

Διάλεξη 15: Ο αλγόριθμος SIMPLE

Χειμερινό εξάμηνο 2008

Προηγούμενη παρουσίαση...

- Εξετάσαμε τις θέσεις που αποθηκεύουμε την πίεση και την ταχύτητα
 - » Προβλήματα που σχετίζονται με την θέση των μεταβλητών στο υπολογιστικό πλέγμα
- Είδαμε την τα μετατοπισμένα πλέγματα (staggered mesh) ως αρχική λύση για την επιλογή των μεταβλητών σε δομημένα πλέγματα

Οργάνωση παρουσίασης

- Θα εξετάσουμε λύσεις για την εισαγωγή της πίεσης στην εξίσωση της συνέχειας για ασυμπίεστες ροές
- Θα κάνουμε εισαγωγή στον αλγόριθμο SIMPLE

Κίνητρο

- Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε σειριακή ή άμεση μέθοδο
- Οι σειριακές μέθοδοι λύνουν τις εξισώσεις της συνέχειας και της ορμής σε σειρά:
 - » Διακριτοποιούμε την συνέχεια στο υπολογιστικό πεδίο
 - » Λύνουμε για τη συνέχεια
 - » Διακριτοποιούμε την εξίσωση της u -ορμής στο πεδίο
 - » Λύνουμε για την ταχύτητα u
 - » Διακριτοποιούμε την εξίσωση της v -ορμής στο πεδίο
 - » Λύνουμε για την ταχύτητα v
 - » Επαναλαμβάνουμε έως την σύγκλιση

Κίνητρο (συνέχεια)

- Άμεσες μέθοδοι:
 - » Διακριτοποιούμε τις εξισώσεις της ροής στο πεδίο
 - » Δημιουργούμε ένα μεγάλο γραμμικό σύστημα

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

» \mathbf{x} είναι διάνυσμα με 4N αγνώστους 3D (3 ταχύτητες, μία πίεση, N κελιά)

- Οι άμεσες μέθοδοι είναι πολύ ακριβές ακόμη και σήμερα

Μέθοδοι που στηρίζονται στη πίεση

- Οι σειριακές μέθοδοι είναι προτιμότερες για ασυμπίεστα ρευστά
 - » Μικρή ανάγκη μνήμης και αριθμού πράξεων
- Για ασυμπίεστα ρευστά, πώς μπορούμε να βρούμε την πίεση από την εξίσωση της συνέχειας;
 - » Η πυκνότητα δεν συνδέεται με την πίεση για ασυμπίεστες ροές
- Οι μέθοδοι 'Pressure-based methods' είναι τεχνικές για την εισαγωγή της πίεσης στην εξίσωση της συνέχειας

Άλλες μέθοδοι

- Μέθοδοι βασισμένες στη πυκνότητα
 - » Δημοφιλής για συμπιεστές ροές
 - » χρησιμοποιούν ως αγνώστους τα (u, v, w, ρ, E)
- Σχήματα Artificial compressibility/preconditioning
 - » Εισαγωγή τεχνητής συμπιεστότητας για να μπορεί να γίνει χρήση μεθόδων βασισμένων στη πυκνότητα σε ασυμπίεστες ροές
- Θα εστιάσουμε στις μεθόδους που βασίζονται στη πίεση επειδή είναι οι δημοφιλέστερες για ασυμπίεστες ροές.

Δρόμος για την λύση

- Η επιλογή μεταξύ των μεθόδων pressure-based/ density-based και artificial compressibility είναι μόνο ένας δρόμος που μας οδηγεί στη λύση
- Όταν έχουμε σύγκληση, η λύση ικανοποιεί τις διακριτές εξισώσεις της συνέχειας και της ορμής
- Η επιλογή της μεθόδου μπορεί να ελέγξει, όταν έχουμε την τελική λύση,
 - » πόσο γρήγορα / οικονομικά μπορούμε να την έχουμε
 - » πόσο μνήμη / χώρο στο δίσκο χρειαζόμαστε

