ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
**ΤΜΗΜΑ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ**
*ΤΟΜΕΑΣ ΥΔΡΑΥΛΙΚΗΣ ΚΑΙ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝΤΙΚΗΣ ΤΕΧΝΙΚΗΣ*

# Διάλεξη 8: Ανάλυση ευστάθειας & Συναγωγή και διάχυση

*Χειμερινό εξάμηνο 2008*

## *Προηγούμενη παρουσίαση...*

- Ολοκληρώσαμε τη συζήτηση για τα σχήματα χρονικά μεταβαλλόμενης ροής
  - » Ιδιότητες του άρητου σχήματος (implicit)
  - » Ιδιότητες του σχήματος Crank Nicholson

- Αναλύσαμε το λάθος αποκοπής
  - » Είδαμε ότι οι προσεγγίσεις μέσης τιμής είναι δεύτερης τάξης
  - » Το άρητο σχήμα (implicit) είναι πρώτης τάξης

## *Οργάνωση παρουσίασης*

- Ανάλυση ευστάθειας κατά Von Neumann

  » εφαρμογή στο ρητό σχήμα (explicit scheme) και συζήτηση των ορίων ευστάθειας

- Θα δούμε δύο σχήματα διακριτοποίησης των όρων συναγωγής

  » Σχήμα κεντρικών διαφορών

  » Σχήμα ανάντη (Upwind) διαφορών

## *Ανάλυση ευστάθειας κατά Von Neumann*

- Για μόνιμα προβλήματα:
  - » Μπορούμε να βρούμε μία λύση χρησιμοποιώντας επαναληπτικούς επιλυτές;
- Για χρονικά μεταβαλλόμενα προβλήματα:
  - » Είναι η αριθμητική μέθοδο ‘κλεισμένη’ στο χρόνο εάν το αρχικό πρόβλημα έχει λύση ‘κλεισμένη’ στο χρόνο;
- Σημειώστε την αναλογία μεταξύ των επαναλήψεων και του χρονικού βήματος!

## *Ευστάθεια του ρητού σχήματος (Explicit)*

- Θεωρούμε το ρητό σχήμα σε μία διάσταση:

$$a_P\phi_P = a_E\phi_E^0 + a_W\phi_W^0 + \left(a_P^0 - a_E - a_W\right)\phi_P^0$$

$$\begin{aligned} a_E &= \frac{\Gamma_e}{(\delta x)_e} \\ a_W &= \frac{\Gamma_w}{(\delta x)_w} \\ a_P^0 &= \frac{\rho\Delta x}{\Delta t} \\ a_P &= a_P^0 \end{aligned}$$

## *Ορισμός λάθους*

- Θεωρούμε ότι Φ είναι η ‘ακριβείς λύση’ του συστήματος διακριτών εξισώσεων.
  - »Αυτή είναι η λύση για άπειρη ακρίβεια δεκαδικών σημείων
- Υποθέτουμε ότι για την ακρίβεια της μηχανής μας η λύση είναι φ
- Ορίζουμε το λάθος: $\varepsilon = \phi - \Phi$
- Αντικαθιστούμε στο διακριτό σύστημα της εξίσωσης:

$$a_P\left(\Phi_P + \varepsilon_P\right) = a_E\left(\Phi_E^0 + \varepsilon_E^0\right) + a_W\left(\Phi_W^0 + \varepsilon_W^0\right) + \left(a_P^0 - a_E - a_W\right)\left(\Phi_P^0 + \varepsilon_P^0\right)$$

- Αλλά το Φ ικανοποιεί ακριβώς τη λύση του συστήματος.

## *Εξίσωση λάθους*

- Έτσι το λάθος ικανοποιεί τη σχέση:

$$a_P \varepsilon_P = a_E \varepsilon_E^0 + a_W \varepsilon_W^0 + \left(a_P^0 - a_E - a_W\right) \varepsilon_P^0$$

- Αναπτύσσοντας σε σειρά Fourier έχουμε:

$$\varepsilon(x,t) = \sum_m e^{\sigma_m t} e^{i\lambda_m x} \quad m = 0,1,2,\ldots M$$

$$\lambda_m = \frac{m\pi}{L}, \quad m = 0,1,2,\ldots M$$

## *Συντελεστής ενίσχυσης*

- Αν $\sigma_m$ πραγματικός και μεγαλύτερος από το μηδέν το λάθος μεγαλώνει καθώς περνά ο χρόνος
- Αν $\sigma_m$ πραγματικός και μικρότερος από το μηδέν το λάθος μικραίνει καθώς περνά ο χρόνος
- Υποθέτουμε ότι είναι μιγαδικός αριθμός (άρα η λύση παλινδρομεί στο χρόνο)

