ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΤΜΗΜΑ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΥΔΡΑΥΛΙΚΗΣ ΚΑΙ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝΤΙΚΗΣ ΤΕΧΝΙΚΗΣ

Διάλεξη 3: Περιγραφή αριθμητικών μεθόδων (συνέχεια)

Χειμερινό εξάμηνο 2008

Προηγούμενη παρουσίαση...

- Εξετάσαμε μερικές σημαντικές ομάδες μερικών διαφορικών εξισώσεων για την κατανόηση της συμπεριφοράς τους

- Εφαρμόσαμε την γενική εξίσωση μεταφοράς

- Περιγράψαμε βασικά στοιχεία αριθμητικών μεθόδων για την επίλυση της γενικής εξίσωσης μεταφοράς

Οργάνωση παρουσίασης

Θα συνεχίσουμε την περιγραφή και θα εξετάσουμε:

Τις μεθόδους πεπερασμένων διαφορών, πεπερασμένων όγκων και πεπερασμένων στοιχείων

Τις ιδιότητες της ακρίβειας (accuracy), συνέπειας (consistency), ευστάθειας (stability) και σύγκλισης (convergence) του αριθμητικού σχήματος

Βασικά χαρακτηριστικά μεθόδου πεπερασμένων στοιχείων

- Θεωρούμε την εξίσωση διάχυσης:

$$\Gamma \frac{d^2\varphi}{dx^2} + S = 0$$

- Υποθέτουμε ότι $\overline{\varphi}$ είναι μία προσέγγιση της φ

- Επειδή η $\overline{\varphi}$ είναι μία προσέγγιση, δεν ικανοποιεί ακριβώς την εξίσωση της διάχυσης και αφήνει ένα υπόλοιπο (residual) *R*

$$\Gamma \frac{d^2\overline{\varphi}}{dx^2} + S = R$$

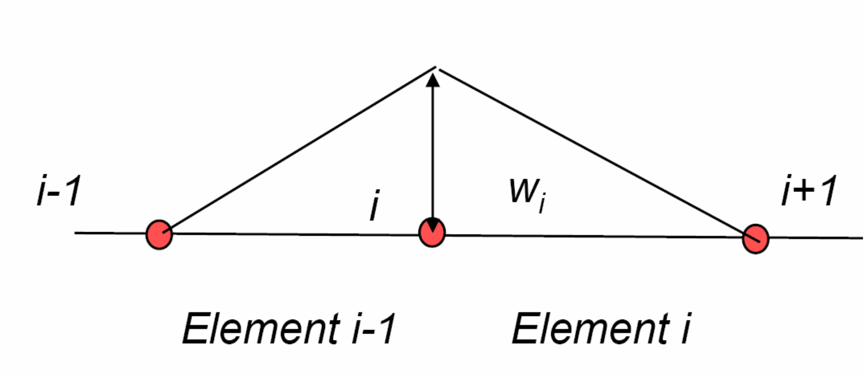
- Η μέθοδος πεπερασμένων στοιχείων κατά Galerkin ελαχιστοποιεί το *R* σε σχέση με μια συνάρτηση βάρους (weight function)

$$\int_{\pi\varepsilon\delta\iota o} WRdx = 0$$

Μέθοδος πεπερασμένων στοιχείων (συνέχεια)

• Χρησιμοποιείται μια οικογένεια συναρτήσεων βάρους W_i, i = 1,…N, (όπου N: είναι ο αριθμός των σημείων του πλέγματος). Αυτό δημιουργεί N διακριτές εξισώσεις για τους N αγνώστους

$$\int_{\pi\varepsilon\delta\iota o} W_i R dx = 0, i = 1, 2, 3, \ldots N$$

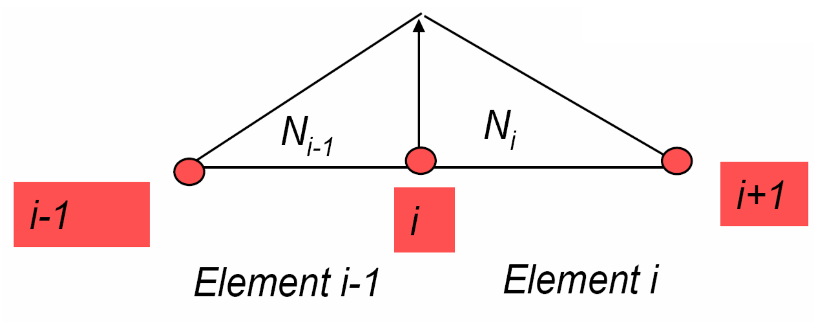


Οι συναρτήσεις βάρους είναι τοπικές. Για παράδειγμα είναι μηδέν οπουδήποτε αλλού εκτός από κοντά στο i