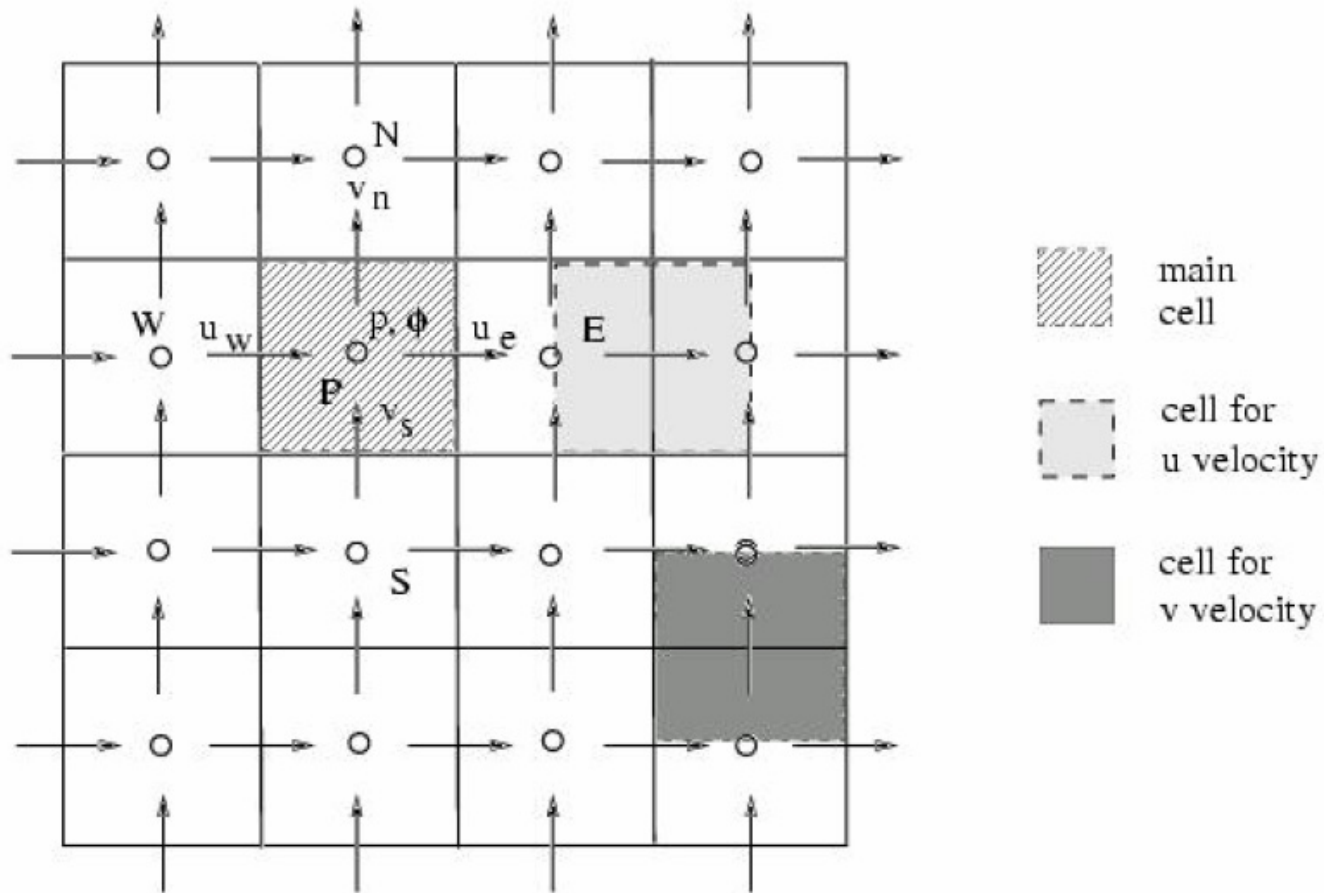
Μετατοπισμένο πλέγμα

- Η επιλογή του μετατοπισμένου πλέγματος είναι επιλογή σχετικά με την ποιότητα της τελικής λύσης
- Άσχετα με το δρόμο που θα ακολουθήσουμε για την λύση, θα έχουμε την ίδια λύση (αν τελικά βρούμε λύση)
- Αν δεν χρησιμοποιήσουμε το μετατοπισμένο πλέγμα θα έχουμε δομές σκακιέρας
- Άρα το μετατοπισμένο πλέγμα είναι μια ιδιότητα της διακριτοποίησης και καθορίζει την ποιότητα / ακρίβεια της λύσης
- Η επιλογή σχημάτων βασισμένων στην πίεση δεν επηρεάζει την ακρίβεια.

