Διάλεξη 10: Συναγωγή και διάχυση (συνέχεια)

Χειμερινό εξάμηνο 2008

Προηγούμενη παρουσίαση...

- Ολοκληρώσαμε την συζήτηση για τα σχήματα UDS/CDS
- Εξετάσαμε την ακρίβεια των σχημάτων UDS/CDS
- Είδαμε την έννοια της ψευτοδιάχυσης

Οργάνωση παρουσίασης

- Θα εξετάσουμε μερικά σχήματα πρώτης τάξης που στηρίζονται στην ακριβείς λύση της εξίσωσης αγωγής-συναγωγής
  - » Εκθετικό σχήμα
  - » Υβριδικό σχήμα
  - » Σχήμα Power-law

- Θα δούμε την μη-μόνιμη εξίσωση συναγωγής για να καταλάβουμε την σημασία της διάχυσης και της διασποράς

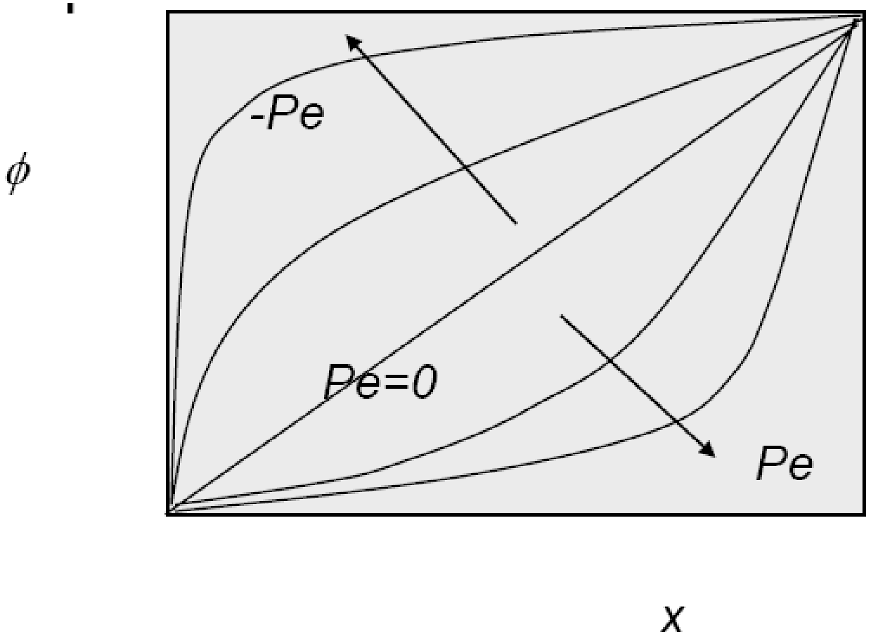
Έστω η μονοδιάστατη εξίσωση αγωγής-συναγωγής:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u \phi) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x}\right) = 0$$

$$\begin{aligned} \phi &= \phi_0 \quad \mathrm{at x} = 0 \\ \phi &= \phi_L \quad \mathrm{at x} = \mathrm{L} \end{aligned}$$

$$\frac{\phi - \phi_0}{\phi_L - \phi_0} = \frac{exp((Pe)x/L) - 1}{exp(Pe) - 1}$$

$$Pe = \frac{\rho u L}{\Gamma}$$



Εκθετικό σχήμα

• Χρησιμοποιώ την ακριβής λύση σε μία διάσταση ως υπόθεση για το προφίλ της ποσότητας (όπως έχω χρησιμοποιήσει και το γραμμικό προφίλ) και προχωρώ στην διακριτοποίηση

• Αν θεωρήσω την εξίσωση αγωγής-συναγωγής:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u \phi) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x}\right) = S$$

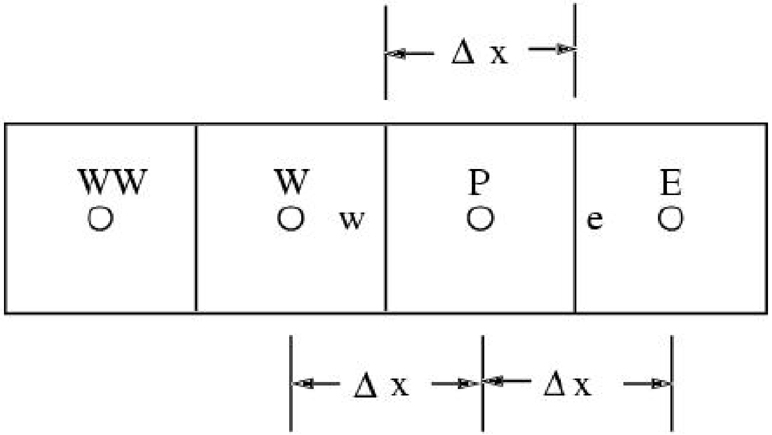
• Ολοκληρώνοντας στον όγκο ελέγχου:

$$\mathbf{J}_e \cdot \mathbf{A}_e + \mathbf{J}_w \cdot \mathbf{A}_w = \left(S_C + S_P \phi_P\right) \Delta \mathcal{V}_P$$

