ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΤΜΗΜΑ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΥΔΡΑΥΛΙΚΗΣ ΚΑΙ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝΤΙΚΗΣ ΤΕΧΝΙΚΗΣ

Διάλεξη 9: Συναγωγή και διάχυση (συνέχεια)

Χειμερινό εξάμηνο 2008

Προηγούμενη παρουσίαση...

- Είδαμε την διακριτοποίηση της μόνιμης εξίσωσης αγωγής-συναγωγής σε διδιάστατα Καρτεσιανά πλέγματα

- Είδαμε ότι χρειάζονται οι τιμές της φ στη πλευρά του κελιού για να διακριτοποιήσουμε τον όρο συναγωγής

- Θα εμβαθύνουμε σε δύο σχήματα προσέγγισης
  - » Σχήμα κεντρικών διαφορών (CDS)
  - » Σχήμα ανάντη διαφορών (UDS)

- Είδαμε ήδη το σχήμα CDS

Οργάνωση παρουσίασης

- Ολοκλήρωση της συζήτησης για τα σχήματα UDS/CDS
- Ακρίβεια των σχημάτων UDS/CDS
- Κατανόηση της έννοιας της ψευτοδιάχυσης

CDS: Διακριτή εξίσωση

$$a_P \phi_P = \sum_{nb} a_{nb} \phi_{nb} + b$$

$$\begin{aligned}
a_E &= D_e - \frac{F_e}{2} \\
a_W &= D_w + \frac{F_w}{2} \\
a_N &= D_n - \frac{F_n}{2} \\
a_S &= D_s + \frac{F_s}{2} \\
a_P &= \sum_{nb} a_{nb} - S_P \Delta \mathcal{V}_P + (F_e - F_w + F_n - F_s) \\
b &= S_C \Delta \mathcal{V}_P
\end{aligned}$$

<u>Σημειώστε ότι</u>

•υπάρχει δυνατότητα αρνητικών συντελεστών

• επιπλέον όρος ροής στο συντελεστή a_p

CDS: Συζήτηση

- Έστω ότι **V**= u **i**+ v **j** με u > 0, v > 0. Όταν Fe > 2De,π.χ., εάν ο αριθμός Peclet είναι $Pe_e > 2$, $a_E < 0$.

- Ομοίως, το a_N γίνεται αρνητικό αν Fn > 2Dn ή αν $Pe_n > 2$

- Για άλλους συνδυασμούς του διανύσματος της ταχύτητας, κάποιοι άλλοι συντελεστές μπορεί να γίνουν επίσης αρνητικοί

- Αυτό σημαίνει ότι αν η τιμή ενός γειτονικού κόμβου μεγαλώνει, η τιμή στο σημείο P μπορεί να μικραίνει!

- Αυτό είναι αλήθεια ακόμη και όταν S=0 και δεν υπάρχει κάποιος επιπλέον όρος ροής μάζας

- Τι γίνεται σχετικά με το κριτήριο Scarborough;

CDS: Συζήτηση

• Το κριτήριο Scarborough δεν ικανοποιείται:

$$\frac{|a_E| + |a_W|}{|a_P|} \quad \begin{cases} \leq 1 & \text{Για όλα τα σημεία του πλέγματος} \\ < 1 & \text{Έστω και για ένα σημείο του πλέγματος} \end{cases}$$

• Στην ουσία, ακόμη και η τιμή $a_P = 0$ μπορεί να εμφανιστεί σε μια θέση όπου η διάχυση είναι μηδέν και η ροή ομοιόμορφη

• Άρα, είναι δύσκολο να χρησιμοποιήσουμε επαναληπτικές μεθόδους

CDS: Συζήτηση

• Σημειώστε τον επιπλέον όρο στο a_P:

$$(F_e - F_w + F_n - F_s)$$

Πρόκειται για την καθαρή ροή μάζας που τελικά βγαίνει από τον όγκο ελέγχου

• Αν το πεδίο ροής ικανοποιεί την εξίσωση της συνέχειας, τότε αυτός ο όρος θα είναι μηδέν. Αν όχι, μπορεί να προκαλέσει απώλεια την κυριαρχίας της διαγωνίου στο σύστημα μας