Αλγόριθμος SIMPLE

- Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equations
- Προτάθηκε από τον Patankar και Spalding (1972)
- Η ιδέα είναι να αρχίσουμε με την διακριτή εξίσωση της συνέχειας
- Να αντικαταστήσουμε σε αυτή τις διακριτές εξισώσεις για τη u και v ορμή
 - » Οι διακριτές εξισώσεις ορμής έχουν όρους διαφοράς πίεσης
- Άρα μπορεί να βρεθεί μια εξίσωση για τις διακριτές πιέσεις
 - » Ο αλγόριθμος SIMPLE στην ουσία λύνει για μια σχετική ποσότητα που ονομάζεται διόρθωση πίεσης

Αποθήκευση μεταβλητών: Μετατοπισμένο πλέγμα



Αλγόριθμος SIMPLE

- Χρησιμοποιώντας μεθόδους ίδιες με αυτές της διακριτοποίησης της ποσότητας ϕ (scalar), μπορούμε να έχουμε:

$$a_e u_e^* = \sum_{nb} a_{nb} u_{nb}^* + \Delta y (p_P^* - p_E^*) + b_e$$

$$a_n v_n^* = \sum_{nb} a_{nb} v_{nb}^* + \Delta x (p_S^* - p_P^*) + b_n$$

- Όπου, u^* και v^* είναι λύσεις από την διακριτή εξίσωση της ορμής αν χρησιμοποιήσουμε ένα υποθετικό πεδίο πίεσης p^*
- Επειδή το p^* είναι μόνο υποθετικό, το υπολογισμένο πεδίο ταχυτήτων δεν ικανοποιεί την διακριτή εξίσωση συνέχειας

Αλγόριθμος SIMPLE (συνέχεια)

- Προτείνουμε διορθώσεις στις ταχύτητες και την πίεση ώστε οι διορθωμένες ταχύτητες να ικανοποιούν την εξίσωση συνέχειας:

$$(\rho u)_e \Delta y - (\rho u)_w \Delta y + (\rho v)_n \Delta x - (\rho v)_s \Delta x = 0$$

- Ας υποθέσουμε ότι οι διορθωμένες τιμές είναι :

$$u = u^* + u'$$

$$v = v^* + v'$$

Διορθώσεις ταχύτητας

$$p = p^* + p'$$

Διορθώσεις πίεσης

Αλγόριθμος SIMPLE (συνέχεια)

- Επίσης προϋποθέτει ότι οι διορθωμένες ταχύτητες και πιέσεις ικανοποιούν την εξίσωση της ορμής:

$$a_e u_e = \sum_{nb} a_{nb} u_{nb} + \Delta y (p_P - p_E) + b_e$$

$$a_n v_n = \sum_{nb} a_{nb} v_{nb} + \Delta x (p_P - p_N) + b_n$$

- Αφαιρώντας τις ποσότητες με το αστέρι από τις παραπάνω έχουμε:

$$a_e u'_e = \sum_{nb} a_{nb} u'_{nb} + \Delta y (p'_P - p'_E)$$

$$a_n v'_n = \sum_{nb} a_{nb} v'_{nb} + \Delta x (p'_S - p'_P)$$

Εξίσωση διορθωμένης πίεσης

- Κάνουμε την προσέγγιση:

$$\begin{aligned} a_e u'_e &\approx \Delta y (p'_P - p'_E) \\ a_n v'_n &\approx \Delta x (p'_S - p'_P) \end{aligned}$$

Τα διώχνουμε

$$\sum_{nb} a_{nb} u'_{nb} \quad \text{και} \quad \sum_{nb} a_{nb} v'_{nb}$$

Εξίσωση διορθωμένης πίεσης (συνέχεια)

• Ορίζουμε:

$$d_e = \frac{\Delta y}{a_e}$$

$$d_n = \frac{\Delta x}{a_n}$$

έτσι έχουμε

$$u'_e = d_e (p'_P - p'_E)$$

$$v'_n = d_n (p'_P - p'_S)$$

και

$$u_e = u_e^* + d_e (p'_P - p'_E)$$

$$v_n = v_n^* + d_n (p'_P - p'_S)$$

Ρυθμοί ροής στις πλευρές

- Αντίστοιχα έχουμε ρυθμούς ροής και διορθώσεις:

$$\begin{aligned} F_e^* &= \rho_e u_e^* \Delta y & F_e' &= \rho_e d_e \Delta y (p'_P - p'_E) \\ F_n^* &= \rho_n v_n^* \Delta x & F_n' &= \rho_n d_n \Delta x (p'_P - p'_S) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_e &= F_e^* + F_e' \\ F_n &= F_n^* + F_n' \end{aligned}$$

