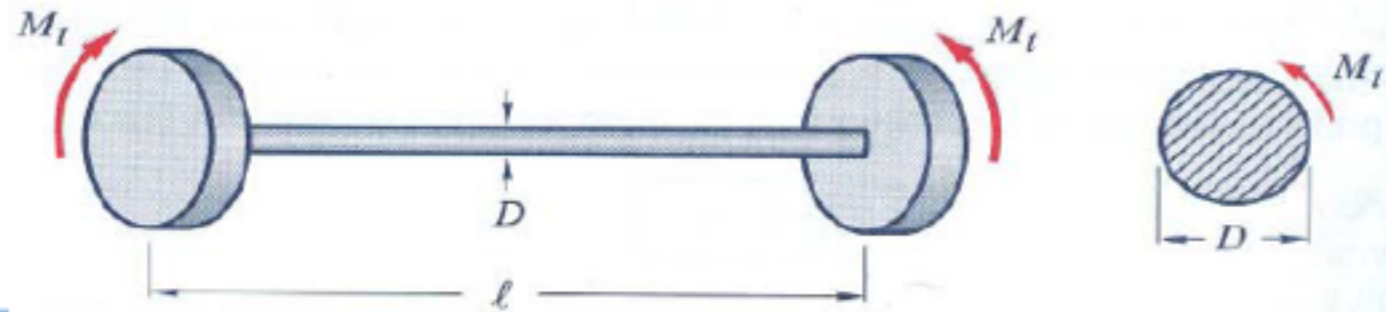
Παραδείγματα/ Υπολογισμοί (2/2)

1. Στις άκρες χαλύβδινου άξονα μήους $l=3,0$ m είναι συγκολλημένοι δύο κυκλικοί δίσκοι. Να βρεθούν:

(a) Η ελάχιστη διάμετρος του άξονα αν η ροπή στρέψης είναι $M_t=1$ kNm.

(b) Η γωνία στροφής του ενός δίσκου ως προς τον άλλο.

Δίδεται το μέτρο διάτμησης του χάλυβα $G=85$ GPa. Η επιτρεπτή μέγιστη διατμητική τάση είναι $\tau_{\epsilon\pi}=1800$ N/cm²



(a) Η συνθήκη αντοχής είναι προφανώς:

$$\tau_{\max} \leq \tau_{\epsilon\pi} \Rightarrow \frac{M_t}{I_p} R \leq \tau_{\epsilon\pi} \xrightarrow{I_p = \frac{\pi R^4}{2}} \frac{2M_t}{\pi R^4} R \leq \tau_{\epsilon\pi} \Rightarrow R \geq \sqrt[3]{\frac{2M_t}{\pi \tau_{\epsilon\pi}}} = \sqrt[3]{\frac{4000 \text{ Nm}}{1800\pi \cdot 10^4 \text{ Nm}^2}} = 0,033 \text{ m}$$

Άρα $D = 2R = 0,066 \text{ m} = 6,6 \text{ cm}$

(b) Χρησιμοποιούμε τη σχέση: $\varphi = \frac{M_t l}{GI_p}$ (15).

Βρίσκουμε την I_p η οποία αντιστοιχεί στην ως άνω R : $I_p = \frac{\pi}{2} R^4$ (12) $\Rightarrow I_p = 1,82 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4$

$$(15) \Rightarrow \varphi = \frac{M_t l}{GI_p} = \frac{1 \cdot 10^3 \times 3}{85 \cdot 10^9 \times 1,82 \cdot 10^{-6}} \frac{\text{Nm}^2}{(\text{N/m}^2) \text{m}^4} = 0.019 \text{ rad} = 1,09^\circ$$

Στρέψη κυκλικού σωλήνα

Η ροπή πολικής αδράνειας υπολογίζεται από τον τύπο:

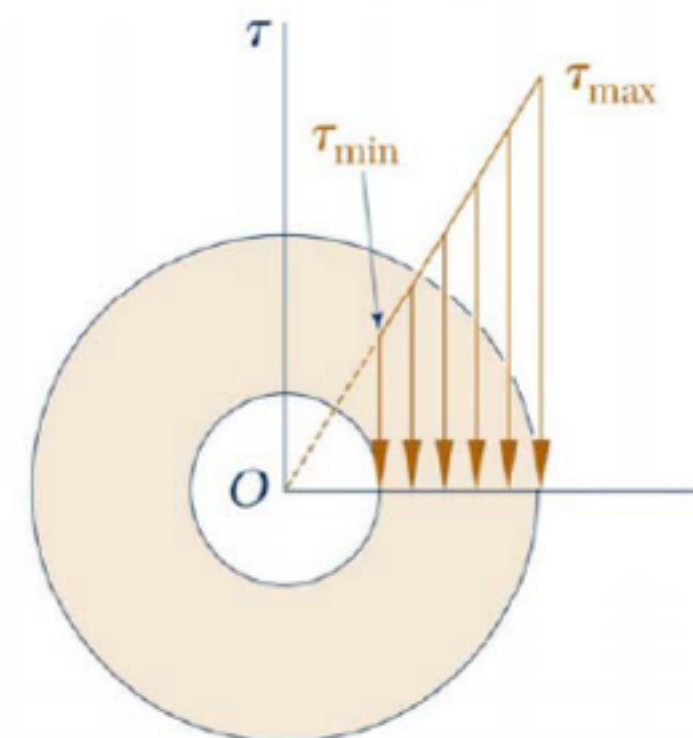
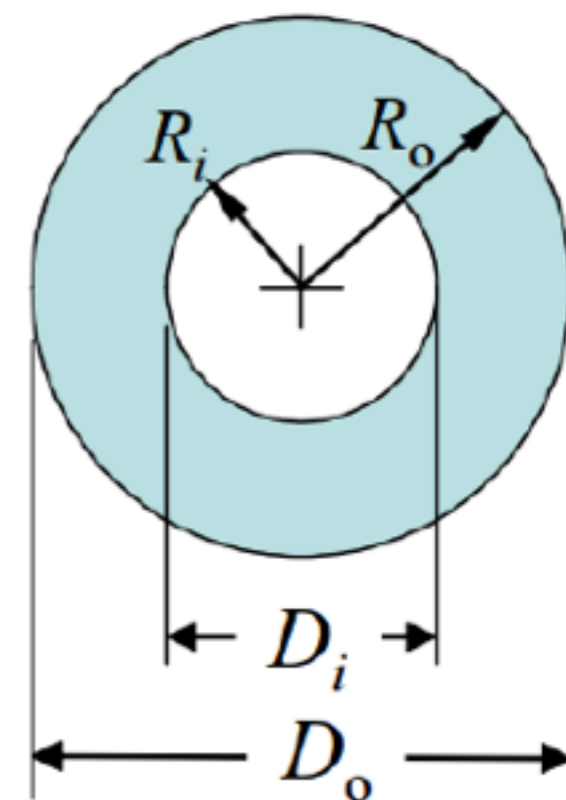
$$I_p = \int_{R_i}^{R_o} 2\pi\rho^3 d\rho = \frac{\pi}{2} (R_o^4 - R_i^4) = \frac{\pi}{32} (D_o^4 - D_i^4)$$

Άρα από τη σχέση (13) προκύπτει:

$$\tau = \left[\frac{2M_t}{\pi (R_o^4 - R_i^4)} r \right] \quad (16)$$

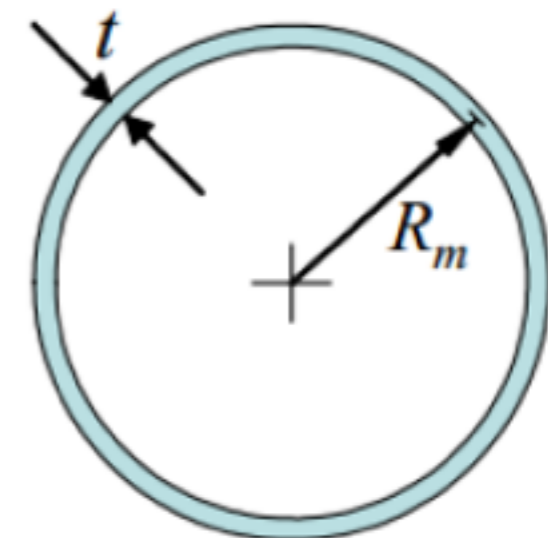
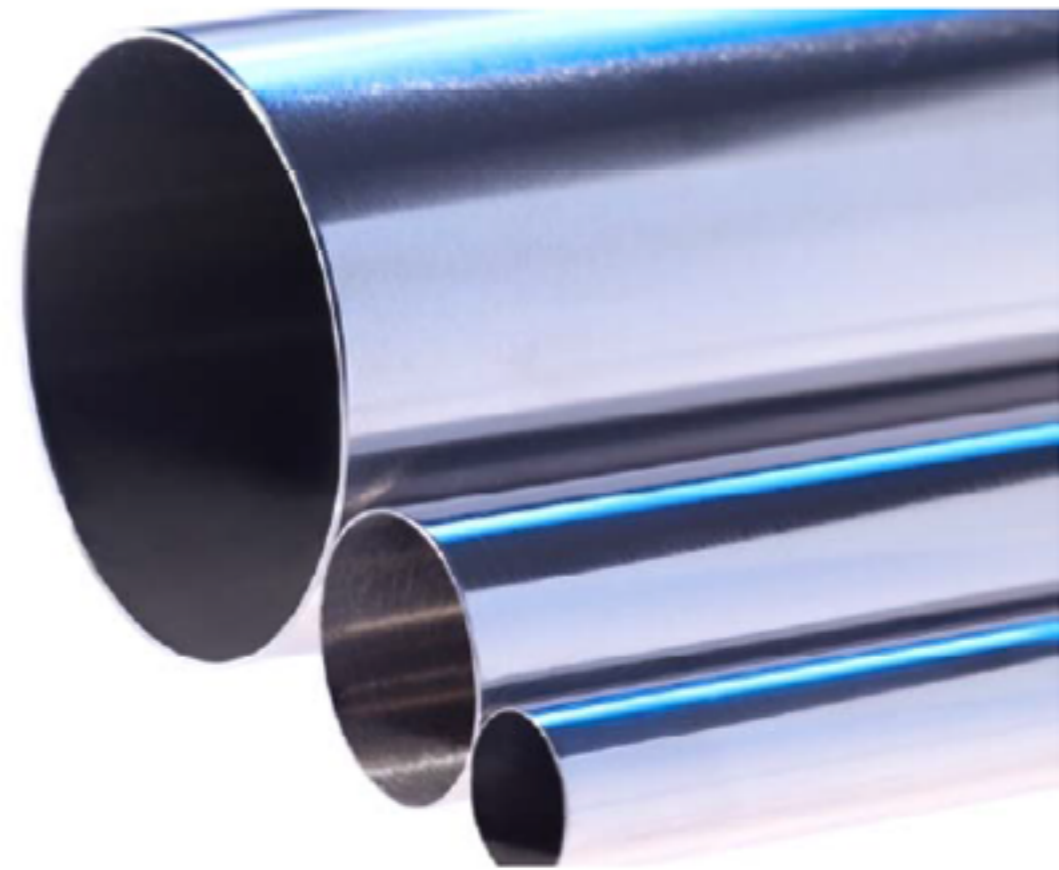
Προφανώς:

$$\tau_{\max} = \left[\frac{2M_t}{\pi (R_o^4 - R_i^4)} R_o \right] \quad (17)$$



Στρέψη λεπτότοιχων σωλήνων κυκλικής διατομής (1/2)

- ❖ Λεπτότοιχος σωλήνας ονομάζεται αυτός που η εξωτερική διάμετρος είναι σχεδόν ίση με την εσωτερική.
- ❖ Επειδή το πάχος του σωλήνα είναι μικρό δεχόμαστε ότι οι διατμητικές τάσεις είναι σταθερές σε όλο του το πάχος.
- ❖ Οι διατμητικές τάσεις δρουν στην διεύθυνση της περιμέτρου σε κάθε σημείο της διατομής.



Στρέψη λεπτότοιχων σωλήνων κυκλικής διατομής (2/2)

Στην περίπτωση αυτή όμως η πολική ροπή αδράνειας δίνεται από τον τύπο:

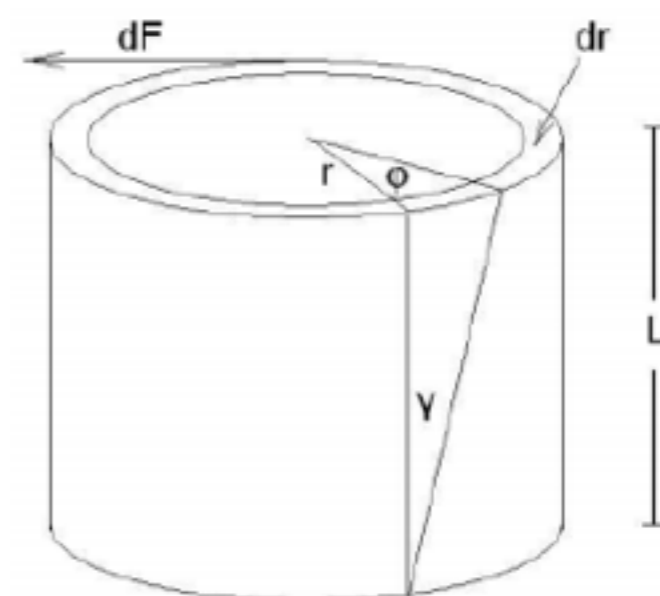
$$I_p = \int r^2 d(\pi r^2) = \int 2\pi r^3 dr \approx 2\pi r^3 t \quad (18)$$

$$\text{Από τη σχέση (11) έχουμε: } \tau = M_t \left(\frac{r}{I_p} \right) \quad (11)$$

$$(11), (18) \Rightarrow \tau = \frac{M_t}{2\pi r^2 t} \quad (19)$$

Αντίστοιχα η γωνία στροφής φ του λεπτότοιχου σωλήνα δίνεται από αντικατάσταση στη σχέση (15):