- Ορίζουμε τον συντελεστή ενίσχυσης: $$\frac{\varepsilon(x, t+\Delta t)}{\varepsilon(x,t)}$$

- Επειδή το πρόβλημα είναι γραμμικό, μπορούμε να δούμε την συμπεριφορά ενός μόνο όρου:

$$\varepsilon = e^{\sigma_m t} e^{i\lambda_m x}$$

## Συντελεστής ενίσχυσης (συνέχεια)

- Αντικαθιστούμε στην διακριτή εξίσωση

$$a_P e^{\sigma_m (t+\Delta t)} e^{i\lambda_m x} = e^{\sigma_m t} \left( a_E e^{i\lambda_m (x+\Delta x)} + a_W e^{i\lambda_m (x-\Delta x)} \right) + \left( a_P^0 - a_E - a_W \right) e^{\sigma_m t} e^{i\lambda_m x}$$

- Διαιρούμε όλους τους όρους με $a_P e^{\sigma_m t} e^{i\lambda_m x}$

- και έχουμε

$$e^{\sigma_m \Delta t} = \frac{a_E}{a_P} e^{i\lambda_m \Delta x} + \frac{a_W}{a_P} e^{-i\lambda_m \Delta x} + \frac{a_P^0 - a_E - a_W}{a_P}$$

## *Συντελεστής ενίσχυσης (συνέχεια)*

• Αντικαθιστούμε τους συντελεστές $a_P$, $a_{0P}$ και $a_{nb}$ (θεωρώντας ότι το πλέγμα είναι ομοιόμορφο) και έχουμε:

$$e^{\sigma_m \Delta t} = \frac{\Gamma \Delta t}{\rho (\Delta x)^2} \left( e^{i\lambda_m \Delta x} + e^{-i\lambda_m \Delta x} \right) + \left( 1 - \frac{2\Gamma \Delta t}{\rho (\Delta x)^2} \right)$$

• Ορίζουμε

$$\beta = \lambda_m \Delta x$$

έτσι ώστε

$$e^{i\lambda_m \Delta x} + e^{-i\lambda_m \Delta x} = 2\cos\beta = 2 - 4\sin^2\frac{\beta}{2}$$

## *Συντελεστής ενίσχυσης (συνέχεια)*

- Έτσι

$$\frac{\varepsilon(x,t+\Delta t)}{\varepsilon(x,t)} = e^{\sigma_m \Delta t} = 1 - \frac{4\Gamma\Delta t}{\rho(\Delta x)^2}\sin^2\frac{\beta}{2}$$

$$r = \frac{\Gamma\Delta t}{\rho\Delta x^2}$$

- Για ένα σταθερό σχήμα:

$$\left|\frac{\varepsilon(x,t+\Delta t)}{\varepsilon(x,t)}\right| \leq 1$$

## *Συντελεστής ενίσχυσης (συνέχεια)*

- Για ευστάθεια

$$\left|1-4r\sin^2\beta\right|\le 1$$

ή $$-1\le 1-4r\sin^2\beta\le 1$$

$$-2\le -4r\sin^2\beta\le 0 \quad \text{ή} \quad 0\le 4r\sin^2\beta\le 2$$

- Επειδή

$$0\le \sin^2\beta\le 1 \qquad 0\le 4r\le 2 \quad \text{ή} \quad 0\le r\le \frac{1}{2}$$

## Όρια ευστάθειας

- Στη μονοδιάστατη περίπτωση, το όριο ευστάθειας είναι: $$\Delta t \leq \frac{\rho(\Delta x)^2}{2\Gamma}$$

