ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΤΜΗΜΑ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΥΔΡΑΥΛΙΚΗΣ ΚΑΙ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝΤΙΚΗΣ ΤΕΧΝΙΚΗΣ

Διάλεξη 2: Περιγραφή αριθμητικών μεθόδων

Χειμερινό εξάμηνο 2008

Προηγούμενη παρουσίαση...

- Γράψαμε τις εξισώσεις διατήρησης σε ένα όγκο ελέγχου
- Σχηματίσαμε μια γενική εξίσωση μεταφοράς
- Διαπιστώσαμε ότι όλες οι διεργασίες μεταφοράς μπορούν να ομογενοποιηθούν σε όρους:

  Αποθήκευσης

  Διάχυσης

  Συναγωγής

  Παραγωγής

Οργάνωση παρουσίασης

- Εξέταση σημαντικών κλάσεων μερικών διαφορικών εξισώσεων και κατανόηση της συμπεριφοράς τους

- Εφαρμογή στην γενική εξίσωση μεταφοράς

- Περιγραφή των βασικών στοιχείων των αριθμητικών μεθόδων για την επίλυση της γενικής εξίσωσης μεταφοράς

Χαρακτηριστικά της γενικής εξίσωσης μεταφοράς

$$\frac{\partial(\rho\varphi)}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{V} \varphi = \nabla \cdot \left(\Gamma \nabla \varphi\right) + S$$

Αποθήκευση *Συναγωγή* *Διάχυση* *Παραγωγή*

Όπου: φ είναι μια ειδική ποσότητα (πχ. θερμότητα ανά μονάδα μάζας)

V : διάνυσμα ταχύτητας

Γ : Συντελεστής διάχυσης

ρ: πυκνότητα

S: όρος πηγής (πχ. Παραγωγή θερμότητας ανά μονάδα όγκου W/m^3)

Χαρακτηριστικά μερικών διαφορικών εξισώσεων (ΜΔΕ)

Θεωρούμε την δεύτερης τάξης μερική διαφορική εξίσωση για την ποσότητα *φ(x,y)*:

$$a\varphi_{xx} + 2b\varphi_{xy} + c\varphi_{yy} + d\varphi_x + e\varphi_y + f\varphi + g = 0$$

Υποθέτουμε ότι οι συντελεστές a, b, c, d, e και f είναι γραμμικοί (όχι συναρτήσεις της φ), αλλά μπορούν να είναι συναρτήσεις του (x,y)

Η παράσταση: $$D = b^2 - 4ac$$

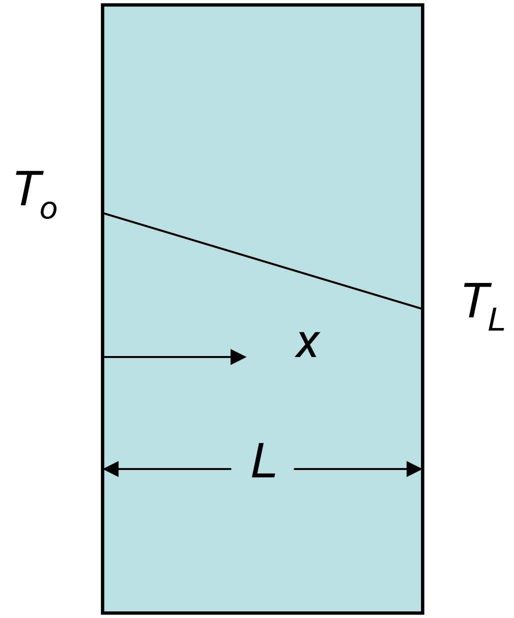
D < 0 Ελλειπτική ΜΔΕ

D = 0 Παραβολική ΜΔΕ

D > 0 Υπερβολική ΜΔΕ

Θεωρούμε αγωγή θερμότητας σε επίπεδη πλάκα σε μία διάσταση (1-D) με σταθερή θερμική αγωγιμότητα:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial}{\partial x}\right)=0$$



