ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΤΜΗΜΑ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΥΔΡΑΥΛΙΚΗΣ ΚΑΙ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝΤΙΚΗΣ ΤΕΧΝΙΚΗΣ

Διάλεξη 11: Ανώτερης τάξης σχήματα στη μόνιμη συναγωγή

Χειμερινό εξάμηνο 2008

Προηγούμενη παρουσίαση...

- Εξετάσαμε μερικά σχήματα πρώτης τάξης που στηρίζονται στην ακριβείς λύση της εξίσωσης αγωγής-συναγωγής
  - » CDS
  - »UDS
  - » Σχήμα Lax-Wendroff
  - » Εκθετικό σχήμα
    - » Υβριδικό σχήμα
    - » Σχήμα Power-law

- Είδαμε την μη-μόνιμη εξίσωση συναγωγής και καταλάβαμε την σημασία της διάχυσης και της διασποράς

Οργάνωση παρουσίασης

- Θα εξετάσουμε μερικά σχήματα ανώτερης τάξης για την εξίσωση συναγωγής

Ανώτερης τάξης σχήματα

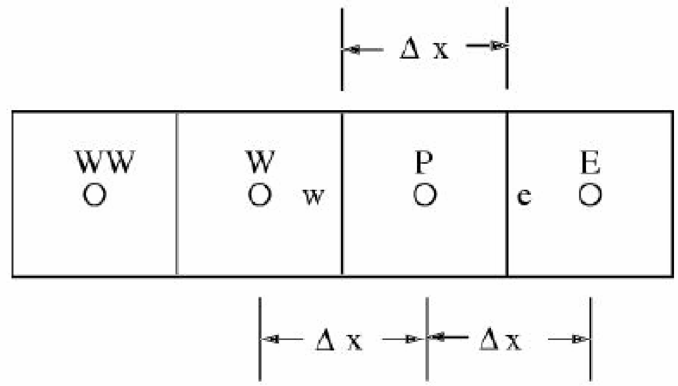
- Ούτε το σχήμα UDS ούτε το CDS είναι ικανοποιητικά
  - » Πολύ έρευνα έχει γίνει για να βρεθούν σχήματα που να είναι τουλάχιστον δεύτερης τάξης στο χώρο
  - » Επίσης, στον έλεγχο χωρικών ασταθειών

- Αρχικά θα δούμε την βάση για να φτιάχνουμε σχήματα ανώτερης τάξης με βάση το ανάπτυγμα της σειράς Taylor

- Έπειτα, στα επόμενα μαθήματα θα δούμε τρόπους να ελέγχουμε τις χωρικές αστάθειες

Αναπτύγματα σειράς Taylor

• Πρώτης τάξης UDS:



$$\phi_e = \phi_P$$

• Μπορούμε να σκεφτούμε ένα λάθος αποκοπής της σειράς Taylor ως εξής:

$$\phi(x) = \phi_P + (x - x_P)\frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{(x - x_P)^2}{2!}\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + O(\Delta x)^3$$

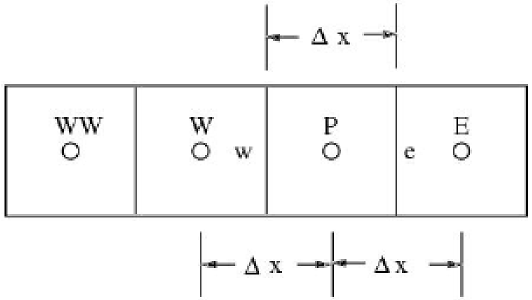
• Τι γίνεται όταν κόψουμε τη σειρά σε μεγαλύτερο όρο;

• Σημειώστε ότι έχουμε χρησιμοποιήσει την απάνεμη (upwinded) ανάπτυξη

Σχήματα δεύτερης τάξης

• Παίρνουμε σειρά Taylor γύρω από το P

$$\phi(x) = \phi_P + (x - x_P)\frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{(x-x_P)^2}{2!}\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + O(\Delta x)^3$$



• Κόβουμε τη σειρά Taylor μετά τον δεύτερο όρο:

$$\phi_e = \phi_P + \frac{\Delta x}{2}\frac{\partial \phi}{\partial x}$$

Λάθος αποκοπής: $O(\Delta x^2)$

• Υπάρχουν πολύ τρόποι για να γράψουμε τη κλίση

» Η κλίση πρέπει να γραφτεί τουλάχιστον για τάξη *$O(\Delta x)$*

» Μπορούμε να γράψουμε την κλίση στο P χρησιμοποιώντας εμπρόσθιες, κεντρικές ή προς τα πίσω διαφορές

