ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΤΜΗΜΑ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΥΔΡΑΥΛΙΚΗΣ ΚΑΙ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝΤΙΚΗΣ ΤΕΧΝΙΚΗΣ

Διάλεξη 7: Εξίσωση μη-μόνιμης διάχυσης (συνέχεια)

Χειμερινό εξάμηνο 2008

Προηγούμενη παρουσίαση...

Είδαμε

- τον αλγόριθμο του τριδιαγώνιου πίνακα (TDMA) και την μέθοδο line-by-line TDMA
- Αρχίσαμε να βλέπουμε την εξίσωση της χρονικά μεταβαλλόμενης διάχυσης

  » Ρητό σχήμα (Explicit)

Οργάνωση παρουσίασης

Θα συνεχίσουμε εξετάζοντας την χρονικά μεταβαλλόμενη (unsteady) αγωγή

σε διδιάστατα προβλήματα

- Άρητο σχήμα (Implicit)
- Σχήμα Crank-Nicholson
- Ακρίβεια και ευστάθεια των παραπάνω σχημάτων

Σύστημα διακριτών εξισώσεων

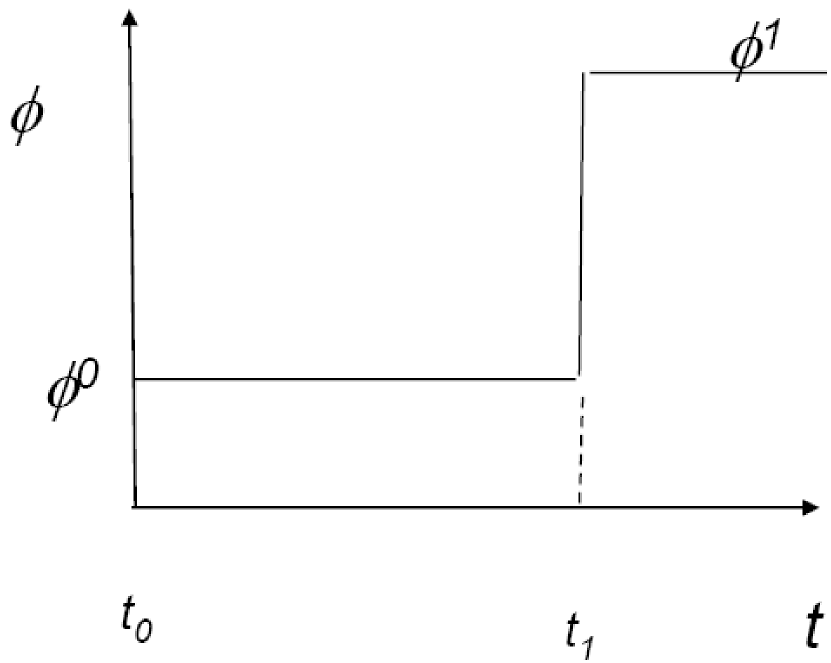
$$a_P\phi_P = \sum_{\text{nb}} a_{\text{nb}}\left(f\phi_{\text{nb}} + (1-f)\phi^0_{\text{nb}}\right) + b + \left(a^0_P - (1-f)\sum_{\text{nb}} a_{\text{nb}}\right)\phi^0_P$$

$$\begin{aligned}
a_E &= \frac{\Gamma_e \Delta y}{(\delta x)_e} \\
a_W &= \frac{\Gamma_w \Delta y}{(\delta x)_w} \\
a_N &= \frac{\Gamma_n \Delta x}{(\delta y)_n} \\
a_S &= \frac{\Gamma_s \Delta x}{(\delta y)_s} \\
a^0_P &= \frac{\rho \Delta \mathscr{V}}{\Delta t} \\
a_P &= f\sum_{\text{nb}} a_{\text{nb}} - fS_P\Delta\mathscr{V} + a^0_P \\
b &= \left(fS_C + (1-f)S^0_C + (1-f)S^0_P\phi^0_P\right)\Delta\mathscr{V}
\end{aligned}$$

- Για διευκόλυνση έχουμε διώξει τους εκθέτες (1)
- Προσέξτε τις παλιές τιμές της μεταβλητής στο σύστημα τον εξισώσεων
- Για να απλοποιήσουμε την περιγραφή της εξίσωσης θα τη μελετήσουμε για συγκεκριμένες τιμές του συντελεστή προσέγγισης του χρόνουf (f = 0, 1, 0.5)

Ρητό σχήμα (Explicit)