Οριακές συνθήκες

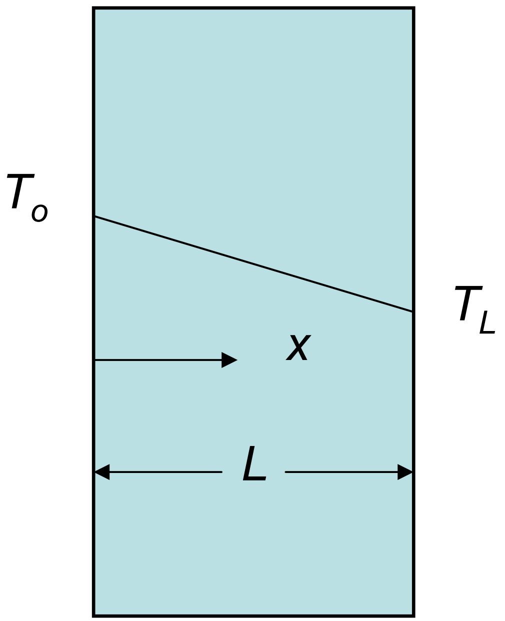
$$T(0)=T_o$$
$$T(L)=T_L$$

Λύση:

$$T(x)=T_o+\frac{T_L-T_o}{L}x$$

Ελλειπτικές ΜΔΕ (συνέχεια)

$$T(x) = T_o + \frac{T_L - T_o}{L} x$$



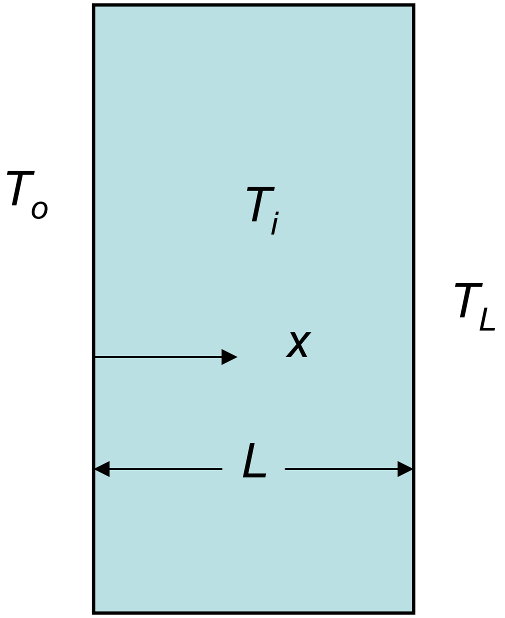
• Η λύση *T(x)* επηρεάζεται και από τις δύο οριακές συνθήκες

• Όταν δεν υπάρχους όροι πηγής, η λύση *T(x)* μπορεί να πάρει τιμές μεταξύ των δύο οριακών

• Πρέπει το αριθμητικό σχήμα να διατηρεί αυτές τις δύο ιδιότητες.

Θεωρούμε την χρονικά μεταβαλλόμενη μονοδιάστατη ροή ρευστού σε διάκενο με σταθερές ιδιότητες:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$



Οριακές και αρχικές συνθήκες

$$T(x,0) = T_i(x)$$
$$T(0,t) = T_0$$
$$T(L,t) = T_0$$

$$T(x,t) = T_0 + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-\frac{an^2\pi^2}{L^2}t}$$

Λύση:

$$B_n = \frac{2}{L}\int_0^L \left(T_i(x) - T_0\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx, n = 1, 2, 3, \ldots$$

Παραβολικές ΜΔΕ (συνέχεια)

• Η λύση *T(x,t)* επηρεάζεται από τις οριακές συνθήκες όπως ακριβώς και οι ελλειπτικές ΜΔΕ.

• Χρειαζόμαστε μόνο την αρχική συνθήκη *T(x,0)*. Δεν χρειαζόμαστε μελλοντικές συνθήκες.

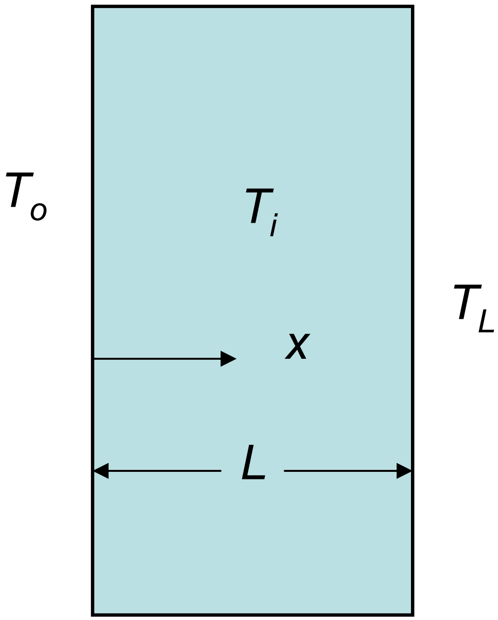
•Οι αρχικές συνθήκες επηρεάζουν μόνο μελλοντικές συνθήκες όχι συνθήκες στο παρελθόν.