Εξίσωση διόρθωσης πίεσης

- Οι ποσότητες με το αστέρι δεν ικανοποιούν την διακριτή εξίσωση της συνέχειας:

$$(\rho u^*)_e \Delta y - (\rho u^*)_w \Delta y + (\rho v^*)_n \Delta x - (\rho v^*)_s \Delta x \neq 0$$

$$F_e^* - F_w^* + F_n^* - F_s^* \neq 0$$

- Όμως οι διορθωμένες ταχύτητες την ικανοποιούν

$$F_e^* + F_e' - F_w^* - F_w' + F_n^* + F_n' - F_s^* - F_s' = 0$$

Εξίσωση διόρθωσης πίεσης (συνέχεια)

- Αντικαθιστούμε από τις διορθώσεις των ρυθμών ροής:

$$F_e^* + \rho_e d_e \Delta y (p'_P - p'_E) - F_w^* - \rho_w d_w \Delta y (p'_W - p'_P) \\ + F_n^* + \rho_n d_n \Delta x (p'_P - p'_N) - F_s^* - \rho_s d_s \Delta x (p'_S - p'_P) = 0$$

- Συλλέγουμε όρους στη διόρθωση πίεσης p' για να φτιάξουμε μια εξίσωση διόρθωσης πίεσης

Ο όρος της κλίσης πίεσης (συνέχεια)

$$a_P p'_P = \sum_{nb} a_{nb} p'_{nb} + b$$

$$a_E = \rho_e d_e \Delta y$$

$$a_W = \rho_w d_w \Delta y$$

$$a_N = \rho_n d_n \Delta x$$

$$a_S = \rho_s d_s \Delta x$$

$$a_P = \sum_{nb} a_{nb}$$

$$b = F_w^* - F_e^* + F_s^* - F_n^*$$

• Το κριτήριο Scarborough ικανοποιείται στην ισότητα

• Ο όρος b είναι η ποσότητα στην οποία οι ταχύτητες με το αστέρι δεν ικανοποιούν την συνέχεια

Συζήτηση

- Η πηγή στην εξίσωση του p' είναι η ποσότητα κατά την οποία οι ταχύτητες u^* δεν ικανοποιούν την διακριτή εξίσωση της συνέχειας
- Αν η υπόθεση που έχουμε κάνει για τη πίεση p^* είναι σωστή, u^* και v^* θα ικανοποιούν την συνέχεια και η πηγή στη p' θα είναι μηδέν
- Σε αυτό το όριο, $p' = \text{σταθερά}$ ή μηδέν που ικανοποιεί την εξίσωση διόρθωσης της πίεσης
- Αν $p' = \text{σταθερό}$, οι διορθώσεις της πίεσης είναι μηδέν

$$a_e u'_e \approx \Delta y (p'_P - p'_E)$$
$$a_n v'_n \approx \Delta x (p'_S - p'_P)$$

Συζήτηση (συνέχεια)

- Αν η διόρθωση της ταχύτητας είναι μηδέν, το πεδίο ταχυτήτων δεν αλλάζει και μπορούμε να θεωρήσουμε ότι έχει συγκλίνει
- Τι γίνεται σχετικά με την πίεση;
 - » Το πεδίο της πίεσης θα αλλάζει κατά μια σταθερά σε κάθε μία επανάληψη
 - » Ωστόσο, σε ασυμπίεστες ροές, μόνο το ∇p είναι σχετικό και όχι η τιμή του p
 - » Μόνο κλίσεις και διαφορές του p είναι σχετικές
 - » Προσθέτοντας μια σταθερά δεν αλλάζει τις διαφορές της πίεσης
 - » Άρα και η πίεση μπορεί να θεωρηθεί ότι έχει συγκλίνει

Επίλογος

Στη παρούσα διάλεξη είδαμε:

» Πως ξεκινώντας από την εξίσωση της ορμής μπορούμε να δημιουργήσουμε μια εξίσωση για διορθώσεις ταχύτητας με όρους της διόρθωσης πίεσης

» Δημιουργήσαμε μια εξίσωση για την διόρθωση της πίεσης