Εκθετικό σχήμα (συνέχεια)

• Έχοντας τα διανύσματα των πλευρών

$$\mathbf{A}_e = \mathbf{i}$$
$$\mathbf{A}_w = -\mathbf{i}$$



• και πολλαπλασιάζοντας με την ροή:

$$\mathbf{J}_e \cdot \mathbf{A}_e = (\rho u \phi)_e - \Gamma_e \left(\frac{d\phi}{dx}\right)_e$$
$$\mathbf{J}_w \cdot \mathbf{A}_w = -(\rho u \phi)_w + \Gamma_w \left(\frac{d\phi}{dx}\right)_w$$

• Εκφράζουμε τους όρους συναγωγής και αγωγής με βάση την ακριβείς λύση:

$$\mathbf{J}_e \cdot \mathbf{A}_e = F_e \left(\phi_P + \frac{\phi_P - \phi_E}{exp(Pe_e) - 1}\right)$$

Εκθετικό σχήμα : Διακριτές ιδιότητες

$$a_P\phi_P = a_E\phi_E + a_W\phi_W + b$$

$$\begin{aligned} a_E &= \frac{F_e}{exp(F_e/D_e)-1} \\ a_W &= \frac{F_w exp(F_w/D_w)}{exp(F_w/D_w)-1} \\ a_P &= a_E + a_W - S_P\Delta\mathcal{V}_P + (F_e - F_w) \\ b &= S_C\Delta\mathcal{V}_P \end{aligned}$$

- Και οι δύο όροι, αγωγής και συναγωγής, έχουν προσδιοριστεί από την ακριβείς λύση

- Αν S = 0, μπορούμε να έχουμε την ακριβείς λύση σε προβλήματα μίας διάστασης

- Η λύση δεν μπορεί να είναι ακριβείς στη περίπτωση όπου το S είναι διάφορο από το μηδέν, για πολυδιάστατα προβλήματα…

- Η διακριτοποίηση οδηγεί σε φραγμένες λύσεις με κυρίαρχη διαγώνιο

- Είναι μόνο πρώτης τάξης ακρίβειας

Υβριδικό σχήμα διακριτοποίησης

- Για τον συντελεστή του a_E στο υβριδικό σχήμα

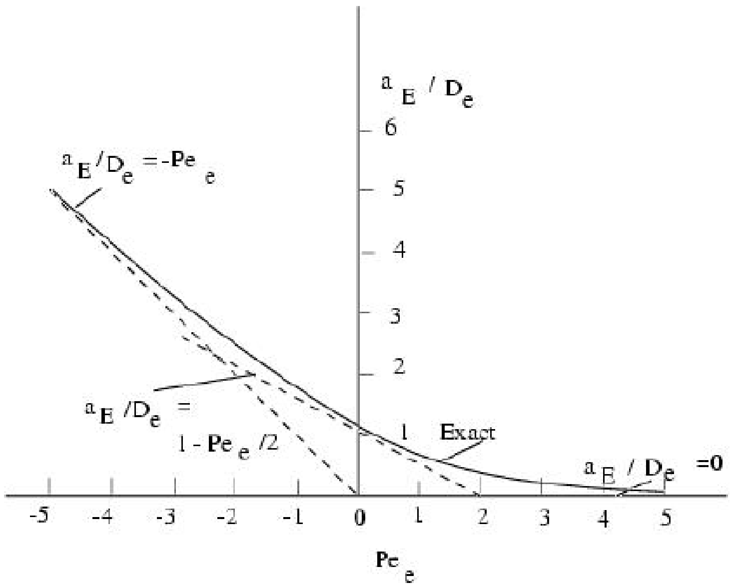
$$\frac{a_E}{D_e} = \frac{P_e}{exp(Pe_e) - 1}$$

- Υπάρχουν όρια σε σχέση με τον αριθμό Pe:

$$\frac{a_E}{D_e} \rightarrow 0 \quad \text{for } Pe_e \rightarrow \infty$$

$$\frac{a_E}{D_e} \rightarrow -Pe_e \quad \text{for } Pe_e \rightarrow -\infty$$

$$\frac{a_E}{D_e} = 1 - \frac{Pe_e}{2} \quad \text{at } Pe_e = 0$$



Προσεγγίσεις στο υβριδικό σχήμα

• Ο υπολογισμός των εκθετικών συναρτήσεων στοιχίζει πολύ (υπολογιστικός χρόνος)

• Συνήθως κάνουμε προσεγγίσεις στο εκθετικό προφίλ για να ελαττώσουμε το κόστος.