- Στη δισδιάστατη περίπτωση, αναπτύσσουμε το λάθος ως:

$$\varepsilon(x,y,t) = e^{\sigma_m t} e^{i\lambda_m x} e^{i\lambda_n y}$$

- Υποθέτοντας ότι Δx = Δy

$$\Delta t \leq \frac{\rho(\Delta x)^2}{4\Gamma}$$

## *Περίληψη*

- Η ανάλυση ευστάθειας κατά Von Neumann δίνει το ίδιο όριο ευστάθειας όπως και όταν θεωρήσαμε ότι όλοι οι συντελεστές πρέπει να είναι θετικοί για το ρητό σχήμα
- Όμως το όριο ευστάθειας που έχουμε από την ανάλυση ευστάθειας είναι ποιο ακριβές
- Παρόμοια ανάλυση για το άρητο σχήμα δείχνει ότι είναι πάντα σταθερό
- Επίσης και το σχήμα Crank-Nicholson είναι πάντα σταθερό
    - » Μπορεί να παρουσιαστούν περιοδικές λύσεις όταν οι συντελεστές είναι αρνητικοί, αλλά κατά κανόνα επιτυγχάνεται λύση

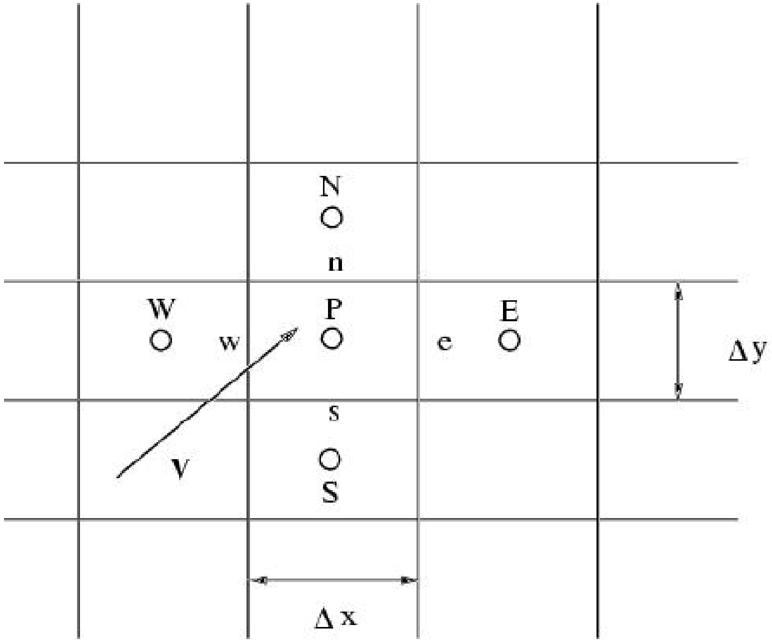
## Μόνιμη εξίσωση αγωγής-συναγωγής σε δύο διαστάσεις

• Εξισώσεις ροής

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = S$$

$$\mathbf{J} = \rho \mathbf{V} \phi - \Gamma \nabla \phi$$

$$\mathbf{V} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j}$$




Υποθέτουμε Καρτεσιανό δομημένο πλέγμα

Υποθέτουμε ότι το πεδίο ροής είναι γνωστό

# Διακριτοποίηση

• Ως συνήθως ολοκληρώνουμε σε κάθε όγκο ελέγχου:

$$\int_{\Delta \mathcal{V}} \nabla \cdot \mathbf{J} \, d\mathcal{V} = \int_{\Delta \mathcal{V}} S \, d\mathcal{V}$$

• Εφαρμόζουμε το θεώρημα της απόκλισης και γραμμικοποιούμε τους όρους πηγής:

$$\int_{A} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{A} = \overline{S} \Delta \mathcal{V}_P$$

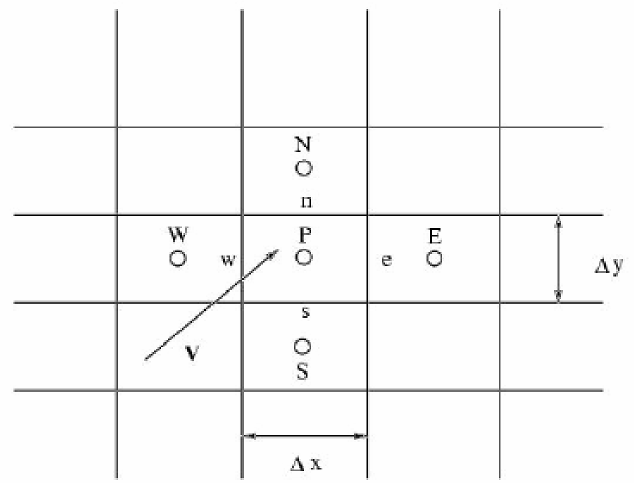
$$\mathbf{J}_e \cdot \mathbf{A}_e + \mathbf{J}_w \cdot \mathbf{A}_w + \mathbf{J}_n \cdot \mathbf{A}_n + \mathbf{J}_s \cdot \mathbf{A}_s = \left( S_C + S_P \phi_P \right) \Delta \mathcal{V}_P$$