Μέθοδος πεπερασμένων στοιχείων (συνέχεια)

Επί προσθέτως, τοπικές συναρτήσεις σχήματος (shape function) N_i χρησιμοποιούμε για την διακριτοποίηση του *R*. Ειδικά για την προσέγγιση με τη μέθοδο Galerkin, οι συναρτήσεις βάρους και σχήματος επιλέγονται ίδιες.

Η συνάρτηση σχήματος είναι μη-μηδενική μόνο στην περιοχή του κόμβου i => “τοπική βάση”



Μέθοδος πεπερασμένων στοιχείων (συνέχεια)

• Η διαδικασία διακριτοποίησης οδηγεί ξανά σε ένα σύστημα αλγεβρικών εξισώσεων της μορφής:

$$a_{i,i}\varphi_i = a_{i,i+1}\varphi_{i+1} + a_{i,i+1}\varphi_{i,i-1} + b_i$$

• Σχόλια

» Η χρήση τοπικών βάσεων περιορίζει την σχέση μεταξύ του σημείου i και μόνο των γειτονικών του

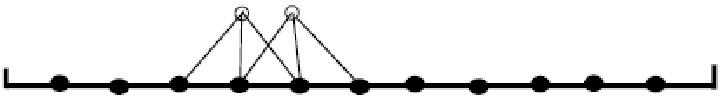
» Πάλι, το τελικό αποτέλεσμα είναι ένα σύστημα αλγεβρικών εξισώσεων – άρα μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τους ίδιους επιλυτές όπως και στις μεθόδους των πεπερασμένων όγκων και πεπερασμένων διαφορών

Σύγκριση των μεθόδων

- Και οι τρεις καταλήγουν σε συστήματα αλγεβρικών εξισώσεων που πρέπει να λυθούν αριθμητικά
- Αφορούν τοπική βάση - άρα υπάρχει μόνο εξάρτηση μεταξύ των γειτονικών κόμβων
- Η μέθοδο των πεπερασμένων όγκων είναι συντηρητική. Οι άλλες δεν είναι
- Η τάξη της ακρίβειας της κάθε μεθόδου εξαρτάτε από
  - » Την αποκοπή της σειράς Taylor στις πεπερασμένες διαφορές
  - » Τα προφίλ του θεωρήσαμε στους πεπερασμένους όγκους
  - » Τη τάξη των συνάρτησης σχήματος για τα πεπερασμένα στοιχεία

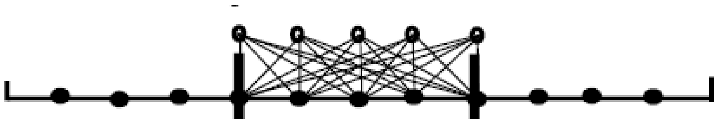
Εξάρτηση μεταξύ γειτονικών κόμβων

Πεπερασμένες διαφορές:

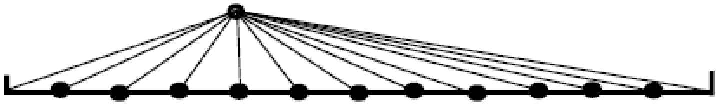


Μέθοδος πεπερασμένων όγκων

Πεπερασμένα στοιχεία:



Φασματικές μέθοδοι:



Επίλυση γραμμικών συστημάτων

- Το σύστημα των γραμμικών εξισώσεων έχει δύο βασικά χαρακτηριστικά
  - » Το μητρώο είναι αραιό (sparse) και ίσως banded
  - » Οι συντελεστές για μη γραμμικά προβλήματα είναι προσωρινοί
- Η επίλυση γίνεται βασικά χρησιμοποιώντας δύο τρόπους
  - » Άμεσες μεθόδους
  - » Επαναληπτικές μεθόδους
- Ο τρόπος της λύσης καθορίζει τη “διαδρομή της λύσης”
  - » Η τελικά απάντηση καθορίζεται από τη διακριτοποίηση

Άμεσες μέθοδοι

• Όλες τα σχήματα διακριτοποίησης οδηγούν στη μορφή:

$$\mathbf{A}\varphi = \mathbf{B}$$

Όπου φ είναι το διάνυσμα της λύσης $[\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_N]^T$.