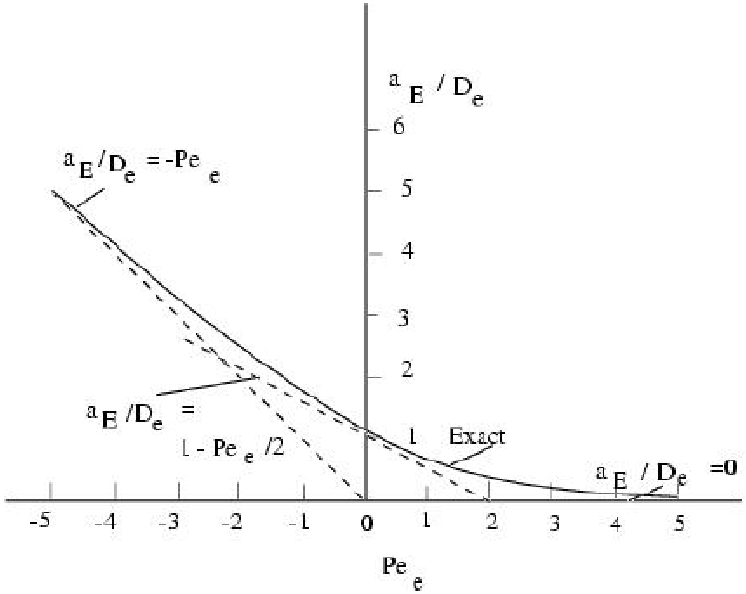
» Σχήμα υβριδικών διαφορών
» Σχήμα Power-law

• Και οι δύο προσεγγίσεις είναι μόνο πρώτης τάξης ακρίβειας

Υβριδικό σχήμα (συνέχεια)

Αντί να χρησιμοποιούμε την ακριβείς καμπύλη για να προσεγγίζουμε το a_E/De, χρησιμοποιούμε τρεις εφαπτόμενες:

$$
\begin{aligned}
\frac{a_E}{D_e} &= 0 \quad \text{for } Pe_e > 2 \\
\frac{a_E}{D_e} &= 1 - \frac{Pe_e}{2} \quad \text{for } -2 \geq Pe_e \leq 2 \\
\frac{a_E}{D_e} &= -Pe_e \quad \text{for } Pe_e < -2
\end{aligned}
$$



Ομοίως χειριζόμαστε και τους άλλους όρους

Υβριδικό σχήμα (συνέχεια)

$$a_P\phi_P = a_E\phi_E + a_W\phi_W + b$$

$$\begin{aligned} a_E &= Max[-F_e, D_e - \frac{F_e}{2}, 0] \\ a_W &= Max[F_w, D_w + \frac{F_w}{2}, 0] \\ a_P &= a_E + a_W - S_P\Delta\mathcal{V}_P + (F_e - F_w) \\ b &= S_C\Delta\mathcal{V}_P \end{aligned}$$

- Υπάρχει εγγύηση ότι η λύση θα είναι φραγμένη
- Το κριτήριο Scarborough ικανοποιείτε
- Η ακρίβεια είναι τάξης *O(Δx)*

Το σχήμα Power-Law

- Εφαρμόζει προσέγγιση πολυωνύμου πέμπτης τάξης

$$\frac{a_E}{D_e} = Max[0, \left(1 - \frac{0.1|F_e|}{D_e}\right)^5] + Max[0, -F_e]$$

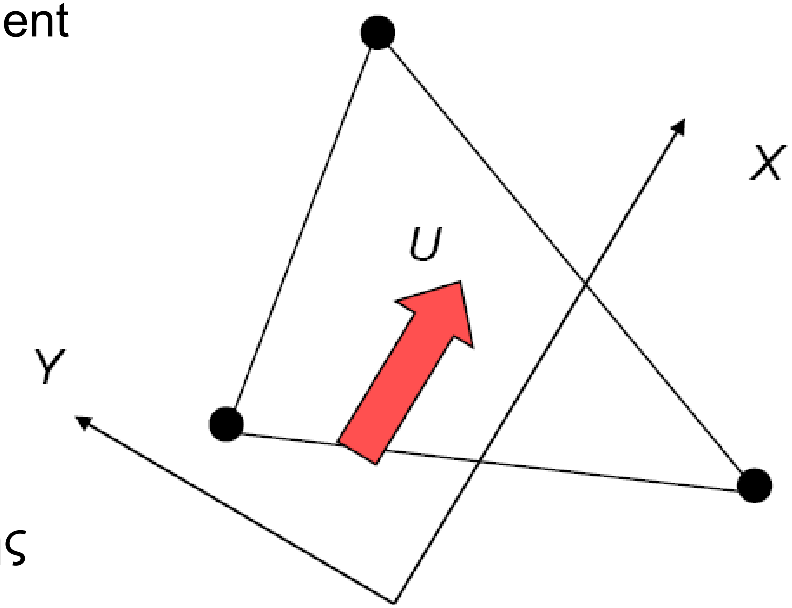
- Χρησιμοποιεί παρόμοια προσέγγιση και για τους άλλους συντελεστές
- Το σχήμα είναι φραγμένο και ικανοποιεί το κριτήριο Scarborough
- Έχει ακρίβεια τάξης *O(Δx)*

Σχήματα για προβλήματα πολλών διαστάσεων

- Οι αναλυτικές λύσεις έχουν χρησιμοποιηθεί ως προσεγγίσεις του προφίλ σε προβλήματα πολλών διαστάσεων