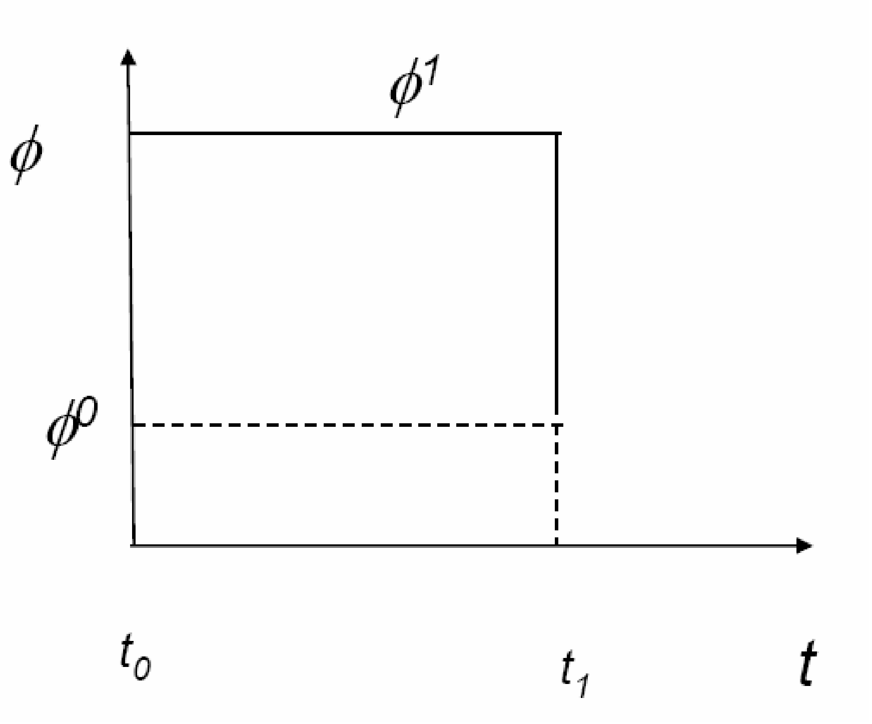
- Explicit ονομάζεται το σχήμα που προκύπτει θεωρώντας f = 0



Προφίλ που υποτίθεται για κάθε χρονικό βήμα

Άρητό σχήμα (Implicit)

• Άρητο (Implicit) ονομάζεται το σχήμα που προκύπτει θεωρώντας f = 1



Προφίλ που υποτίθεται για κάθε χρονικό βήμα

Άρητο σχήμα (Implicit): Διακριτές εξισώσεις

$$a_P\phi_P = \sum_{\text{nb}} a_{\text{nb}}\phi_{\text{nb}} + b + a_P^0\phi_P^0$$

$$\begin{aligned}
a_E &= \frac{\Gamma_e \Delta y}{(\delta x)_e} \\
a_W &= \frac{\Gamma_w \Delta y}{(\delta x)_w} \\
a_N &= \frac{\Gamma_n \Delta x}{(\delta y)_n} \\
a_S &= \frac{\Gamma_s \Delta x}{(\delta y)_s} \\
a_P^0 &= \frac{\rho \Delta \mathcal{V}}{\Delta t} \\
a_P &= \sum_{\text{nb}} a_{\text{nb}} - S_P \Delta \mathcal{V} + a_P^0 \\
b &= S_C \Delta \mathcal{V}
\end{aligned}$$

- Νέο γραμμικό αλγεβρικό σύστημα

Ιδιότητες του άρητου σχήματος

• Το γραμμικό σύστημα αλγεβρικών εξισώσεων στο τρέχον χρονικό βήμα πρέπει να λυθεί

• Όταν $\Delta t \to \infty$, ξαναβρίσκουμε τις εξισώσεις της μόνιμης κατάστασης

• Όταν η λύση γίνεται μόνιμη ισχύει ότι $\varphi_P = \varphi^0_P$. Σε αυτό το όριο, ξαναβρίσκουμε τις σταθερές διακριτές εξισώσεις.