Βασικά στοιχεία του σχήματος Fromm

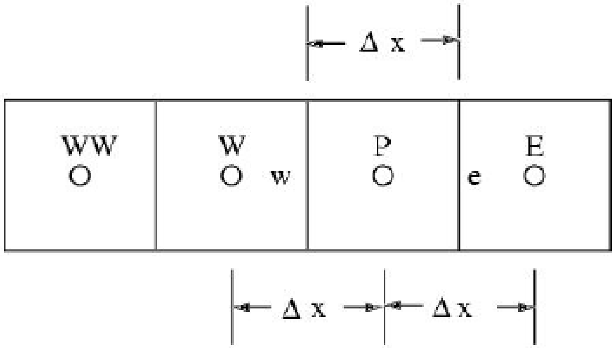
- Κεντρικές διαφορές

Λάθος αποκοπής: $O(\Delta x^2)$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\phi_E - \phi_W}{2\Delta x}$$

- Έτσι:

$$\phi_e = \phi_P + \frac{(\phi_E - \phi_W)}{4}$$



- Προσθέτουμε και αφαιρούμε $\phi_P/4$

$$\phi_e = \phi_P + \frac{(\phi_P - \phi_W)}{4} + \frac{(\phi_E - \phi_P)}{4}$$

Βασικά στοιχεία του σχήματος Beam-Warming

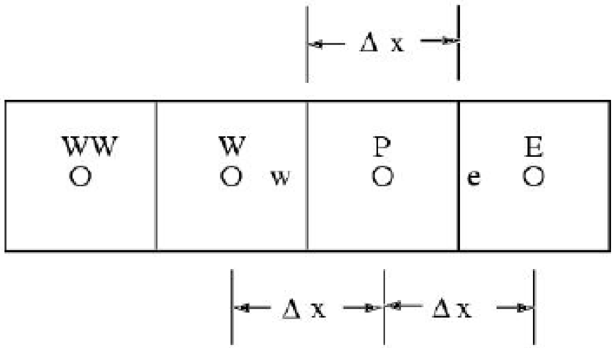
- Σχήμα δεύτερης τάξης:

$$\phi_e = \phi_P + \frac{\Delta x}{2}\frac{\partial \phi}{\partial x}$$

- Γράφουμε την κλίση ως:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\phi_P - \phi_W}{\Delta x}$$

Λάθος αποκοπής: O(Δx)



- Συνθέτοντας:

$$\phi_e = \phi_P + \frac{(\phi_P - \phi_W)}{2}$$

Σχήματα τρίτης τάξης

- Αποκοπή της σειράς Taylor έως την τρίτη τάξη:

$$\phi(x) = \phi_P + (x - x_P)\frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{(x - x_P)^2}{2!}\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}$$

- Πρέπει να γράψουμε τη κλίση $\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_P$ για τουλάχιστον δεύτερη τάξη

- Πρέπει να γράψουμε τη κλίση $\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\right)_P$ για τουλάχιστον πρώτη τάξη

Σχήματα τρίτης τάξης: QUICK

- Quadratic Upwind Interpolation for Convective Kinetics (QUICK):

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{(\phi_E - \phi_W)}{2\Delta x} + O(\Delta x^2)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{(\phi_E + \phi_W - 2\phi_P)}{(\Delta x)^2} + O(\Delta x^2)$$

- Συνδυάζοντας:

$$\phi_e = \phi_P + \frac{(\phi_E - \phi_W)}{4} + \frac{(\phi_E + \phi_W - 2\phi_P)}{8}$$

Λάθος αποκοπής: $O(\Delta x^3)$

QUICK (συνέχεια)

- Μπορούμε να το ξαναγράψουμε ως:

$$\phi_e = \frac{(\phi_E + \phi_P)}{2} - \frac{(\phi_E + \phi_W - 2\phi_P)}{8}$$

Κεντρικές διαφορές

Όρος κύρτωσης

$$\phi_e = \frac{1}{2}(\phi_E + \phi_P) - C(\phi_E + \phi_W - 2\phi_P)$$

Συντελεστής κύρτωσης:
C = 1/8

Συνεχίζοντας την αναπαράσταση

• Μπορούμε να δούμε ότι δεύτερης και τρίτης τάξης σχήματα μπορούν να συνδυαστούν σε μια απλή έκφραση

$$\phi_e = \phi_P + \frac{(1-\kappa)}{4}(\phi_P - \phi_W) + \frac{(1+\kappa)}{4}(\phi_E - \phi_P)$$

- $\kappa = -1$ Beam Warming scheme
- $\kappa = 0$ Fromm scheme
- $\kappa = 1/2$ QUICK
- $\kappa = 1$ Central difference scheme