- Εκεί έχει στηριχθεί και η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων με βάση τους όγκους ελέγχου (Control volume-based finite element method, Baliga and Patankar(1983))

$$\phi = A\exp(\rho UX / \Gamma) + BY + C$$



- Αυτή η σχέση δίνει την λύση της εξίσωσης συναγωγής-αγωγής σε δύο διαστάσεις

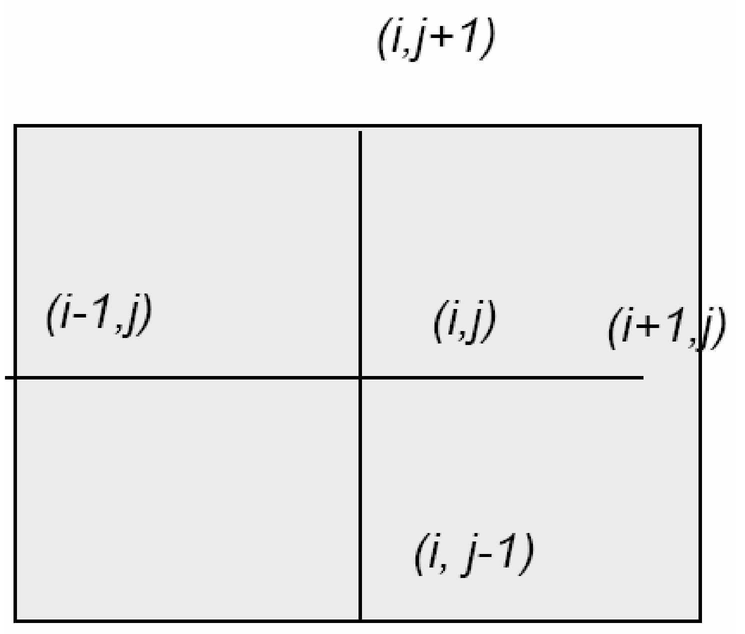
Σχήματα για προβλήματα πολλών διαστάσεων

• Σχήμα πεπερασμένο αναλυτικό (Finite analytic scheme, Chen and Li, 1979)

• Γράφουμε την εξίσωση διάχυσης σε κάθε ‘στοιχείο’ σε δύο διαστάσεις με όρο πηγής:

$$u_{ij}\frac{\partial C}{\partial x}+v_{ij}\frac{\partial C}{\partial y}=D_{xij}\frac{\partial^2 C}{\partial^2 x}+D_{yij}\frac{\partial^2 C}{\partial^2 y}-\lambda_{ij}C+S_{ij}$$

$x_{i-1} < x < x_{i+1}$ και $x_{j-1} < y < y_{j+1}$.



• Αναπτύσσουμε τους συντελεστές με βάση τις τιμές στα (i,j)

• Βρίσκουμε την αναλυτική λύση χρησιμοποιώντας διαχωρισμό μεταβλητών

• Χρησιμοποιούμε τις ακριβείς λύσεις για τις προσεγγίσεις στα προφίλ της μεταβλητής

Εξίσωση μη μόνιμης συναγωγής

- Για απλότητα θα χρησιμοποιήσουμε την γραμμική εξίσωση κύματος:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial u\phi}{\partial x} = 0$$

Εξίσωση αγωγής-συναγωγής με Γ=*0,* ρ=*1 και u=σταθερό*

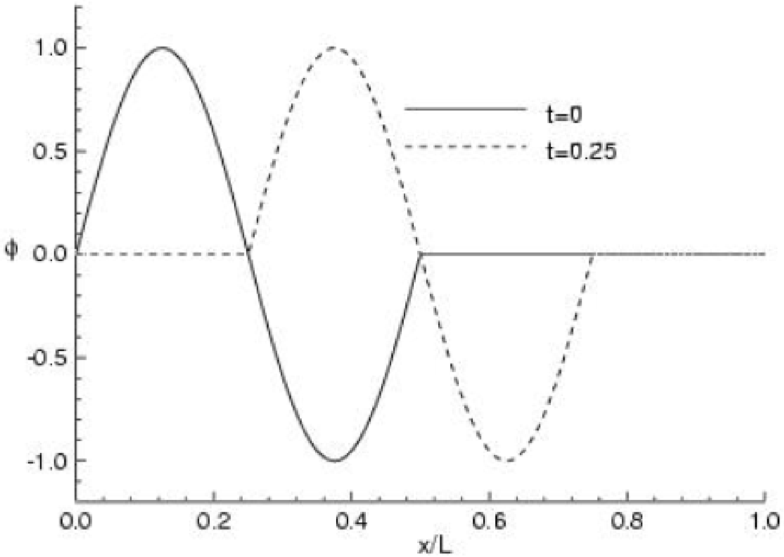
- Υποθέτουμε ότι το υπολογιστικό πεδίο είναι μονοδιάστατο και έχει μήκος L=1.
- Αρχικές συνθήκες: $\phi(x,0) = \phi_0(x)$
- Λύση:

$$\phi(x,t) = \phi_0(x - ut)$$

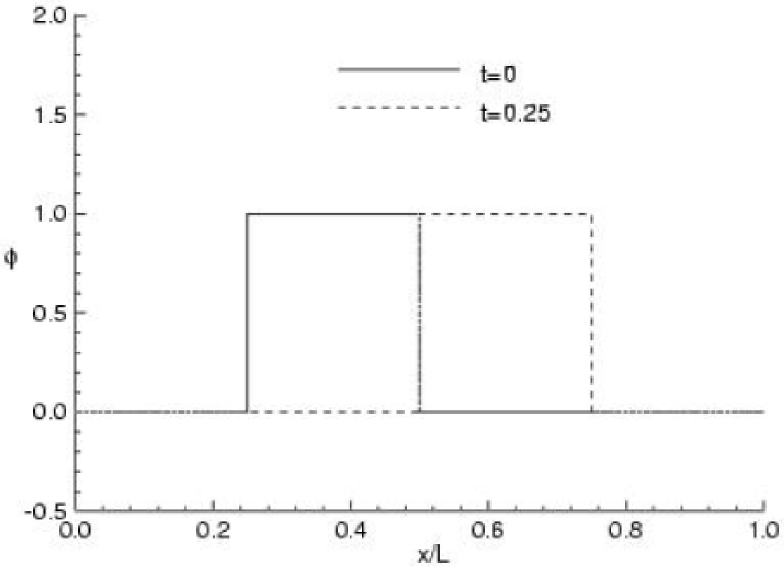
Κινούμενο κύμα

- Πόσο καλά μπορεί το αριθμητικό μας σχήμα να βρει τη λύση;

Μορφές κυμάτων



Ημιτονοειδές κύμα

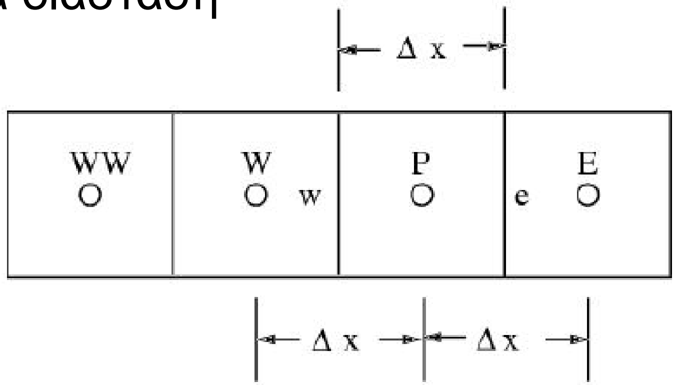


Τετραγωνικό κύμα

Για u>0, το κύμα μετατοπίζεται προς τα δεξιά κατά (ut) σε χρόνο t. Για u=1 και t=0.25, η μετατόπιση είναι 0.25 μονάδες

Ρητό σχήμα κεντρικών διαφορών

- Αν υποθέσουμε ένα ομοιόμορφο πλέγμα σε μία διάσταση



- Ολοκληρώνουμε στον όγκο ελέγχου:

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)_P \Delta x + (u_e\phi_e - u_w\phi_w) = 0$$

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)_P + \frac{u}{\Delta x}(\phi_e - \phi_w) = 0$$

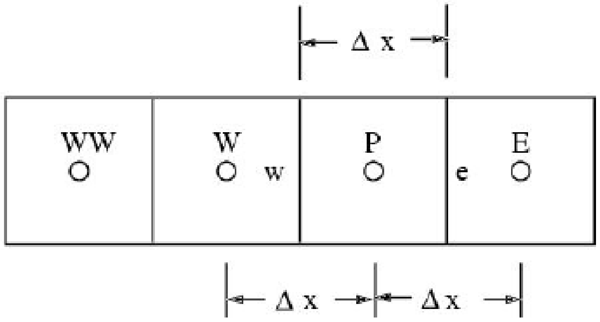
$$\frac{\phi_P - \phi_P^0}{\Delta t} + u\frac{(\phi_E^0 - \phi_W^0)}{2\Delta x} = 0$$

Όροι συναγωγής
στο παλιό χρόνο

- Μπορούμε να δείξουμε ότι έχει ακρίβεια τάξης *O(Δx*^{2}*, Δt)*

- Σταθερό χωρίς περιορισμούς – όχι εύχρηστο

Άρητο σχήμα κεντρικών διαφορών



• Ολοκληρώνουμε στον όγκο ελέγχου

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)_P + \frac{u}{\Delta x}(\phi_e - \phi_w) = 0$$

$$\frac{\phi_P - \phi_P^0}{\Delta t} + u\frac{(\phi_E - \phi_W)}{2\Delta x} = 0$$

Όροι συναγωγής
στο νέο χρόνο

• Μπορούμε να δείξουμε ότι έχει ακρίβεια τάξης $O(\Delta x^2, \Delta t)$

• Είναι πάντα σταθερό

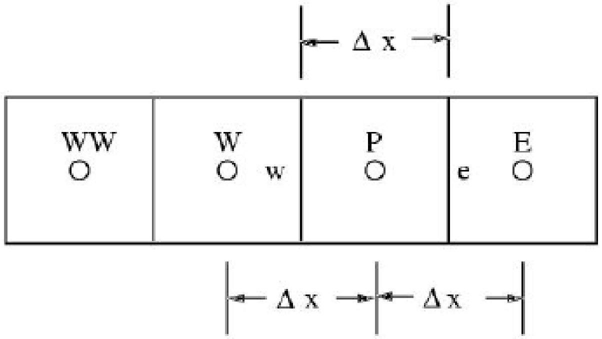
• Δεν υπάρχει εγγύηση ότι είναι φραγμένο επειδή τα πρόσημα των γειτονικών σημείων είναι μικτά

