ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΤΜΗΜΑ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΥΔΡΑΥΛΙΚΗΣ ΚΑΙ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝΤΙΚΗΣ ΤΕΧΝΙΚΗΣ

Διάλεξη 12: Σχήματα ανώτερης τάξης

Χειμερινό εξάμηνο 2008

Προηγούμενη παρουσίαση...

- Εξετάσαμε μερικά σχήματα ανώτερης τάξης για την μόνιμη εξίσωση συναγωγής που βασίζονται σε σειρές Taylor

- Είδαμε σχήματα που εισάγουν τεχνητή διάχυση

Οργάνωση παρουσίασης

Θα αρχίσουμε να δουλεύουμε πιθανούς τρόπους για τον περιορισμό των χωρικών ανωμαλιών.

Θα δούμε:

Τη μονοτονικότητα και θέματα που σχετίζονται με τη μονοτονικότητα

- Το θεώρημα του Godunov
- Τη συνολική διακύμανση και θέματα που σχετίζονται με τον περιορισμό της συνολικής διακύμανσης (total variation diminishing, TVD)
- Μη γραμμικά σχήματα που χρησιμοποιούν limiters

Μονοτονικότητα

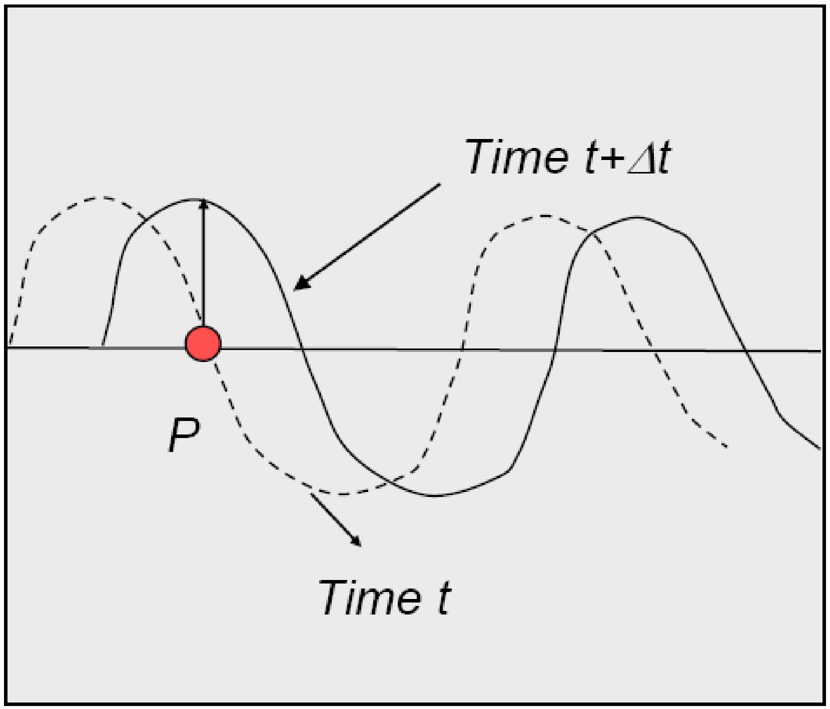
• Για την ελλειπτική εξίσωση διάχυσης και για την παραβολική μη-μόνιμη εξίσωση διάχυσης χωρίς πηγές το διακριτό σύστημα των εξισώσεων μας δίνει:

$$a_P = \sum_{nb} a_{nb}; \quad a_{nb} > 0$$

• Αυτό κάνει σίγουρο ότι η λύση είναι φραγμένη

• Για υπερβολικές εξισώσεις,ούτος ή άλλως το φράξιμο δεν είναι χρήσιμη σκέψη

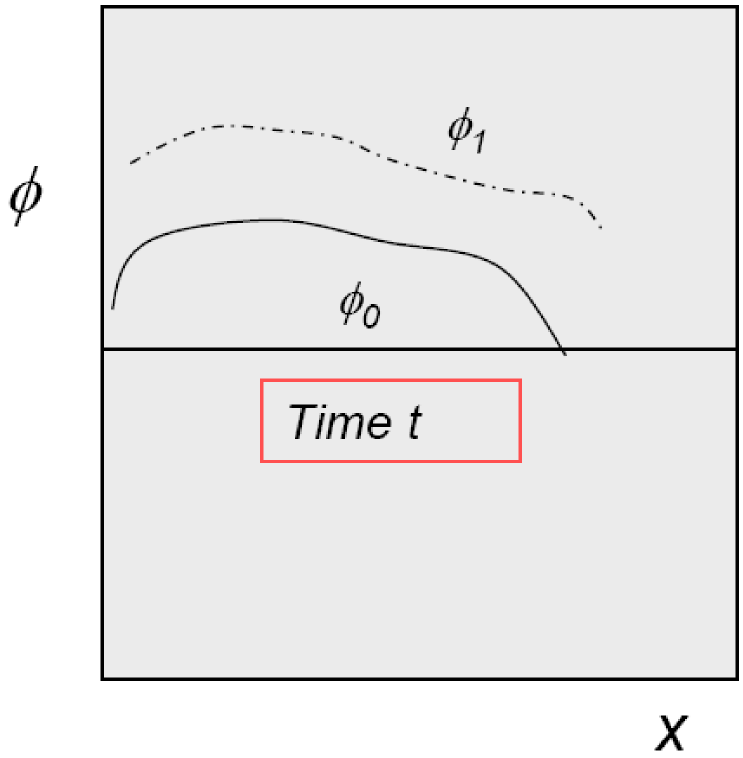
Μετάδοση κύματος (υπερβολική συνάρτηση)

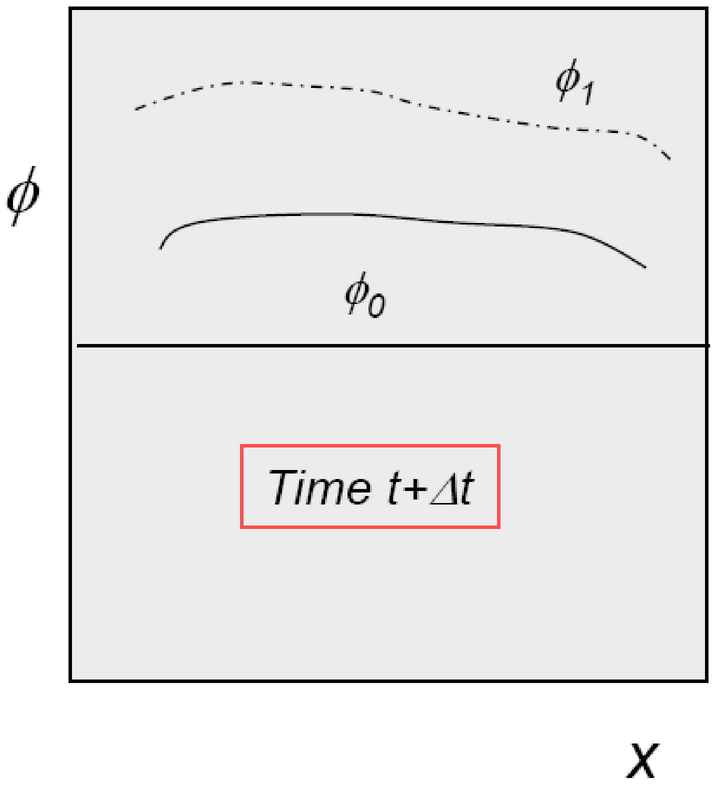


• Καθώς το κύμα περνάει από το σημείο P, η τιμή του μπορεί να είναι μεγαλύτερη από ότι σε παλιότερες στιγμές και επίσης να είναι μεγαλύτερη εκείνη την στιγμή από τις τιμές των γειτόνων του

• Πρέπει να σκεφτούμε για το ποιες ιδιότητες της λύσης θέλουμε να προσδώσουμε στο αριθμητικό μας σχήμα