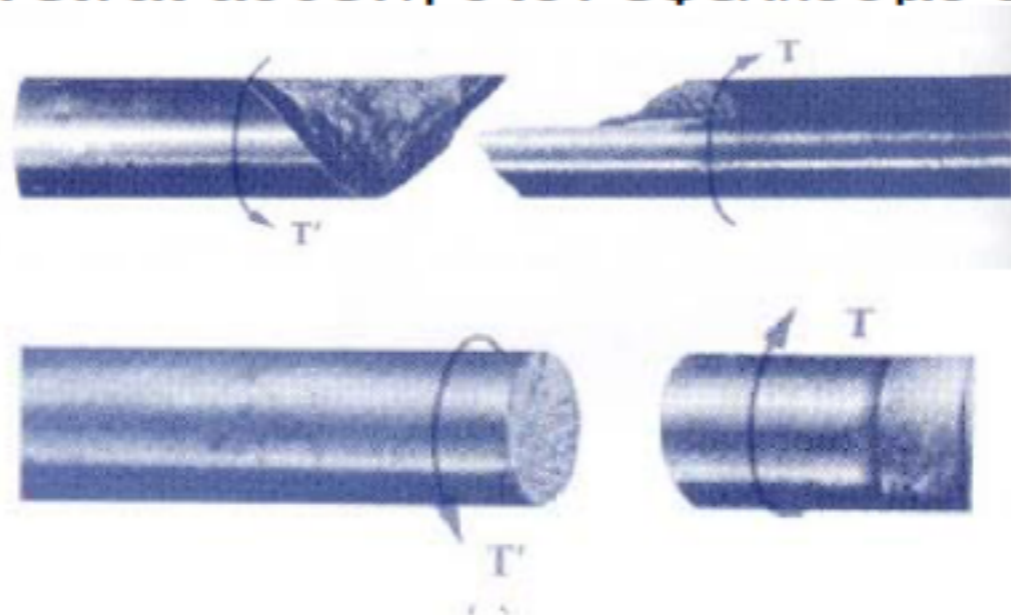
$$\varphi = \frac{M_t l}{GI_p} \quad (15) \xrightarrow{(18)} \varphi = \frac{M_t l}{2G\pi r^3 t}$$



Σύγκριση επιπέδων φόρτισης στρέψης και μονοαξονικής εντατικής κατάστασης

Στη μονοαξονική εντατική κατάσταση:

- ❖ Τα ψαθυρά υλικά σπάνε λόγο ορθής μέγιστης τάσης κάθετα στην διεύθυνση μέγιστης ορθής τάσης (90°).
- ❖ Τα όλκιμα υλικά σπάνε στην μέγιστη διατμητική τάση (45°).
- ❖ Γενικά τα ψαθυρά υλικά είναι ασθενή στον εφελκυσμό ενώ τα όλκιμα διαρρέουν.



Στην στρέψη:

- ❖ Στις 45° , 135° αναπτύσσονται μόνο ορθές τάσεις (οι μέγιστες) οι οποίες είναι ίσες με τις διατμητικές.
- ❖ Τα ψαθυρά υλικά παρουσιάζουν την ελικοειδή ρωγμή στις 45° .
- ❖ Τα όλκιμα υλικά αστοχούν κάθετα στον άξονα της στρέψης.

Πείραμα στρέψης

Το πείραμα στρέψης όπως και το πείραμα του εφελκυσμού αποτελεί βασικό πείραμα και χρησιμεύει για την διατήρηση των νόμων συμπεριφοράς μεταξύ διατμητικών τάσεων και διατμητικών παραμορφώσεων .

Παραδοχές πειράματος στρέψης

1) το υλικό είναι ομογενές και ισότροπο

2) οι διατομές παραμένουν επίπεδες

3) κάθε διατομή περιστρέφεται σαν σύνολο ως απόλυτα στερεός δίσκος, δηλαδή οι ακτίνες παραμένουν ευθείες



Πείραμα στρέψης (2/2)

- ❖ Στο πείραμα της στρέψης τα δοκίμια πακτώνονται στη μία πλευρά και στην άλλη πλευρά εφαρμόζεται δύναμη που τείνει να τα στρέψει μέχρι να επέλθει η θραύση του δοκιμίου.
- ❖ Για κάθε τιμή της ροπής στρέψης μετράται η γωνία στρέψης. Στο διάγραμμα τάσεων παραμορφώσεων που προκύπτει παρατηρείται μία περιοχή όπου η διατμητική παραμόρφωση γ μεταβάλλεται γραμμικά με την τάση τ , δηλαδή όσο αυξάνεται η τάση αυξάνεται και η παραμόρφωση. Στην περιοχή αυτή λοιπόν ισχύει ο νόμος του Hooke και είναι: $\tau = G\gamma$, όπου $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$