• Τελικά:

» Η ύπαρξη αρνητικών συντελεστών μπορεί να δημιουργήσει χωρικές ανομοιομορφίες – πρέπει να κρατάμε $Pe<2$

» Το κριτήριο του Scarborough δεν ικανοποιείται – δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε επαναληπτικούς επιλυτές

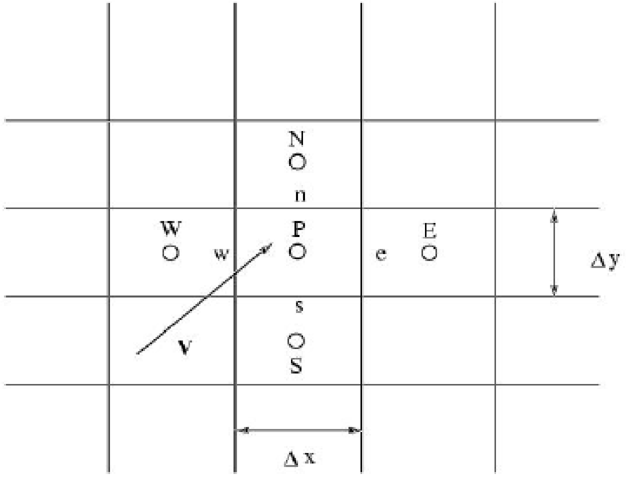
Τελικά

- Οι κεντρικές διαφορές (CDS)
  - » Χρησιμοποιούν την υπόθεση του γραμμικού προφίλ μεταξύ των σημείων για να πάρουν την τιμή στην πλευρά του κελιού
  - » Μπορεί να οδηγήσουν σε χωρικές αστάθειες (wiggles) σε περίπτωση που η συναγωγή είναι το κύριο φαινόμενο στη ροή
  - » Μπορεί να προκύψουν συστήματα χωρίς κύρια διαγώνιο – δυσκολία στη χρήση επαναληπτικών επιλυτών
  - » Μπορεί να δειχθεί ότι είναι τάξης ακρίβειας $O(\Delta x^2)$

Ανάντη διαφορές (UDS)

• Γράφουμε τις τιμές στις πλευρές ως εξής:

$$
\begin{aligned}
\phi_e &= \phi_P \quad \text{if } F_e \geq 0 \\
&= \phi_E \quad \text{if } F_e < 0
\end{aligned}
$$



Δηλαδή, ανάντη (Upwind) της διεύθυνσης της ροής

UDS: Διακριτή εξίσωση

$$a_P\phi_P = \sum_{nb} a_{nb}\phi_{nb} + b$$

$$\begin{aligned}
a_E &= D_e + Max[-F_e, 0] \\
a_W &= D_w + Max[F_w, 0] \\
a_N &= D_n + Max[-F_n, 0] \\
a_S &= D_s + Max[F_s, 0] \\
a_P &= \sum_{\text{nb}} a_{\text{nb}} - S_P \Delta\mathcal{V}_P + (F_e - F_w + F_n - F_s) \\
b &= S_C \Delta\mathcal{V}_P
\end{aligned}$$

- Όπου

$$\begin{aligned}
Max[a, b] &= a \quad \text{if } a > b \\
&= b \quad \text{otherwise}
\end{aligned}$$

- Ποια είναι τα πρόσημα των συντελεστών των γειτόνων;
- Δείτε τον επιπλέον όρο για τη ροή της μάζας στον συντελεστή a_P

UDS: συζήτηση

- Σημειώστε ότι όλοι οι συντελεστές είναι θετικοί

- Επειδή $a_P = \Sigma a_{nb}$ για S = 0 και όταν επιπλέον όροι ροής μάζας είναι μηδέν
  - » Η λύση είναι κλεισμένη

- Το κριτήριο Scarborough ικανοποιείται στην ισότητα για S = 0 και όταν δεν υπάρχει επιπλέον ροή μάζας