• Οι αρχικές συνθήκες επηρεάζουν όλα τα χωρικά σημεία στο μέλλον.

• Μόνιμες συνθήκες για *t* -> ∞. Στο όριο αυτό η εξίσωση είναι καθαρά ελλειπτική ΜΔΕ.

•Όταν δεν υπάρχουν όροι πηγής, η θερμοκρασία είναι φραγμένη από τις αρχικές και οριακές συνθήκες.

•Το πρόβλημα μπορεί να λυθεί και με επίλυση τύπου Marching

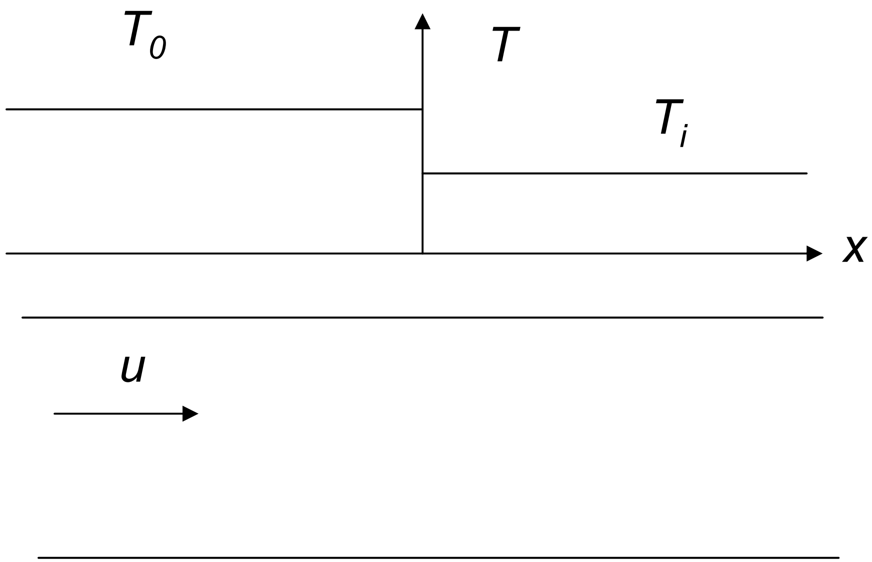


$$T(x,t) = T_0 + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-\frac{an^2\pi^2}{L^2}t}, B_n = \frac{2}{L}\int_0^L \left(T_i(x) - T_0\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx, n = 1,2,3,\ldots$$

Υπερβολικές ΜΔΕ

Θεωρούμε την συναγωγή θερμοκρασίας όπου αλλάζει βαθμιδωτά:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho C_p T) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho C_p u T) = 0$$