Μονοτονικότητα

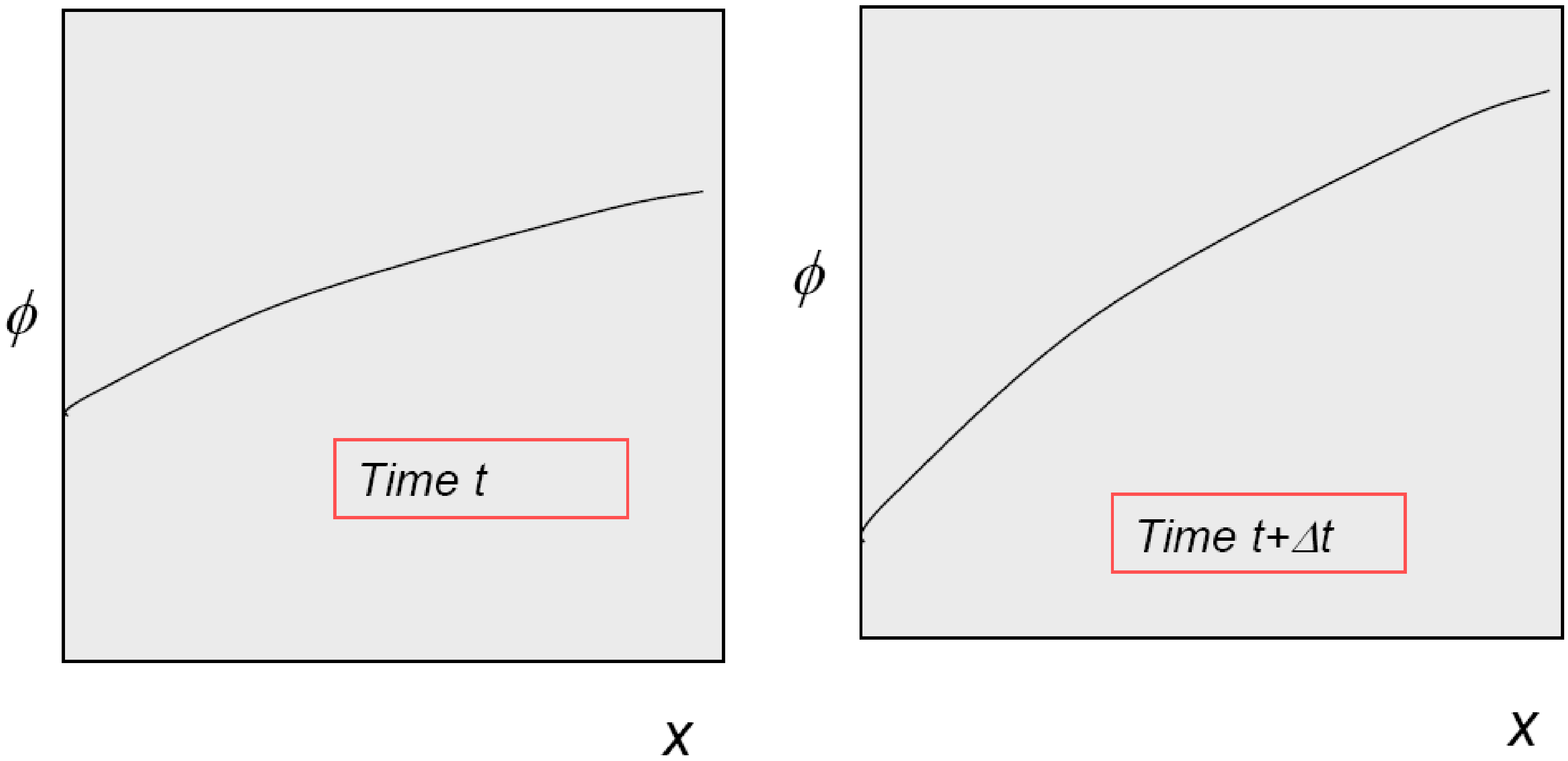




$$\phi_0(x,t) > \phi_1(x,t)$$

$$\phi_0(x,t+\Delta t) > \phi_1(x,t+\Delta t)$$

Διατήρηση μονοτονικότητας



Αν η φ(x,t) είναι μονοτονική στο x, τότε φ(x,t+Δt) είναι επίσης μονοτονική στο x
Δεν δημιουργείτε κανένα νέο μέγιστο ή ελάχιστο

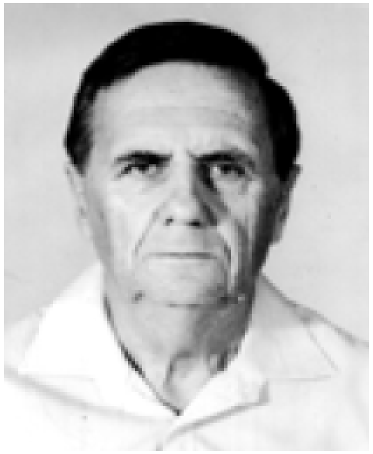
Θεώρημα του Godunov

Ένα συνεπές (consistent) γραμμικό αριθμητικό σχήμα για την λύση της εξίσωσης διάδοσης κύματος που διατηρεί της μονοτονικότητα μπορεί να έχει το πολύ πρώτης τάξης ακρίβεια.

Η ακρίβεια μπορεί να μεγαλώσει ωστόσο σε μη-γραμμικά σχήματα – πρέπει να κάνουμε τους συντελεστές συναρτήσεις του φ έστω και αν το πρόβλημα που λύνουμε είναι γραμμικό

Sergei K. Godunov

Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk, Russia



Συνολική διακύμανση

• Για ένα σύστημα υπερβολικών εξισώσεων, μπορεί να δειχθεί ότι η συνολική διακύμανση (Total Variation, TV) :

$$TV(\phi) = \int \left| \frac{\partial \phi}{\partial x} \right| dx$$

δεν μεγαλώνει στο χρόνο.