- Σημειώστε τον επιπλέον όρο ροής μάζας στο συντελεστή του a_P:

$$(F_e - F_w + F_n - F_s)$$

Μηδέν όταν το πεδίο ταχυτήτων ικανοποιεί την συνέχεια

Τελικά

- Το σχήμα ανάντη διαφορών (UDS)
  - » Κάνει την υπόθεση γραμμικού προφίλ για τον όρο της διάχυσης, αλλά χρησιμοποιεί την απάνεμη τιμή της φ για τον υπολογισμό του όρου συναγωγής
  - » Εφόσον ικανοποιείται η συνέχεια της μάζας, το σχήμα εγγυάται ότι η λύση είναι κλειστή (bounded) για οποιονδήποτε αριθμό Peclet του πλέγματος
  - » Το κριτήριο Scarborough ικανοποιείται – άρα μπορούν να χρησιμοποιηθούν επαναληπτικοί επιλυτές
- Μπορεί να φανεί ότι οι UDS έχουν τάξη ακρίβειας *O(Δx)*
- Δεν είναι πολύ ικανοποιητικό για πρακτική χρήση

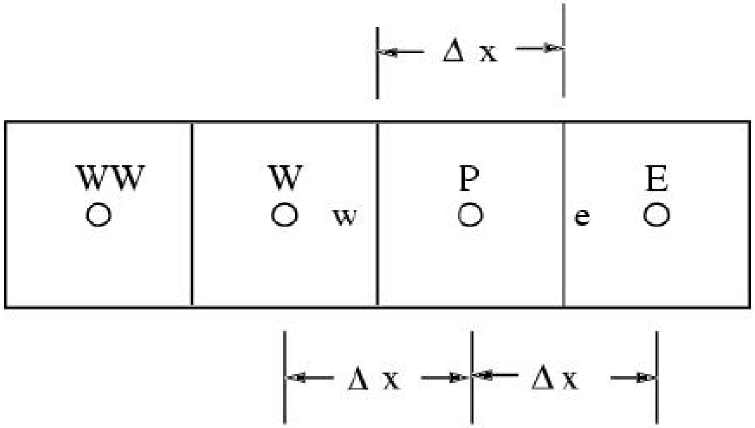
UDS: Ακρίβεια

- Θεωρούμε ομοιόμορφο πλέγμα σε μία διάσταση

- Αναπτύσσουμε σε σειρά Taylor γύρω από το σημείο e

$$\phi_P = \phi_e - \left(\frac{\Delta x}{2}\right)\left(\frac{d\phi}{dx}\right)_e + \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta x}{2}\right)^2\left(\frac{d^2\phi}{dx^2}\right)_e + O\left((\Delta x)^3\right)$$

$$\phi_E = \phi_e + \left(\frac{\Delta x}{2}\right)\left(\frac{d\phi}{dx}\right)_e + \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta x}{2}\right)^2\left(\frac{d^2\phi}{dx^2}\right)_e + O\left((\Delta x)^3\right)$$



•Για το σχήμα UDS έχουμε:

$$\phi_e = \phi_P + O(\Delta x)$$

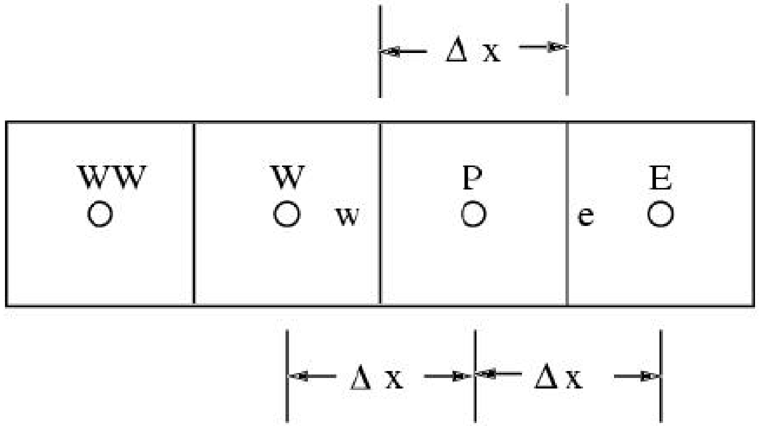
CDS: Ακρίβεια

$$\phi_P = \phi_e - \left(\frac{\Delta x}{2}\right)\left(\frac{d\phi}{dx}\right)_e + \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta x}{2}\right)^2\left(\frac{d^2\phi}{dx^2}\right)_e + O\left((\Delta x)^3\right)$$

$$\phi_E = \phi_e + \left(\frac{\Delta x}{2}\right)\left(\frac{d\phi}{dx}\right)_e + \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta x}{2}\right)^2\left(\frac{d^2\phi}{dx^2}\right)_e + O\left((\Delta x)^3\right)$$

$$\phi_e = \frac{\phi_P + \phi_E}{2} - \frac{(\Delta x)^2}{8}\left(\frac{d^2\phi}{dx^2}\right)_e + O\left((\Delta x)^3\right)$$