• Μπορεί να αντιστραφεί: $$\varphi = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$$

•Η αντιστροφή στοιχίζει *O(N^3)* πράξεις, αλλά μπορούν να βρεθούν άλλες πιο οικονομικές μέθοδοι όπου λαμβάνονται υπόψη:

» τυχών δομές ζωνών 'band'

» το πόσο αραιός είναι ο πίνακας

Άμεσες μέθοδοι (συνέχεια)

• Μεγάλη απαίτηση σε μνήμη και αριθμητικές πράξεις

» Για αριθμό σημείων πλέγματος *N*, πρέπει να αποθηκεύουμε πίνακα *N x N*

» Μπορούμε να αποθηκεύουμε μόνο μη-μηδενικές τιμές και θέσεις

• Σε μη-γραμμικά προβλήματα, το **A** είναι προσωρινό και πρέπει να ανανεώνεται συστηματικά με κάποια επαναληπτική διαδικασία

»ίσως να μην είναι και τόσο σημαντικό η λύση του συστήματος να είναι πάρα πολύ “ακριβείς”

• Αυτό έχει ως αποτέλεσμα, οι άμεσες μέθοδοι να μην χρησιμοποιούνται πολύ συχνά σε προβλήματα CFD σήμερα

Επαναληπτικές μέθοδοι

- Συνήθως χρησιμοποιείται μια φιλοσοφία υπόθεσης και διόρθωσης
- Μία τυπική επαναληπτική μέθοδο είναι η Gauss-Seidel:

    »Εφαρμόζεται σε όλα τα σημεία του πεδίου

- Ανανέωση μέσω της σχέσης:

$$\varphi_P = \frac{a_E \varphi_E + a_W \varphi_W + b}{a_P}$$

» Κάθε πέρασμα (sweep) επαναλαμβάνεται για όλα τα σημεία έως ότου το κριτήριο σύγκλισης ικανοποιηθεί

» Σε κάθε πέρασμα, τα σημεία που έχει εφαρμοστεί η σχέση έχουν νέες τιμές, ενώ τα σημεία στα όποια δεν έχει εφαρμοστεί έχουν παλιές τιμές

Επαναληπτικές μέθοδοι (συνέχεια)

- Η μέθοδος Jacobi επίσης χρησιμοποιείται στην υπολογιστική ρευστομηχανική και είναι παρόμοια με τη μέθοδο Gauss-Seidel αλλά δεν χρησιμοποιεί τις πιο πρόσφατες τιμές
  - » Όλες οι τιμές ανανεώνονται ταυτόχρονα στο τέλος του περάσματος.
- Οι επαναληπτικές μέθοδοι δεν εγγυούνται σύγκλιση σε κάποια σταθερή λύση εκτός και αν το κριτήριο *Scarborough* ικανοποιείται*.*

Κριτήριο σύγκλισης Scarborough

• Το κριτήριο Scarborough καθορίζει ότι η σύγκλιση ενός επαναληπτικού σχήματος μπορεί να εγγυηθεί αν:

$$\frac{|a_E| + |a_W|}{|a_P|} \quad \leq 1 \qquad \text{Για όλα τα σημεία του πλέγματος}$$

$$< 1 \qquad \text{Σε ένα τουλάχιστον σημείο}$$

• Αυτό σημαίνει ότι οι συντελεστές του πίνακα πρέπει να έχουν διαγώνια υπεροχή *(diagonally dominant)*

Μέθοδο Gauss-Seidel

- Δεν υπάρχει ανάγκη για αποθήκευση του πίνακα συντελεστών

- Οι πράξεις ανά επανάληψη είναι ανάλογες με *O(N)*

- Στη περίπτωση που χρησιμοποιούνται μεγάλα υπολογιστικά πλέγματα ακόμη και όταν η σύγκλιση είναι δεδομένη συνήθως είναι πολύ αργή

- Παρακάτω στο μάθημα θα εξετάσουμε εναλλακτικές μεθόδους

Ακρίβεια (accuracy)

• Δουλεύοντας με τη μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών, γράφουμε:

Λάθος αποκοπής δεύτερης τάξης

$$\left(\frac{d^2\varphi}{dx^2}\right)_2 = \frac{\varphi_1 + \varphi_3 - 2\varphi_2}{\Delta x^2} + O\left((\Delta x)^2\right)$$