• Για ένα κινούμενο κύμα, TV(φ) μπορεί να παραμείνει σταθερή σε έναν άπειρο χώρο (μεγάλες διαστάσεις, χωρίς οριακές συνθήκες) όταν δεν υπάρχουν όροι διάχυσης και παραγωγής

• Σε ένα φυσικό σύστημα με τη παρουσία της διάχυσης, (και για μηδενική παραγωγή της ποσότητας φ) το TV δεν μπορεί να αυξηθεί

Συνολική διακύμανση

- Η ποσότητα TV(φ) είναι ένα μέτρο των ανωμαλιών του πεδίου

$$TV(\phi) = \int \left| \frac{\partial \phi}{\partial x} \right| dx$$

- Ένα ημιτονοειδές κύμα υψηλής συχνότητας έχει περισσότερη συνολική διακύμανση από ότι ένα κύμα μικρής συχνότητας

- Λόγω της διακριτοποίησης έχουμε ότι:

$$TV = \sum |\phi_P - \phi_W|$$

Σχήματα ελάττωσης της συνολικής διακύμανσης

• Ένα αριθμητικό σχήμα ονομάζεται σχήμα ελάττωσης της συνολικής διακύμανσης (Total Variational Diminishing scheme , TVD) εάν

$$TV(\phi) \leq TV(\phi^0)$$

Τιμή στο τρέχον χρόνο

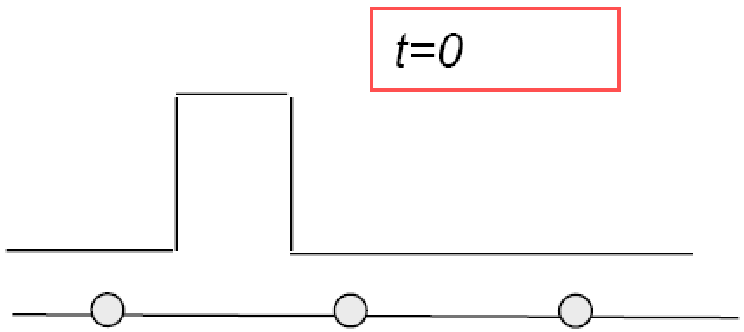
Τιμή στο προηγούμενο χρόνο

• Μπορεί να δειχθεί επίσης ότι ένα σχήμα TVD διατηρεί την μονοτονικότητα

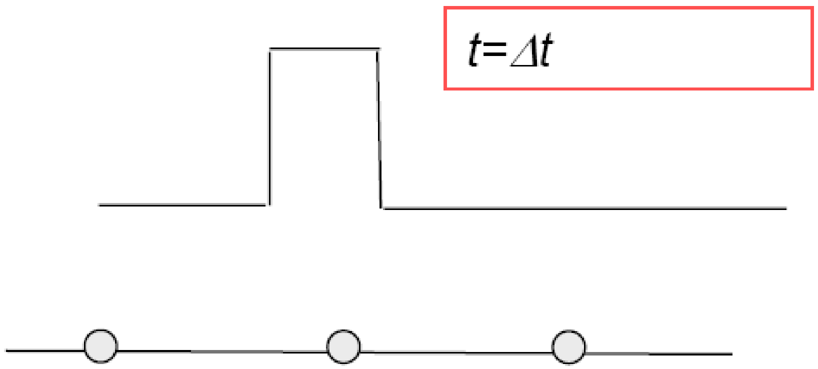
Λάθη του σχήματος TVD

• Αν η αναλυτική λύση είναι TVD, δεν είναι σίγουρο ότι και η αριθμητική λύση (λόγο της διακριτοποίησης) θα είναι.

• Ας υποθέσουμε ένα κύμα που περνά από το πλέγμα



TV =0



TV > 0

• Ένα σχήμα που είναι αυστηρά TVD μπορεί να ψαλιδίσει την μορφή του κύματος

Σχήματα τοπικού ελέγχου, LED

- Η συνθήκη TVD μπορεί μερικές φορές να γίνει ασθενής

  » Εφόσον μόνο η συνολική διακύμανση μειώνεται, είναι δυνατόν να δημιουργηθούν μικρές τοπικές ασυνέχειες και η συνολική διακύμανση πάλι να μειώνεται

- Μια άλλη χρήσιμη ιδέα (αν και πιο αυστηρή) είναι αυτή την μείωσης κάθε τοπικής μέγιστης διακύμανσης (local extremum diminishing, LED)

  » Δεν δημιουργούνται καινούργια μέγιστα
  » Δεν ενισχύονται ήδη υπάρχοντα μέγιστα