» Η μόνιμη κατάσταση (Steady state) δεν εξαρτάτε από την ιστορία των προηγούμενων χρονικών βημάτων

Θα δείξουμε αργότερα ότι το σφάλμα αποκοπής είναι τάξης $O(\Delta t)$

Ιδιότητες του άρητου σχήματος (συνέχεια)

- Σημειώστε ότι: $a_P = \sum_{\mathrm{nb}} a_{\mathrm{nb}} + a_P^0.$

- Αυτό δείχνει ότι η τιμή της φ είναι κλεισμένη από τις γειτονικές της στο τρέχον χρονικό βήμα και από την τιμή στο προηγούμενο χρόνο, όπως αναμένεται για παραβολικές εξισώσεις

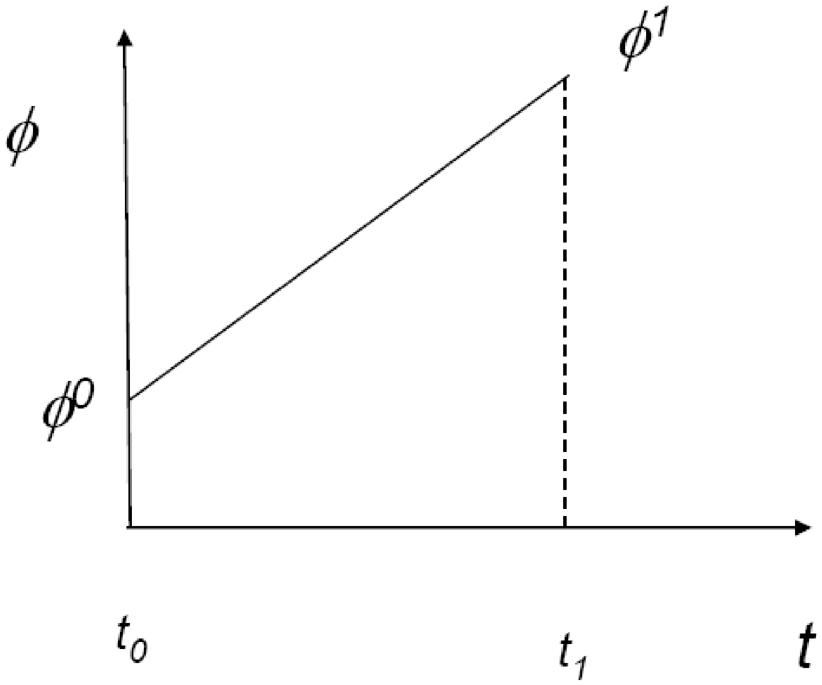
- Το κριτήριο Scarborough ικανοποιείται

- Μπορεί να δειχθεί ότι το άρητο σχήμα είναι πάντοτε σταθερό (unconditionally stable). Μπορούμε να χρησιμοποιούμε όσο μεγάλα χρονικά βήματα θέλουμε και η επαναληπτική μέθοδο πάντα να συγκλίνει

- Πρέπει να κρατάμε το χρονικό βήμα μικρό για να βρούμε ακριβείς λύσεις

Σχήμα Crank-Nicholson

- Το σχήμα Crank-Nicholson χρησιμοποιεί f = 0.5



Υποθέτουμε γραμμικό προφίλ για την φ μεταξύ των χρονικών βημάτων

Σχήμα Crank-Nicholson: Διακριτές εξισώσεις

$$a_P \phi_P = \sum_{\text{nb}} a_{\text{nb}} \left(0.5\phi_{\text{nb}} + 0.5\phi^0_{\text{nb}}\right) + b + \left(a^0_P - 0.5\sum_{\text{nb}} a_{\text{nb}}\right)\phi^0_P$$

$$\begin{aligned}
a_E &= \frac{\Gamma_e \Delta y}{(\delta x)_e} \\
a_W &= \frac{\Gamma_w \Delta y}{(\delta x)_w} \\
a_N &= \frac{\Gamma_n \Delta x}{(\delta y)_n} \\
a_S &= \frac{\Gamma_s \Delta x}{(\delta y)_s} \\
a^0_P &= \frac{\rho \Delta \mathcal{V}}{\Delta t} \\
a_P &= 0.5\sum_{\text{nb}} a_{\text{nb}} - 0.5 S_P \Delta \mathcal{V} + a^0_P \\
b &= 0.5\left(\left(S_C + S^0_C\right) + S^0_P \phi^0_P\right)\Delta \mathcal{V}
\end{aligned}$$

- Σύστημα διακριτών εξισώσεων για το τρέχων χρονικό βήμα

Ιδιότητες του σχήματος Crank-Nicholson

- Το γραμμικό αλγεβρικό σύστημα δημιουργείται στο τρέχων χρονικό βήμα – άρα χρειάζεται γραμμικό επιλυτή.
- Όταν έχουμε μόνιμη ροή, $\varphi_P = \varphi^0_P$. Σε αυτό το όριο καταλήγουμε στις σταθερές διακριτές εξισώσεις.
  » Η μόνιμη κατάσταση δεν εξαρτάτε από τα παλιότερα χρονικά βήματα
  » Περιμένουμε την ίδια λύση όπως όταν λύνουμε τις αρχικές εξισώσεις μόνιμης κατάστασης με τη μέθοδο ‘time marching’
- Θα δούμε αργότερα ότι το λάθος αποκοπής είναι τάξης $O(\Delta t^2)$