Τίποτα διαφορετικό
μέχρι στιγμής

## *Διακριτοποίηση (συνέχεια)*

- Τα διανύσματα επιφανείας:

$$\mathbf{A}_e = \Delta y\,\mathbf{i}$$
$$\mathbf{A}_w = -\Delta y\,\mathbf{i}$$
$$\mathbf{A}_n = \Delta x\,\mathbf{j}$$
$$\mathbf{A}_s = -\Delta x\,\mathbf{j}$$




- Ροή π.χ. Στη πλευρά east:

$$\mathbf{J}_e \cdot \mathbf{A}_e = (\rho u \phi)_e \Delta y - \Gamma_e \Delta y \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_e$$

- Ρυθμός ροής στη πλευρά east:

$$F_e \phi_e \qquad F_e = (\rho u)_e \Delta y$$

# *Όρος διάχυσης*

• Γράφουμε τον όρο διάχυσης όπως συνήθως υποθέτοντας γραμμικό προφίλ μεταξύ (E,P):

$$\mathbf{J}_e \cdot \mathbf{A}_e = (\rho u \phi)_e \Delta y - \Gamma_e \Delta y \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_e$$

$$-D_e \left( \phi_E - \phi_P \right)$$

$$D_e = \Gamma_e \frac{\Delta y}{(\delta x)_e}$$

## *Αριθμός Peclet για το πλέγμα*

• Η ροή που περνά από την επιφάνεια $\mathbf{J}_e \cdot \mathbf{A}_e$ μπορεί να γραφεί με όρους των δύο συντελεστών:

$$D_e = \Gamma_e \frac{\Delta y}{(\delta x)_e}$$

$$F_e = (\rho u)_e \Delta y$$

• Ορίζουμε τον αριθμό Peclet του πλέγματος ως εξής:

$$Pe = \frac{F}{D} = \frac{\rho u \delta x}{\Gamma}$$

## *Σχήμα κεντρικών διαφορών (CDS)*

- Υπολογίζουμε την τιμή του φ στην πλευρά χρησιμοποιώντας την μέση τιμή:

$$\phi_e = \frac{\phi_E + \phi_P}{2}$$

Θεωρούμε ομοιόμορφο πλέγμα

- Η συναγωγή διαμέσου της πλευράς e είναι:

$$F_e \frac{(\phi_E + \phi_P)}{2}$$

Ίδιο πρόσημο! Ίσως υπάρχει πρόβλημα...

## CDS: Διακριτή εξίσωση

$$a_P \phi_P = \sum_{nb} a_{nb} \phi_{nb} + b$$

$$\begin{aligned}
a_E &= D_e - \frac{F_e}{2} \\
a_W &= D_w + \frac{F_w}{2} \\
a_N &= D_n - \frac{F_n}{2} \\
a_S &= D_s + \frac{F_s}{2} \\
a_P &= \sum_{nb} a_{nb} - S_P \Delta \mathcal{V}_P + (F_e - F_w + F_n - F_s) \\
b &= S_C \Delta \mathcal{V}_P
\end{aligned}$$

<u>Σημειώστε ότι</u>

•υπάρχει δυνατότητα αρνητικών συντελεστών

• επιπλέον όρος ροής στο συντελεστή $a_p$

## *Επίλογος*

- Στη παρούσα διάλεξη

Εφαρμόσαμε την ανάλυση ευστάθειας κατά Von Neumann

» εφαρμογή στο ρητό σχήμα (explicit scheme)

Είδαμε την γενική εξίσωση συναγωγής-διάχυσης σε δύο διαστάσεις

» Ο όρος της συναγωγής επιβάλει τον προσδιορισμό του φ στις πλευρές

» Αναπτύξαμε το σχήμα κεντρικών διαφορών