Οριακές και αρχικές συνθήκες

$$T(x,0) = T_i$$

$$T(x \le 0, t) = T_0$$

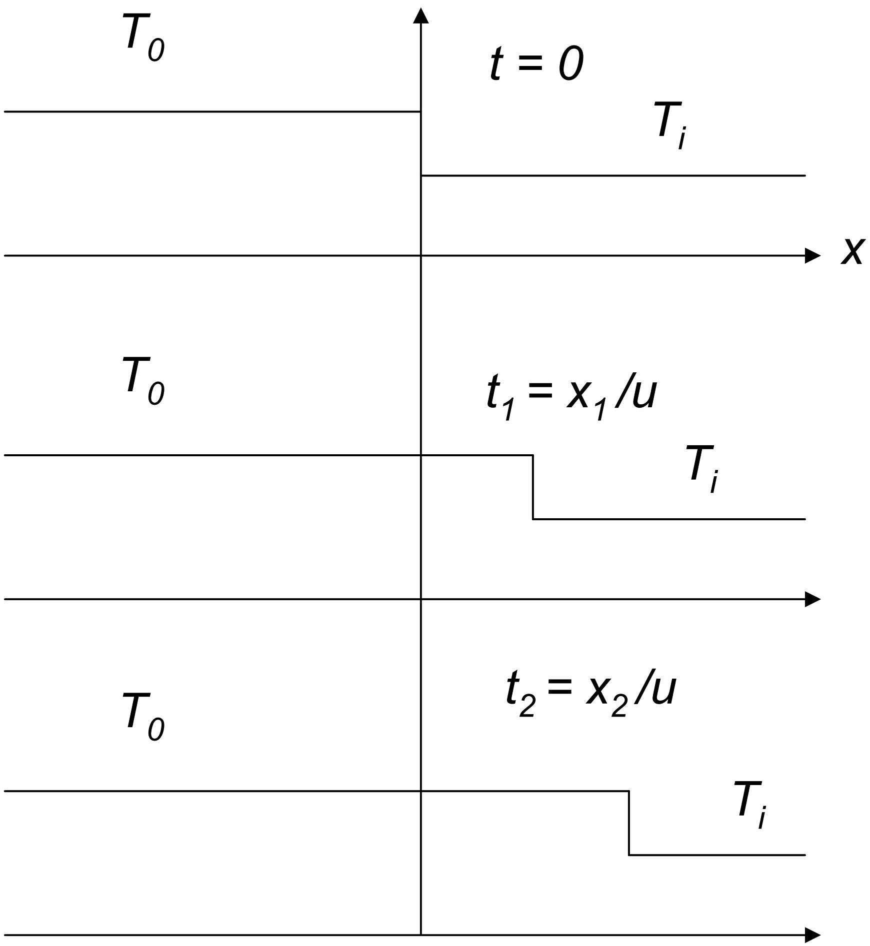
$$T(x,t) = T((x-ut),0)$$

Λύση:

$$T(x,t) = T_i \;\; \gamma\iota\alpha \;\; t < \frac{x}{u}$$

$$= T_0 \;\; \gamma\iota\alpha \;\; t \ge \frac{x}{u}$$

Υπερβολικές ΜΔΕ (συνέχεια)



$$T(x,t) = T_i \;\; \gamma\iota\alpha \;\; t < \frac{x}{u}$$
$$= T_0 \;\; \gamma\iota\alpha \;\; t \geq \frac{x}{u}$$

- Οι ανάντη (upstream) συνθήκες μπορούν να επηρεάσουν τη λύση σε μια θέση *x*; οι κατάντη (downstream) συνθήκες όχι
- Οι συνθήκες εισόδου διαδίδονται με πεπερασμένη ταχύτητα *u*
- Οι συνθήκες εισόδου δεν γίνονται αντιληπτές στη θέση *x* πριν από τη χρονική στιγμή *x/ u*

Συσχέτιση ΜΔΕ με τη γενική εξίσωση μεταφοράς

$$\frac{\partial(\rho\varphi)}{\partial t}+\nabla\cdot\rho\mathbf{V}\varphi=\nabla\cdot\left(\Gamma\nabla\varphi\right)+S$$

- Περιέχει και τις τρεις κανονικές μορφές ΜΔΕ (ελλειπτικές, παραβολικές και υπερβολικές)
- Αν η ροή είναι μόνιμη και ο αριθμός *Re* είναι μικρός έχουμε την ελλειπτική εξίσωση
- Αν ο συντελεστής διάχυσης είναι ίσος με μηδέν, έχουμε την υπερβολική εξίσωση
- Αν η ροή είναι χρονικά μεταβαλλόμενη και ο αριθμός *Re* είναι μικρός έχουμε την παραβολική εξίσωση
- Για μικτές περιοχές έχουμε μικτή συμπεριφορά

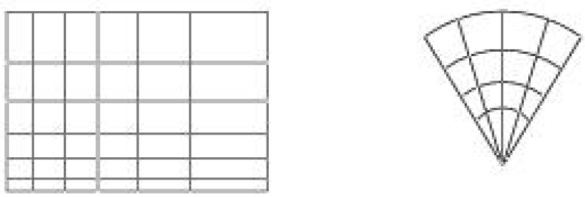
Βασικά στοιχεία επίλυσης με CFD

1. Δημιουργία γεωμετρίας
2. Διακριτοποίηση πεδίου επίλυσης (δημιουργία πλέγματος)
3. Διακριτοποίηση των εξισώσεων επίλυσης
4. Λύση των διακριτών εξισώσεων; πρέπει πιθανών να ληφθούν υπόψη μη-γραμμικότητες και συνδέσεις μεταξύ των εξισώσεων
5. Παρουσίαση των αποτελεσμάτων με υπολογιστικά πακέτα γραφικών και επεξεργασίας δεδομένων