Ρητό σχήμα απάνεμων διαφορών

- Ολοκληρώνουμε στον όγκο ελέγχου

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)_P + \frac{u}{\Delta x}(\phi_e - \phi_w) = 0$$

$$\frac{\phi_P - \phi_P^0}{\Delta t} + u\frac{(\phi_P^0 - \phi_W^0)}{\Delta x} = 0$$



Συνθήκη CFL

- Η λύση είναι σταθερή για: $0 \le u\frac{\Delta t}{\Delta x} \le 1$

- Ορίζουμε τον αριθμό Courant v= uΔt/Δx

Μερικές φορές καλείται αριθμός CFL από τους Courant, Friedrichs και Lewy

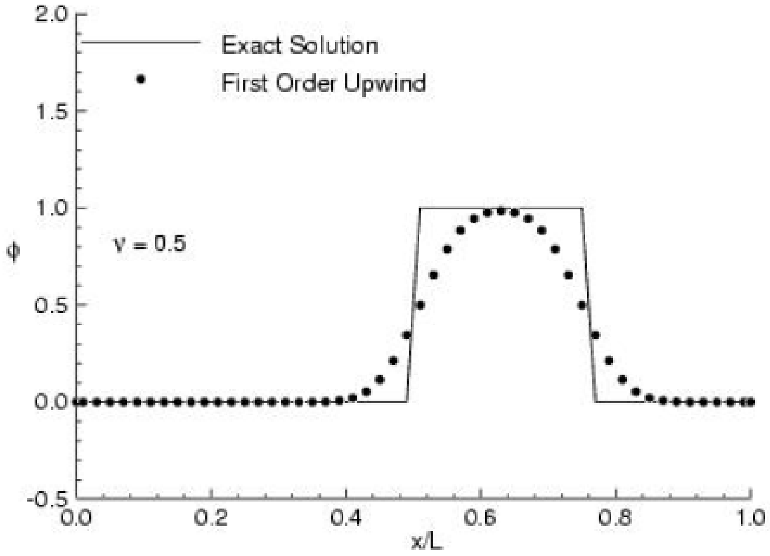
Ρητό σχήμα απάνεμων διαφορών (συνέχεια)

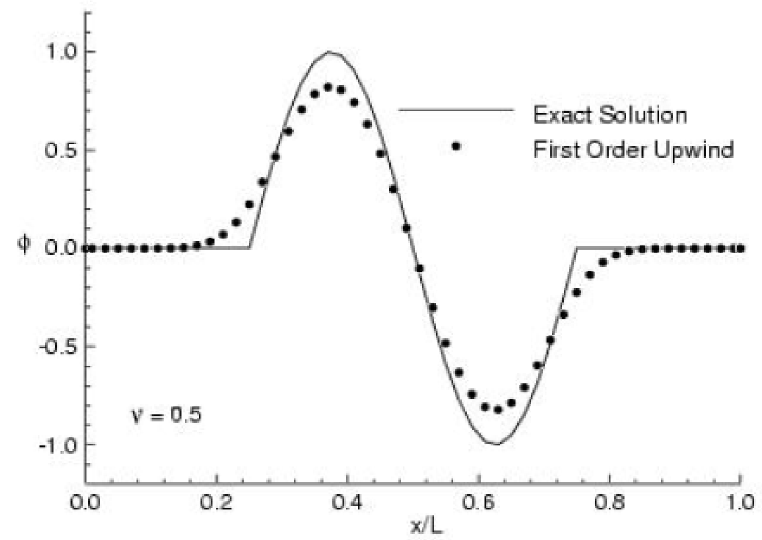
- Η διακριτή εξίσωση μπορεί να ξαναγραφτεί ως:

$$\phi_P = (1-\nu)\phi_P^0 + \nu\phi_W$$

- Η λύση είναι φραγμένη πάντα όταν ν<1

Ρητό σχήμα απάνεμων διαφορών (συνέχεια)





Αρχίζουμε με ημιτονοειδές ή τετραγωνικό κύμα σε χρόνο t = 0. Επιλέγουμε πλέγμα 50 κελιών και χρονικό βήμα τέτοιο ώστε να ισχύει ν=0.5. Σχεδιάζουμε το αποτέλεσμα μετά από 25 χρονικά βήματα.