- Μπορεί να δειχθεί ότι τα σχήματα LED είναι TVD

- Τα σχήματα LED μπορεί να υποφέρουν από έχουν λάθη λόγο ψαλιδισμού

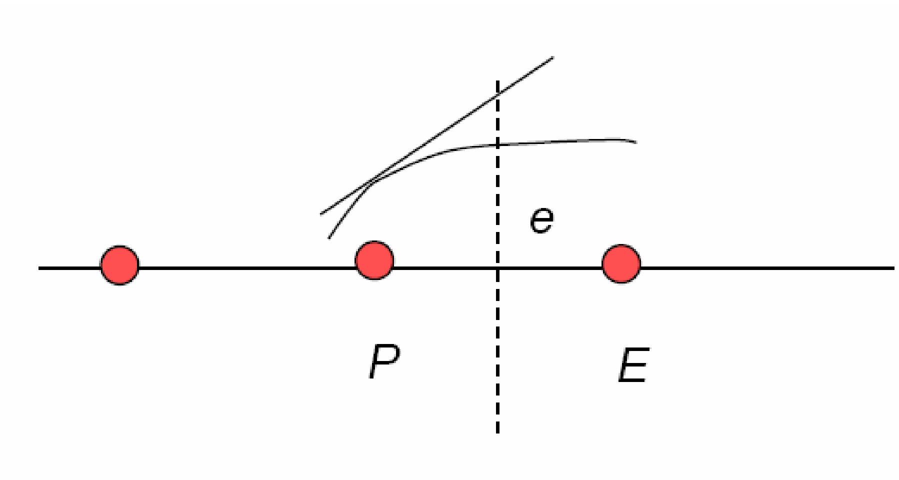
Σχήματα τοπικού ελέγχου, LED

• Έχει δημιουργηθεί μια μεγάλη οικογένεια αριθμητικών σχημάτων που είναι LED

• Είναι μη-γραμμικά σχήματα και χρησιμοποιούν limiters

Ένα σχήμα δεύτερης τάξης μπορεί να έχει τιμές στην πλευρά e από τη σχέση:

$$\phi_e = \phi_P + \frac{\Delta x}{2}\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_P$$



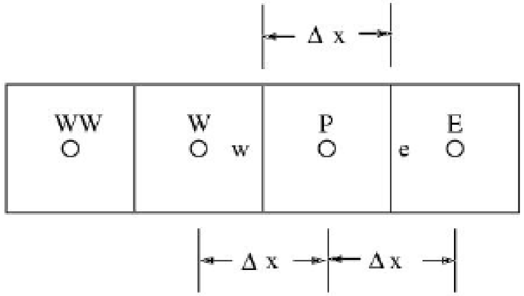
Αυτό μπορεί να προκαλέσει μια τοπική διαταραχή

Limiters

• Για να αποτρέψουμε την δημιουργία τοπικών διαταραχών, εισάγουμε μια συνάρτηση Ψ(r) σχεδιασμένη για να εγγυείται λύσεις χωρίς αστάθειες

• Έτσι, η τιμή στη πλευρά φ_e μπορεί να βρεθεί από τη σχέση:

$$\phi_e = \phi_P + \Psi(r_e)\frac{\Delta x}{2}\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_P$$



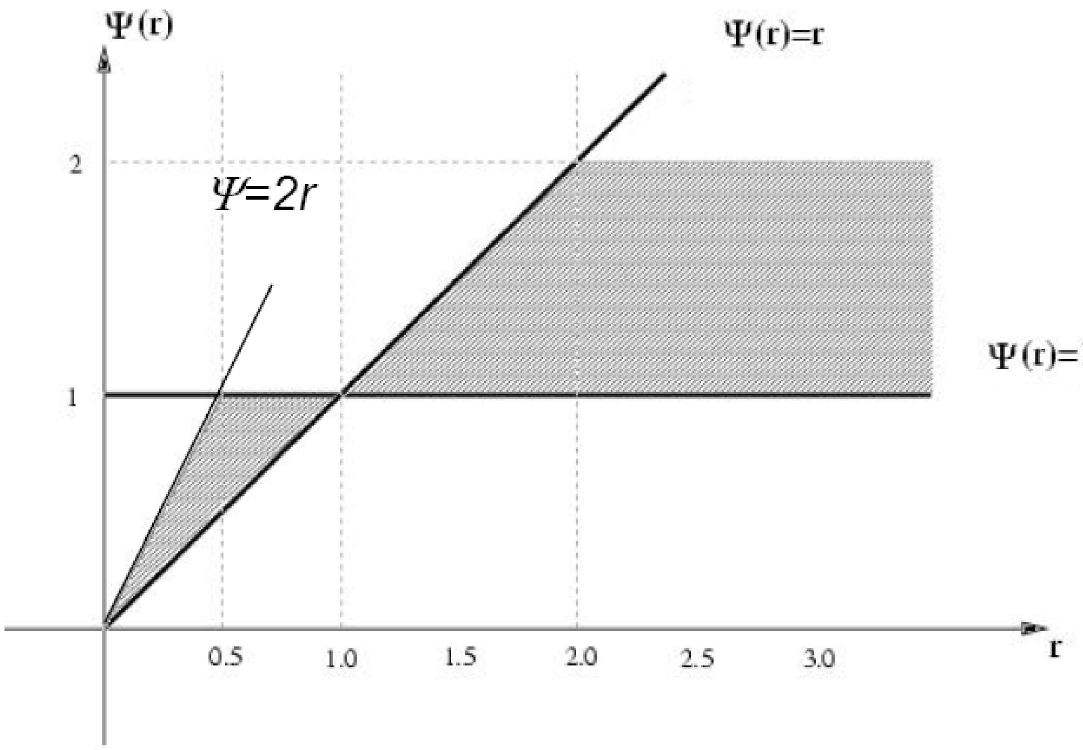
• Χρησιμοποιώντας για παράδειγμα μια απάνεμη διακριτοποίηση για τη κλίση έχουμε:

$$\phi_e = \phi_P + \Psi(r_e)\frac{\Delta x}{2}\frac{(\phi_P - \phi_W)}{\Delta x} \qquad r_e = \frac{\phi_E - \phi_P}{\phi_P - \phi_W}$$

Εύρος της συνάρτησης Limiter για 2η τάξης σχήματα

• Μπορούμε να δείξουμε ότι η συνάρτηση του limiter *Ψ(r)* πρέπει να έχει τιμές στην γρυ περιοχή για ένα σχήμα δεύτερη τάξης

• Είναι επίσης καλό να περνάει από το σημείο (1,1) όπως θα δούμε παρακάτω

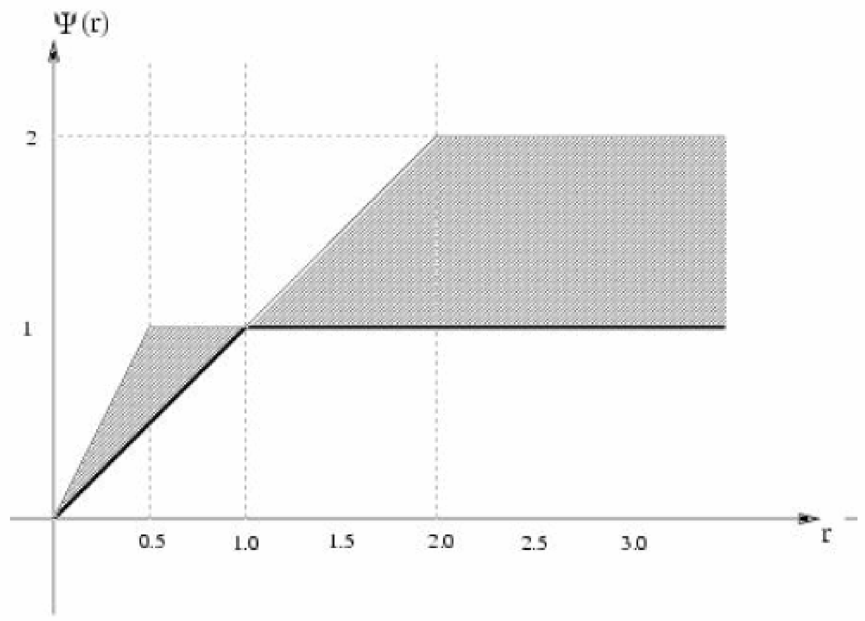


$\Psi(r) = 0$ for $r<0$

Συνάρτηση Limiter Minmod

• Η συνάρτηση Limiter Minmod ορίζεται ως εξής:

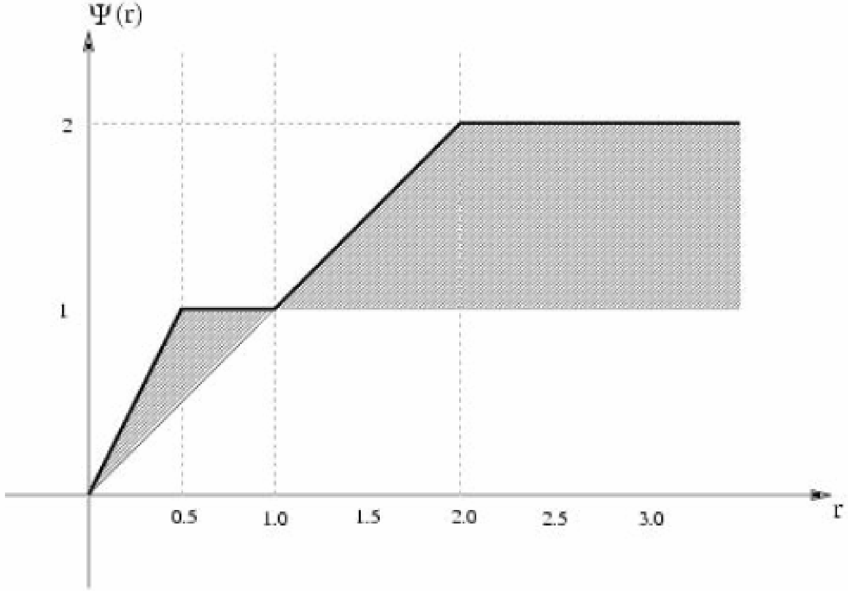
$$\Psi(r) \quad = \min(r, 1) \quad \text{if } r > 0$$
$$\Psi(r) \quad = 0 \quad \text{if } r \leq 0$$



Συνάρτηση Limiter superbee

- Η συνάρτηση Limiter superbee ορίζεται ως εξής:

$$\Psi(r) = \max[0, \min(2r, 1), \min(r, 2)]$$



Ομαλές συναρτήσεις Limiter

• Θέματα που σχετίζονται με τη σύγκλιση μπορεί να γίνουν προβληματικά όταν χρησιμοποιούμε επαναλυπτικούς επιλυτές εξαιτίας απότομων μεταβολών της κλίσης της συνάρτησης Ψ(r) για τους limiters τύπου minmod και superbee

• Έχους προταθεί στη βιβλιογραφία διαφορές άλλες πιο ομαλές συναρτήσεις όπως:

- Οι limiters τύπου Val Leer και Van Albada
- Οι τετραγωνικοί και κυβικοί limiters

Limiter τύπου Van Leer και Van Albada

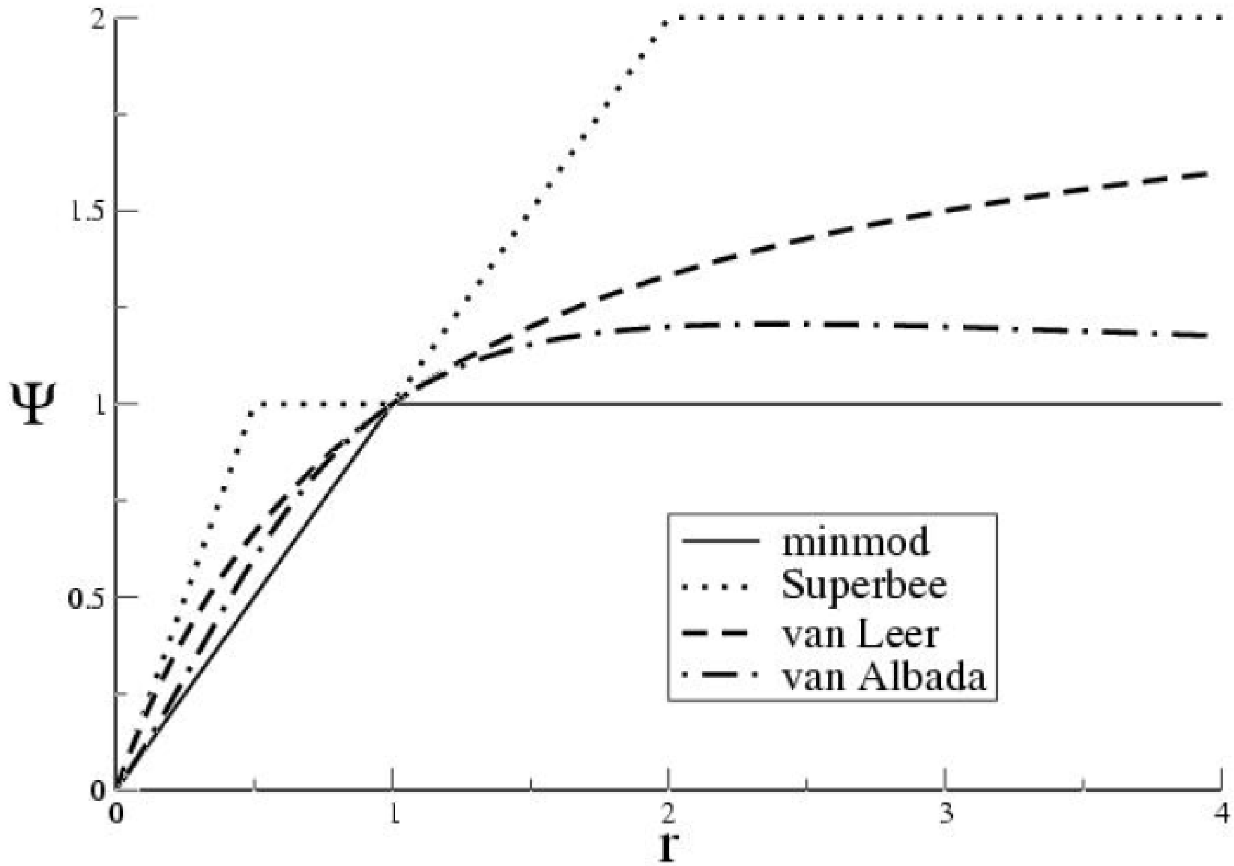
- Ο limiter τύπου Van Leer δίνεται από τη σχέση:

$$\Psi(r) = \frac{2r}{1+r}$$

- Ο limiter τύπου Van Albada δίνεται από τη σχέση :

$$\Psi(r) = \frac{r^2+r}{1+r^2}$$

Limiter τύπου Van Leer και Van Albada



Τετραγωνικοί και κυβικοί limiters

- Πρόκειται για προσεγγίσεις του limiter minmod
- Quadratic limiter:

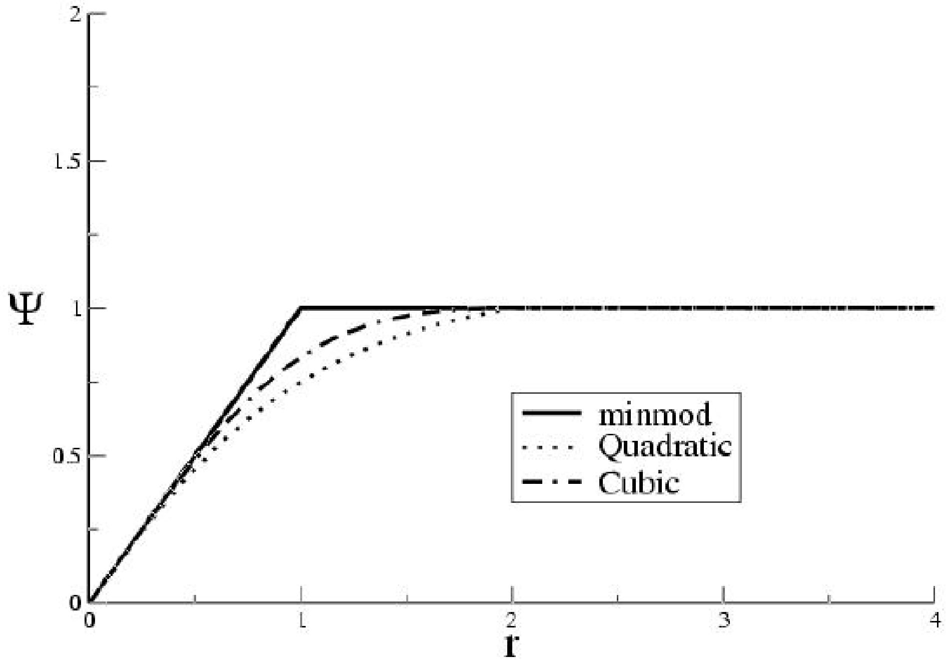
$$\begin{aligned}\Psi(r) &= \frac{2r+r^2}{2+r+r^2} \qquad r \le 2 \\ &= 1 \qquad r > 2\end{aligned}$$

- Cubic limiter

$$\begin{aligned}\Psi(r) &= \frac{4r+r^3}{4+r^2+r^3} \qquad r \le 2 \\ &= 1 \qquad r > 2\end{aligned}$$

- Εισάγει διάχυση, όπως και ο limiter minmod
  - » Υπάρχει μια ασυνέχεια στη κλίση για r = 2
  - » Όχι τόσο απότομος όσο ο minmod για r = 1

Τετραγωνικοί και κυβικοί limiters



Επειδή ο limiter δεν ακολουθεί ακριβώς την περιοχή της ακρίβεια 2ης τάξης, η συνολική ακρίβεια είναι κάτι λιγότερο από δεύτερης τάξης για μερικές τιμές του r

Επίλογος

Στη παρούσα διάλεξη είδαμε:

- Θέματα που σχετίζονται με την μονοτονία και την διατήρησή της
- Τα σχήματα TVD, LED
- Σχήματα που χρησιμοποιούν μη γραμμικούς limiters που είναι LED, και έχουν ακρίβεια δεύτερης τάξης