Συζήτηση

- Αν χρησιμοποιήσουμε τα παραπάνω σχήματα στο πρόβλημα της μόνιμης συναγωγής θα έχουμε χωρικές ανωμαλίες

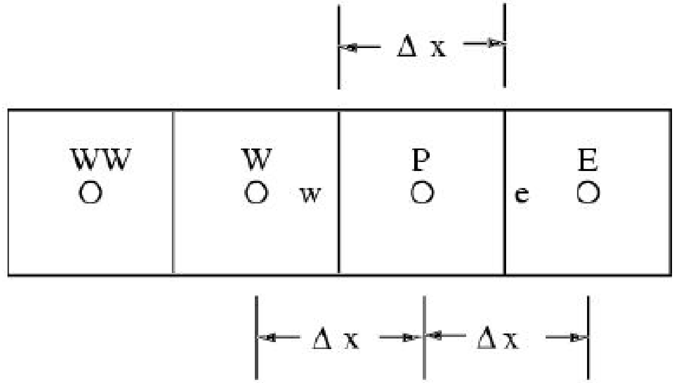
- Αν χρησιμοποιηθούν σε συνδυασμό με το ρητό σχήμα χρονικής ολοκλήρωσης όλα τα παραπάνω σχήματα είναι πάντοτε ασταθή

- Μπορούν να συνδυαστούν με διαφορετικούς τρόπους ώστε να είναι σταθερά:
  - » χρησιμοποιώντας άρητο σχήμα
  - » χρησιμοποιώντας μέθοδο Runge-Kutta πολλαπλών βημάτων
  - » Εισάγοντας επιπλέον όρους από την εξίσωση μοντέλου για να αντισταθμίσουν τους αρνητικούς συντελεστές διάχυσης

Σχήμα Beam-Warming

- Αρχίζει με την εξίσωση:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + u\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{u^2 \Delta t}{2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}$$



- Χρησιμοποιεί για τις τιμές στις πλευρές:

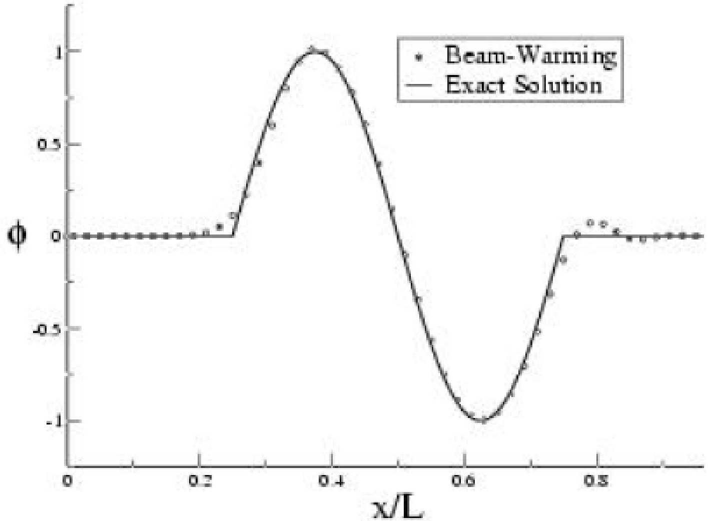
$$\phi_e = \phi_P + \frac{(\phi_P - \phi_W)}{2}$$

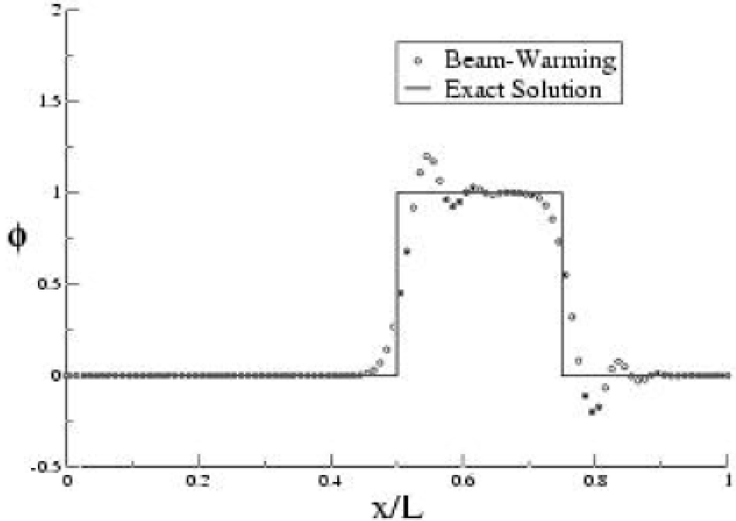
Όρος τεχνητής διάχυσης δεύτερης τάξης

- Αντικαθιστώντας έχουμε:

$$\frac{\phi_P - \phi_P^0}{\Delta t} + u\frac{(\phi_P^0 - \phi_W^0)}{\Delta x} + \frac{u(\Delta x - u\Delta t)}{2}\frac{(\phi_P^0 - 2\phi_W^0 + \phi_{WW}^0)}{(\Delta x)^2} = 0$$