Συζήτηση

- Η λύση που υπολογίζουμε μετακινείται προς τα δεξιά όπως περιμένουμε

- Το προφίλ του κύματος μεταβάλλεται – εξομαλύνεται στο χώρο

- Αλλά δεν υπάρχουν μεγάλες διαφορές στις μέγιστες / ελάχιστες τιμές
  - » Η λύση είναι μονοτονική
  - » Η λύση είναι κλεισμένη από τις αρχικές συνθήκες για Courant number <1

Ρητό σχήμα απάνεμων διαφορών: Ανάλυση λάθους

• Βρίσκουμε την εξίσωση μοντέλου για το ρητό σχήμα απάνεμων διαφορών UDS:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + u\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{u\Delta x}{2}(1-\nu)\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \ldots$$

Επιπλέον όρος τεχνητής διάχυσης που συνδέεται με τον αριθμό Courant

• Άρα το παραπάνω σχήμα εμπεριέχει *διάχυση*

• Προσέξτε ότι το λάθος του πρώτου όρου είναι τάξης *O(Δx,Δt)*

Ρητό και άρρητο σχήμα κεντρικών διαφορών: Ανάλυση λάθους

- Εξίσωση μοντέλου για το ρητό σχήμα CDS:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + u\frac{\partial \phi}{\partial x} = -\frac{u^2 \Delta t}{2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \ldots$$

Σημειώστε ότι ο αρνητικός συντελεστής στη διάχυση είναι υπεύθυνος για την αστάθεια

- Εξίσωση μοντέλου για το άρρητο σχήμα CDS:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + u\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{u^2 \Delta t}{2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \ldots$$

Επίσης, ο όρος της ψεύτικης διάχυσης κάνει την χρονική ολοκλήρωση να ευνοεί τη διάχυση

Σχήμα Lax-Wendroff

- Είναι το κλασικό σχήμα για την αριθμητική λύση της γραμμικής εξίσωσης κύματος

- Ξεκινάμε από την εξίσωση μοντέλο του ρητού σχήματος κεντρικών διαφορών (CDS)

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + u\frac{\partial \phi}{\partial x} = -\frac{u^2 \Delta t}{2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \ldots$$

- Προσπαθούμε να κάνουμε σταθερό το ρητό σχήμα CDS αντισταθμίζοντας το αρνητικό συντελεστή διάχυσης της

- Έτσι το σχήμα Lax-Wendroff αρχίζει με:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + u\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{u^2 \Delta t}{2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}$$

Σχήμα Lax-Wendroff (συνέχεια)

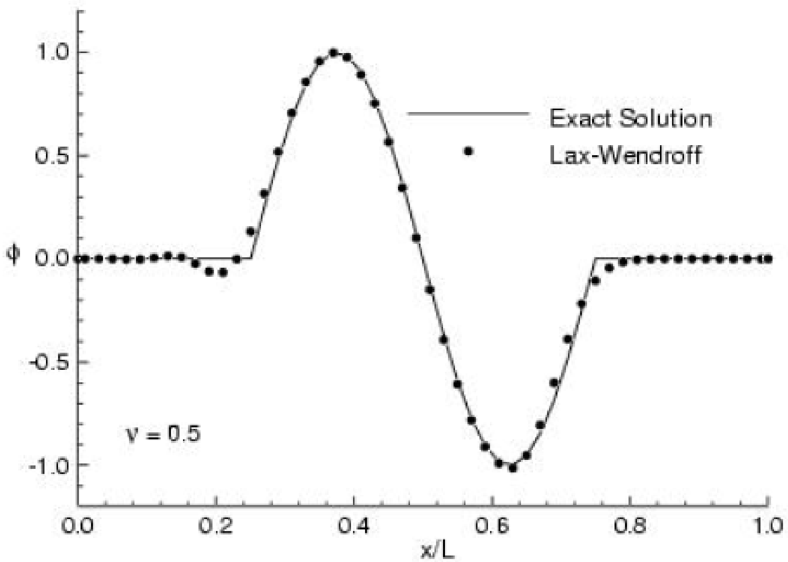
- Διακριτοποιούμε την εξίσωση ρητά χρησιμοποιώντας CDS:

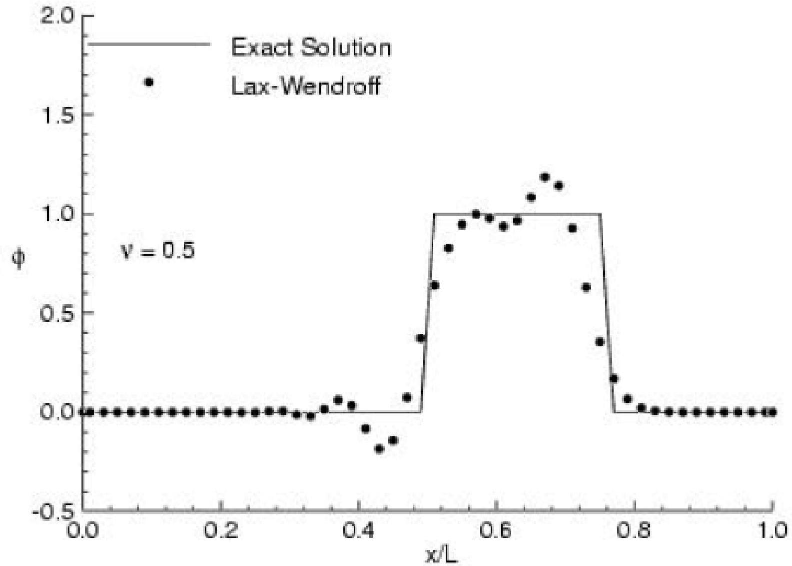
$$\frac{\phi_P - \phi_P^0}{\Delta t} + u\frac{(\phi_E^0 - \phi_W^0)}{2\Delta x} - \frac{u^2\Delta t}{2}\frac{(\phi_E^0 - 2\phi_P^0 + \phi_W^0)}{(\Delta x)^2} = 0$$

Εφαρμόζουμε κεντρικές διαφορές για τον όρο: $\dfrac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}$

- Μπορούμε να δείξουμε ότι το σχήμα είναι σταθερό για: $|\nu| \leq 1$

Κίνηση κύματος





Τα μέρη του κύματος που είναι ομαλά προσεγγίζοντας πολύ καλά, αλλά σχηματίζονται περίεργες μορφές κοντά σε ασυνέχειες.