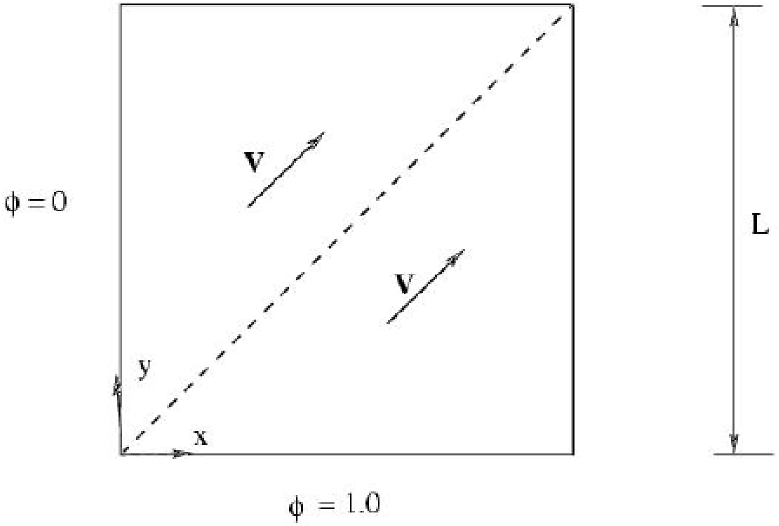
Άρα η ακρίβεια
είναι τάξης O(Δx^2)