Διάδοση κύματος με το σχήμα Beam-Warming





Παρατηρούμε ότι συμπεριφέρεται όπως και όλα τα σχήματα διασποράς – τα κύματα με ομαλό προφίλ συνάγονται σχετικά καλά, αλλά το τετράγωνο κύμα έχει παραμορφωθεί

Συζήτηση

- Τα πρώτης τάξης σχήματα απάνεμων διαφορών (UDS) εισάγουν αριθμητική διάχυση

- Οι κεντρικές διαφορές (CDS) εισάγουν αριθμητική διασπορά
  - » σε συνδυασμό με ρητό σχήμα χρονικής διακριτοποίησης είναι πάντα ασταθείς (unconditionally unstable)
  - » Και τα άλλα συμμετρικά σχήματα διακριτοποίησης είναι ασταθή και εισάγουν διασπορά

- Τα ανώτερης τάξης και απάνεμα σχήματα με έλεγχο ροής (Higher-order upwind-weighted schemes) πρέπει να σταθεροποιηθούν αν χρησιμοποιηθούν με άρητο σχήμα χρονικής διακριτοποίησης
  - » Σημείωση: Εισάγουν επίσης διασπορά

- Πρέπει να κάνουμε κάτι για να ελέγξουμε τις αστάθειες

Σχήματα με επιπλέον διάχυση

• Είδαμε ότι η τεχνητή διάχυση στα σχήματα απάνεμων διαφορών (UDS) τα σταθεροποιεί όταν χρησιμοποιούνται με ρητά σχήματα χρονικής διακριτοποίησης

• Μερικοί ερευνητές έχουν εισάγει έναν εξωτερικό όρο διάχυσης για να προσομοιάσουν αυτό το χαρακτηριστικό.

• Θέλουμε να κρατήσουμε το σφάλμα αποκοπής σε τάξη $O(\Delta x^2)$ όταν χρησιμοποιούμε σχήματα δεύτερης τάξης.

• Εισάγουμε στην αρχική διαφορική εξίσωση έναν επιπλέον όρο διάχυσης τέταρτης τάξης:

$$(\text{constant})\Delta x^3 \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4}$$

Σημειώστε ότι αυτός ο τεχνητός όρος είναι τάξης $O(\Delta x^3)$ – διατηρεί το λάθος σε τάξη $O(\Delta x^2)$

Σχήματα με επιπλέον διάχυση

• Η αντίστοιχη τιμή στην πλευρά για κεντρικές διαφορές είναι

$$\phi_e = \frac{\phi_P + \phi_E}{2} + \varepsilon_e^{(4)}(\phi_{EE} - 3\phi_E + 3\phi_P - \phi_W)$$

• Κοντά σε κρουστικά κύματα (shocks) και χωρικές ασυνέχειες (discontinuities), πρέπει να προσθέσουμε περισσότερο διάχυση. Συνήθως χρειαζόμαστε έναν όρο διάχυσης δεύτερης τάξης:

$$(\text{constant})\Delta x^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}$$

Τέτοιοι όροι καταστρέφουν την ακρίβεια δεύτερης τάξης του σχήματος – μειώνοντας την σε πρώτη τάξη

Σχήματα με επιπλέον διάχυση

• Οι αντίστοιχες τιμές στη πλευρά του όγκου ελέγχου για κεντρικές διαφορές είναι:

$$\phi_e = \frac{\phi_P + \phi_E}{2} - \varepsilon^{(2)}(\phi_E - \phi_P) + \varepsilon_e^{(4)}(\phi_{EE} - 3\phi_E + 3\phi_P - \phi_W)$$

Από τον όρο διάχυσης δεύτερης τάξης – λάθος Ο(Δx)

Από τον όρο διάχυσης τέταρτης τάξης – λάθος Ο(Δx^2)

• Πως μπορούμε να ανιχνεύσουμε να και ασυνέχειες για να ενεργοποιήσουμε τον όρο διάχυσης δεύτερης τάξης;

• Πως θα επιλέξουμε τα $\varepsilon^{(2)}$ και $\varepsilon^{(4)}$;

Επίλογος

- Στη παρούσα διάλεξη

  Είδαμε μερικά χαρακτηριστικά των σχημάτων διακριτοποίησης ανώτερης τάξης

  » Σχήμα Fromm

  » Beam-Warming

  » QUICK

  »Σχήματα που εισάγουν αριθμητική διάχυση