Εξίσωση μοντέλο για το σχήμα Lax-Wendroff

- Εξίσωση μοντέλο:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + u\frac{\partial \phi}{\partial t} = -u\frac{(\Delta x)^2}{6}(1-\nu^2)\frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} + O(\Delta x)^3$$

Σημειώστε, όρος διασποράς και όχι όρος διάχυσης

- Στη μετάδοση κύματος η διασπορά είναι υπεύθυνη για την μεταβολή της συχνότητας που μεταφέρεται από το σήμα.

- Μπορούμε να σκεφτούμε το προφίλ σαν να αποτελείτε από σειρά Fourier.

- Το αριθμητικό σχήμα μεταφέρει διαφορετικές συχνότητες με διαφορετικές ταχύτητες αλλάζοντας το σχήμα του σήματος – “Λάθος φάσης (phase error)”

Συζήτηση

• Τα σχήματα διασποράς δουλεύουν καλά για κύματα με ομαλό σχήμα, πχ. Όταν δεν υπάρχουν πάρα πολλές συχνότητες (ένα κύμα ημίτονου)

• Οι ασυνέχειες δείχνουν ότι υπάρχει ένα άπειρος αριθμός συχνοτήτων

   » Τα λάθη φάσης μεταβάλουν τη συχνότητα σε κάθε χρονικό βήμα

   » Αυτός είναι ο λόγος που το κύμα σχήματος τετραγώνου αλλοιώνεται τόσο πολύ

• Χρησιμοποιώντας το ρητό σχήμα UDS, από την άλλη, χάνουμε σε ένταση, αλλά δεν εισάγουμε λάθη φάσης

Σχήμα Lax-Wendroff: περισσότερα προβλήματα

• Έστω η διακριτή εξίσωση:

$$\frac{\phi_P - \phi_P^0}{\Delta t} + u\frac{(\phi_E^0 - \phi_W^0)}{2\Delta x} - \frac{u^2\Delta t}{2}\frac{(\phi_E^0 - 2\phi_P^0 + \phi_W^0)}{(\Delta x)^2} = 0$$

• Αναδιανέμοντας:

$$\frac{\phi_P - \phi_P^0}{\Delta t} + \frac{u}{\Delta x}\left\{\left[\frac{\phi_E^0 + \phi_P^0}{2} - \frac{u\Delta t}{2\Delta x}(\phi_E^0 - \phi_P^0)\right] - \left[\frac{\phi_P^0 + \phi_W^0}{2} - \frac{u\Delta t}{2\Delta x}(\phi_P^0 - \phi_W^0)\right]\right\} = 0$$

Ροές συναγωγής και (ψευτο) διάχυσης στις πλευρές e και w στο περασμένο χρόνο

• Για μόνιμη κατάσταση:

$$\left[\frac{\phi_E + \phi_P}{2} - \frac{u\Delta t}{2\Delta x}(\phi_E - \phi_P)\right] - \left[\frac{\phi_P + \phi_W}{2} - \frac{u\Delta t}{2\Delta x}(\phi_P - \phi_W)\right] = 0$$

Παρατηρείτε κάτι περίεργο;

Προβλήματα (συνέχεια)

• Διακριτή εξίσωση σε μόνιμη ροή

$$\left[\frac{\phi_E + \phi_P}{2} - \frac{u\Delta t}{2\Delta x}(\phi_E - \phi_P)\right] - \left[\frac{\phi_P + \phi_W}{2} - \frac{u\Delta t}{2\Delta x}(\phi_P - \phi_W)\right] = 0$$

Η λύση στη μόνιμη κατάσταση εξαρτάτε από το Δt! Άρα ανάλογα με το χρονικό βήμα που επιλέξαμε μπορεί να έχουμε διαφορετικές μόνιμες λύσεις

• Σημειώστε ότι κανένα άλλο από τα σχήματα που έχουμε δει δεν έχει τέτοιου είδους ανεπιθύμητη εξάρτηση !

Επίλογος

- Στη παρούσα διάλεξη

Εξετάσουμε μερικά σχήματα πρώτης τάξης που στηρίζονται στην ακριβείς λύση της εξίσωσης αγωγής-συναγωγής

» Εκθετικό σχήμα

» Υβριδικό σχήμα

» Σχήμα Power-law

Είδαμε την μη-μόνιμη εξίσωση συναγωγής και καταλάβουμε την σημασία της διάχυσης και της διασποράς