Ιδιότητες του σχήματος Crank-Nicholson (συνέχεια)

$$a_P\phi_P = \sum_{\text{nb}} a_{\text{nb}}\left(0.5\phi_{\text{nb}} + 0.5\phi_{\text{nb}}^0\right) + b + \left(a_P^0 - 0.5\sum_{\text{nb}} a_{\text{nb}}\right)\phi_P^0$$

- Τι συμβαίνει αν $a_P^0 < 0.5\sum_{\text{nb}} a_{\text{nb}}$
- Μπορεί να δειχθεί ότι η μέθοδος Crank-Nicholson είναι πάντα σταθερή. Όμως, αν το χρονικό βήμα είναι πολύ μεγάλο μπορεί να εμφανιστούν ασταθής λύσεις (oscillatory solutions, oscillations)

Λάθος αποκοπής: Χωρικές προσεγγίσεις

• Έστω ότι η μέση τιμή του J_e στην πλευρά του όγκου ελέγχου υπολογίζεται στο μέσο την πλευράς

• Ο όρος πηγής υπολογίζεται από την τιμή στο μέσω του κελιού:

$$\bar{S}\Delta V = \left(S_C + S_P\phi_P\right)\Delta V$$

• Η κλίση στην πλευρά του κελιού για την ποσότητα φ υπολογίζεται από την γραμμική μεταβολή της τιμής της στα γειτονικά κέντρα των κελιών:

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_e = \frac{\phi_E - \phi_P}{\delta x_e}$$

• Ποιο είναι το λάθος αποκοπής αυτών των προσεγγίσεων;

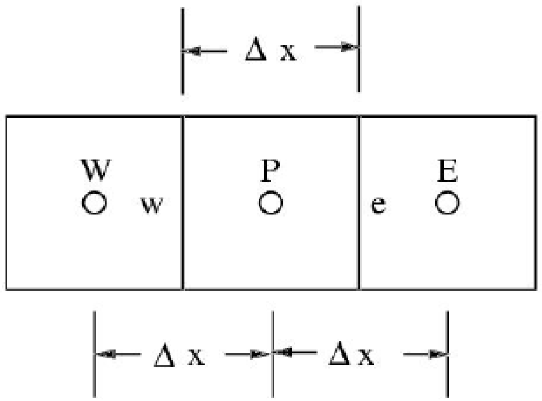
Προσέγγιση μέσης τιμής

- Θεωρούμε την προσέγγιση σε μία διάσταση και για ομοιόμορφο πλέγμα.

- Ποιο είναι το λάθος του να υπολογίζουμε την μέση τιμή της ποσότητας στην πλευρά (ή σε όλον όγκο) από τις τιμές στα κέντρα των κελιών;

- Βρίσκουμε το λάθος αποκοπής αναλύοντας σε σειρές Taylor γύρω από το σημείο P

$$\phi(x) = \phi_P + (x - x_P)\left(\frac{d\phi}{dx}\right)_P + \frac{(x-x_P)^2}{2!}\left(\frac{d^2\phi}{dx^2}\right)_P + \frac{(x-x_P)^3}{3!}\left(\frac{d^3\phi}{dx^3}\right)_P + O\left((\Delta x)^4\right)$$



Προσέγγιση μέσης τιμής (συνέχεια)

- Ολοκληρώνουμε στον όγκο ελέγχου:

$$
\begin{aligned}
\int_{x_w}^{x_e} \phi(x)\, dx &= \phi_P \int_{x_w}^{x_e} dx + \left(\frac{d\phi}{dx}\right)_P \int_{x_w}^{x_e} (x - x_P) dx \\
&+ \left(\frac{d^2\phi}{dx^2}\right)_P \int_{x_w}^{x_e} \frac{(x - x_P)^2}{2!} dx + O\left((\Delta x)^4\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\int_{x_w}^{x_e} \phi(x)\, dx &= (\Delta x)\phi_P + \frac{1}{2}\left((x_e - x_P)^2 - (x_w - x_P)^2\right)\left(\frac{d\phi}{dx}\right)_P \\
&+ \frac{1}{6}\left((x_e - x_P)^3 - (x_w - x_P)^3\right)\left(\frac{d^2\phi}{dx^2}\right)_P \\
&+ O\left((\Delta x)^4\right)
\end{aligned}
$$