Παράδειγμα

• Μόνιμη ροή κατά μήκους της διαγωνίου

$$\mathbf{V} = 1.0\mathbf{i} + 1.0\mathbf{j}$$

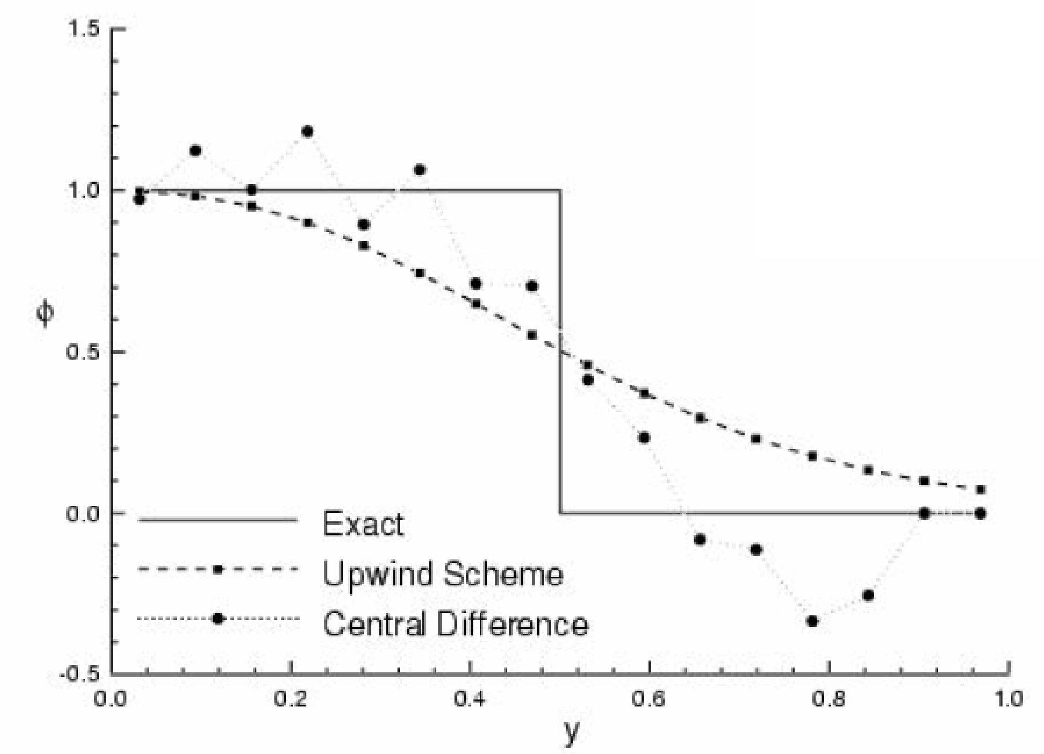


• Συντελεστής διάχυσης Γ = 0

•Ποια είναι η λύση;

Παράδειγμα (συνέχεια)

• Η λύση της φ κατά μήκος του κέντρου του πεδίου



UDS: εισάγει διάχυση

CDS: τιμές μεγαλύτερες από το κανονικό

Εξίσωση μοντέλο για το καθορισμό της ψευτοδιάχυσης

• Το κάθε σχήμα διακριτοποίησης αντιστοιχεί στη λύση μιας ισοδύναμης (effective) μερικής διαφορικής εξίσωσης

• Η δρούσα ΜΔΕ ονομάζεται Εξίσωση Μοντέλο

• Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να λύσουμε την εξίσωση της καθαρής συναγωγής

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u \phi) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v \phi) = 0$$

• Ας υποθέσουμε για απλούστευση ρ και u, v σταθερά

• Όταν εφαρμόζουμε το σχήμα UDS στην παραπάνω εξίσωση ποια είναι η ισοδύναμη εξίσωση που λύνουμε πραγματικά;

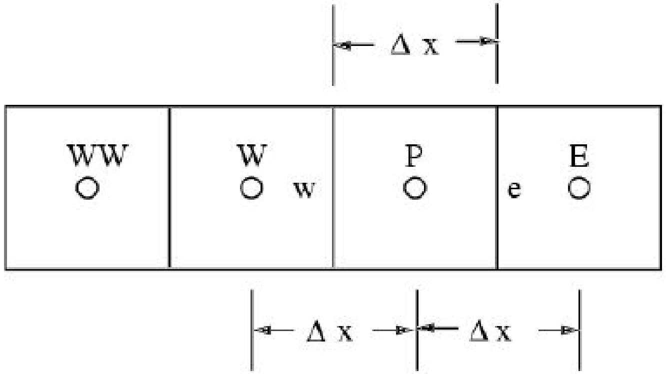
Εξίσωση μοντέλο (συνέχεια)

- Μόνο εξίσωση συναγωγής:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u\phi) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v\phi) = 0$$

- Εφαρμόζουμε UDS:

$$\rho u \frac{\phi_P - \phi_W}{\Delta x} + \rho v \frac{\phi_P - \phi_S}{\Delta y} = 0$$



- Αναπτύσσουμε σε σειρά Taylor:

$$\phi_W = \phi_P - \Delta x \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{(\Delta x)^2}{2!}\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{(\Delta x)^3}{3!}\frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} + \dots$$

$$\phi_S = \phi_P - \Delta y \frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{(\Delta y)^2}{2!}\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - \frac{(\Delta y)^3}{3!}\frac{\partial^3 \phi}{\partial y^3} + \dots$$

Εξίσωση μοντέλο (συνέχεια)

- Αντικαθιστούμε τα αναπτύγματα Taylor στη διακριτή εξίσωση:

$$\rho u \frac{\partial \phi}{\partial x} + \rho v \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\rho u \Delta x}{2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\rho v \Delta x}{2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + O\left((\Delta x)^2\right) + O\left((\Delta y)^2\right)$$

- Για Δx = Δy

$$\rho u \frac{\partial \phi}{\partial x} + \rho v \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\rho u \Delta x}{2} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) + O\left((\Delta x)^2\right)$$

Τεχνητή ή ψεύτικη διάχυση

Εξίσωση μοντέλο (συνέχεια)

- Το σχήμα UDS είναι ικανό να λύσει την εξίσωση συναγωγής-διάχυσης με τον επιπλέον όρο ψεύτικης ή τεχνητής διάχυσης που δημιουργείται από τη διακριτοποίηση