• Κάνοντας μισό το μήκος του πλέγματος μειώνουμε το λάθος τέσσερις φορές για ένα σχήμα διαφορών δεύτερης τάξης

• Δεν μπορούμε να προσδιορίσουμε ακριβώς ποιο το απόλυτο λάθος – το λάθος αποκοπής μας δίνει μόνο το ρυθμό της μείωσης του λάθους

Ακρίβεια (συνέχεια)

- Η τάξη του σχήματος διακριτοποίησης είναι *n όταν το λάθος αποκοπής είναι τάξης* $O(\Delta x^n)$

- Όταν περιλαμβάνεται παραπάνω από ένας όρος, η ολική τάξη της μεθόδου διακριτοποίησης είναι αυτή του όρου της μικρότερης τάξης.

- Η ακρίβεια είναι μια ιδιότητα του αριθμητικού σχήματος, δεν έχει σχέση με το τρόπο που θα οδηγηθούμε στη λύση.

Συνέπεια (consistency)

- Μία μέθοδο διακριτοποίησης είναι συνεπές όταν το λάθος αποκοπής μειώνεται καθώς $\Delta x \rightarrow 0$

- Αυτό δεν συμβαίνει πάντα: Μερικές φορές το λάθος αποκοπής είναι τάξης $O(\Delta x/\Delta t)$

- Η συνέπεια είναι μια ιδιότητα του αριθμητικού σχήματος, δεν έχει σχέση με το τρόπο που θα οδηγηθούμε στη λύση.

Σύγκλιση (Convergence)

- Χρησιμοποιούμε τον όρο σύγκλιση σε δύο περιπτώσεις

  » Σύγκλιση σε μια λύση ανεξάρτητη από το πλέγμα (mesh-independent). Δηλαδή με σταδιακή μείωση του μεγέθους των κελιών (mesh refinement)

  » Σύγκλιση για επαναληπτικής μεθόδου έως ώστε η τελική λύση να μην αλλάζει (ή να είναι ίδια με το κριτήριο σύγκλισης)

- Εδώ θα χρησιμοποιούμε τη δεύτερη έννοια

Ευστάθεια (stability)

- Είναι ιδιότητα που επηρεάζει το τρόπο που θα οδηγηθούμε στη λύση.

- Συνήθως χρησιμοποιείται για να χαρακτηρίσουμε μια επαναληπτική μέθοδο.

- Ανάλογα με τα χαρακτηριστικά του πίνακα συντελεστών A, διάφορα λάθη μπορούν να αποσβεσθούν ή να ενισχυθούν κατά τη διάρκεια μιας επανάληψης.

- Μια επαναληπτική μέθοδο είναι ασταθείς αν αποτύχει να δώσει μια λύση του συστήματος των διακριτών εξισώσεων.

Ευστάθεια (συνέχεια)

- Είναι επίσης συνηθισμένο να αναφερόμαστε και σε ευστάθεια χρονικά μεταβαλλόμενων μεθόδων

  »Ασταθές: όταν η επίλυση ενός χρονικά μεταβαλλόμενου προβλήματος σπάει (blows up)

- Η ανάλυση ευστάθειας κατά Von-Neumann (υπάρχουν και μερικές άλλες) μπορεί να καθορίσει εάν το γραμμικό σύστημα είναι σταθερό για διάφορες μεθόδους επαναληπτικές ή με χρονική επανάληψη

- Η ανάλυση ευστάθειας για προβλήματα μη-γραμμικά είναι δύσκολη και σε μεγάλο βαθμό δεν χρησιμοποιείται

  »Συνήθως χρησιμοποιούμε αρχικά δεδομένα από γραμμική ανάλυση και διαισθητικά τα διορθώνουμε

Επίλογος

• Σε αυτή τη διάλεξη ολοκληρώσαμε μία περίληψη σχετικά με την αριθμητική διακριτοποίηση και την διαδικασία επίλυσης

» Διακριτοποίηση του πεδίου ροής
» Διακριτοποίηση των εξισώσεων μεταφοράς
» Λύση του γραμμικού αλγεβρικού συστήματος
» Ιδιότητες διακριτοποίησης και δρόμους για την επίλυση
–Ακρίβεια, συνέπεια, σύγκλιση, ευστάθεια

• Στην επόμενη διάλεξη, θα δούμε πως διακριτοποιείται η εξίσωση διάχυσης με τη μέθοδο των πεπερασμένων όγκων