Προσέγγιση μέσης τιμής (συνέχεια)

- Προχωρούμε την ολοκλήρωση για να βρούμε:

$$\int_{x_w}^{x_e} \phi\left(x\right) dx = (\Delta x)\phi_P + \frac{1}{24}\left((\Delta x)^3\right)\left(\frac{d^2\phi}{dx^2}\right)_P + O\left((\Delta x)^4\right)$$

- Διαιρώντας με Δχ:

$$\overline{\phi} = \frac{1}{\Delta x}\int_{x_w}^{x_e} \phi\left(x\right) dx = \phi_P + O\left((\Delta x)^2\right)$$

- Άρα, η κάθε τιμή $\overline{\phi} = \phi_P$ είναι δεύτερης τάξης ακρίβειας.

Προσέγγιση διαφορικού

• Για να υπολογίσουμε την ποσότητα $\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_e$ αναλύουμε σε σειρά Taylor γύρω από την πλευρά ‘e’

$$\phi_E = \phi_e + \frac{\Delta x}{2}\left(\frac{d\phi}{dx}\right)_e + \frac{(\Delta x)^2}{8}\left(\frac{d^2\phi}{dx^2}\right)_e + \frac{(\Delta x)^3}{48}\left(\frac{d^3\phi}{dx^3}\right)_e + O\left((\Delta x)^4\right)$$

$$\phi_P = \phi_e - \frac{\Delta x}{2}\left(\frac{d\phi}{dx}\right)_e + \frac{(\Delta x)^2}{8}\left(\frac{d^2\phi}{dx^2}\right)_e - \frac{(\Delta x)^3}{48}\left(\frac{d^3\phi}{dx^3}\right)_e + O\left((\Delta x)^4\right)$$

• Αφαιρώντας κατά μέλη βρίσκουμε: $\left(\frac{d\phi}{dx}\right)_e = \frac{\phi_E - \phi_P}{\Delta x} + O\left((\Delta x)^2\right)$

• Άρα, η υπόθεση του γραμμικού προφίλ οδηγεί σε προσέγγιση δεύτερης τάξης

Λάθος αποκοπής χρονικής διακριτοποίησης: Σχήμα Implicit

- Η τιμή στο κέντρο του όγκου ελέγχου (ρφ) = $(\rho\phi)_P$ για δύο χρονικά βήματα είναι:
  - » ίδια όπως η προσέγγιση μέσης τιμής
  - » άρα, αντιπροσωπεύει προσέγγιση δεύτερης τάξης
- Η τιμή του όρου πηγής στο τρέχον χρονικό βήμα υπερέχει από τα προηγούμενα χρονικά βήματα
- Ποιο είναι το λάθος αποκοπής αυτού του όρου;

Λάθος αποκοπής του σχήματος Implicit (συνέχεια)

- Έστω ότι θέλουμε να ολοκληρώσουμε στο χρόνο την τιμή της μεταβλητής S(t):

$$\int_{t_0}^{t_1} S(t)dt$$

- Αναλύουμε σε σειρά Taylor γύρω από την τιμή στο νέο χρονικό βήμα (1):

$$S(t) = S^1 + \left(\frac{dS}{dt}\right)^1 (t - t_1) + \left(\frac{d^2S}{dt^2}\right)^1 \frac{(t - t_1)^2}{2} + O\left((\Delta t)^3\right)$$

Λάθος αποκοπής του σχήματος Implicit (συνέχεια)

• Ολοκληρώνουμε στο χρόνο, και διαιρούμε με Δt:

$$\int_{t_0}^{t_1} S(t)dt = S^1 \Delta t + \left(\frac{dS}{dt}\right)^1 \int_{t_0}^{t_1} (t - t_1)\, dt + O\left((\Delta t)^3\right)$$

$$\frac{1}{\Delta t}\int_{t_0}^{t_1} S(t)dt = \overline{S} = S^1 - \left(\frac{dS}{dt}\right)^1 \frac{\Delta t}{2} + O\left((\Delta t)^2\right)$$

• Άρα, υπολογίζοντας την μέση τιμή στο χρονικό βήμα από τη σχέση $\overline{S} = S^1$ είναι πρώτης τάξης προσέγγιση

Επίλογος

- Στη παρούσα διάλεξη

- Ολοκληρώσαμε την ανάλυση των 3 κυρίων σχημάτων χρονικής ολοκλήρωσης
  - »Explicit
  - »Implicit
  - »Crank-Nicholson

- Είδαμε θέματα ακρίβειας για τα μόνιμα και τα χρονικά μεταβαλλόμενα σχήματα