- Σημειώστε ότι ο όρος της διάχυσης είναι τάξης *O(Δx)* – και αυτό είναι και το σφάλμα αποκοπής του σχήματος UDS

- Η τεχνητή διάχυση μικραίνει όταν το πλέγμα γίνεται πιο μικρό

- Αν η φυσική διάχυση είναι μεγάλη, η ψευτοδιάχυση είναι δυσκολότερο να παρατηρηθεί, αλλά για μεγάλους αριθμούς Pe, η αριθμητική διάχυση μπορεί να υπερισχύσει

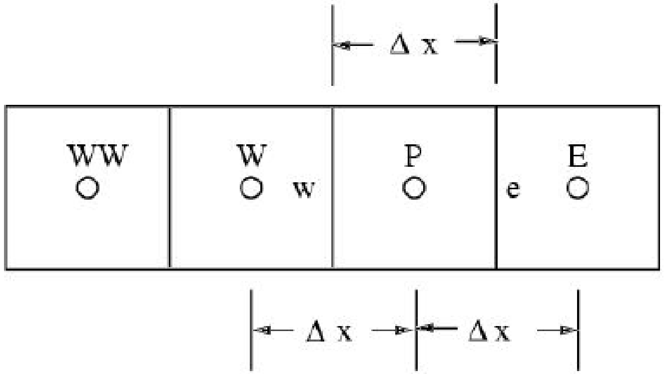
CDS μοντέλο εξίσωσης

- Στην εξίσωση της καθαρής συναγωγής:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u \phi) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v \phi) = 0$$

- Εφαρμόζουμε CDS:

$$\rho u \frac{\phi_E - \phi_W}{2\Delta x} + \rho v \frac{\phi_N - \phi_S}{2\Delta y} = 0$$



- Αναπτύσσουμε σε σειρές Taylor:

$$\phi_W = \phi_P - \Delta x \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{(\Delta x)^2}{2!}\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{(\Delta x)^3}{3!}\frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} + \dots$$

$$\phi_E = \phi_P + \Delta x \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{(\Delta x)^2}{2!}\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{(\Delta x)^3}{3!}\frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} + \dots$$

Κάνουμε τον ίδιο τύπο αναπτύγματος και για την διεύθυνση y

CDS μοντέλο εξίσωσης (συνέχεια)

- Αφαιρούμε:

$$\frac{\phi_E - \phi_W}{2\Delta x} = \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{(\Delta x)^2}{3!}\frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} + \dots$$

- Κάνουμε το ίδιο και για την y διεύθυνση:

$$\frac{\phi_N - \phi_S}{2\Delta y} = \frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{(\Delta y)^2}{3!}\frac{\partial^3 \phi}{\partial y^3} + \dots$$

- Αντικαθιστούμε στην διακριτή εξίσωση:

$$\rho u \frac{\partial \phi}{\partial x} + \rho v \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\rho u \Delta x^2}{3!}\left(\frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 \phi}{\partial y^3}\right) + O\left((\Delta x)^3\right)$$

Όρος διάδοσης (dispersion)

CDS μοντέλο εξίσωσης (συνέχεια)

- Η εξίσωση μοντέλου για το σχήμα κεντρικών διαφορών (CDS) έχει ένα επιπλέον όρο τρίτης παραγώγου που εκφράζει διασπορά (dispersive term)

- Αυτός ο τύπος παραγώγου έχει την τάση να δημιουργεί χωρικές ανομοιομορφίες

- Σημειώστε ότι το λάθος αποκοπής για το σχήμα CDS είναι $O(\Delta x^2)$

- Έτσι, το σχήμα UDS εισάγει τη διάχυση και το σχήμα CDS τη διασπορά

Επίλογος

- Στη παρούσα διάλεξη

  Είδαμε τα σχήματα UDS και CDS

  Προσδιορίσαμε το λάθος αποκοπής των σχημάτων CDS και UDS

  Χρησιμοποιήσαμε την ιδέα της “εξίσωσης μοντέλο” για να εξηγήσουμε γιατί το σχήμα UDS εισάγει διάχυση και το σχήμα CDS διασπορά