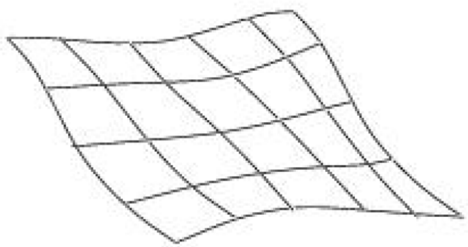
Διαδικασία επίλυσης

1. Η αναλυτική λύση μας δίνει $\varphi(x,y,z,t)$. Η αριθμητική λύση δίνει την τιμή της φ σε διακριτά σημεία το πλέγματος
2. «Διακριτοποίηση» ονομάζουμε την διαδικασία προσέγγισης των μερικών διαφορικών εξισώσεων σε διακριτές αλγεβρικές εξισώσεις
3. Η διαδικασία της διακριτοποίησης περιλαμβάνει
   » Διακριτοποίηση του χώρου δημιουργώντας κάποιο πλέγμα
   » Διακριτοποίηση των εξισώσεων σε συστήματα διακριτών αλγεβρικών εξισώσεων

Τύποι πλεγμάτων

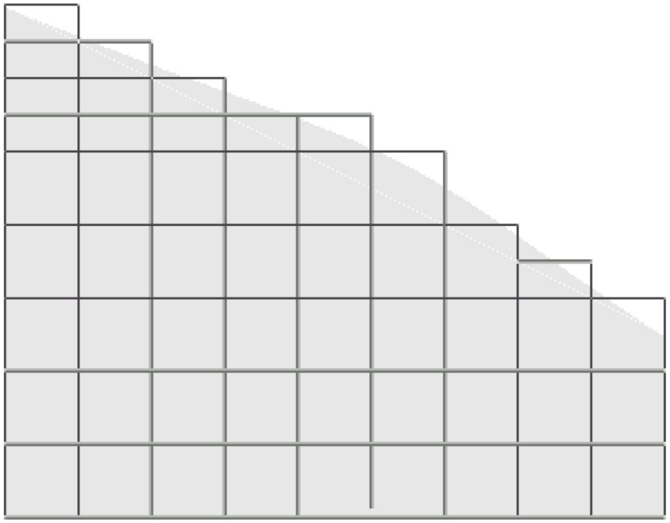


(a)



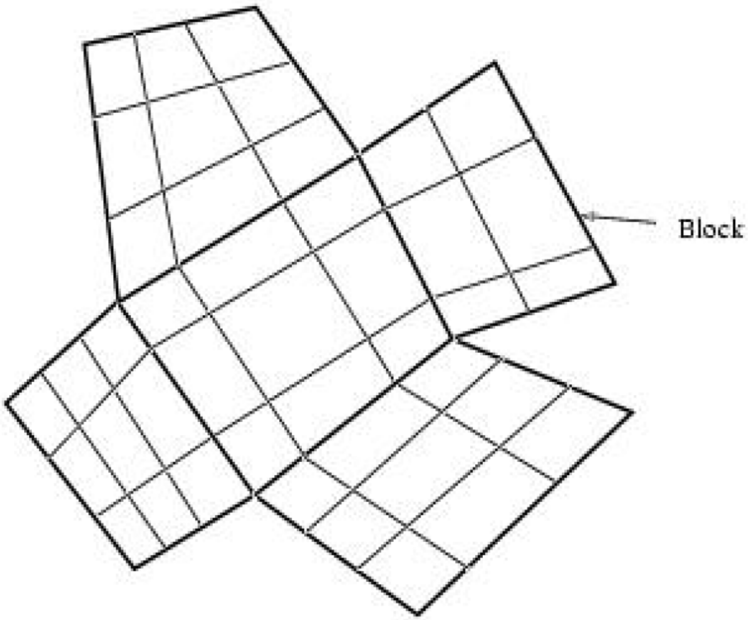
(b)

Κανονικά πλέγματα και πλέγματα ‘body-fitted’

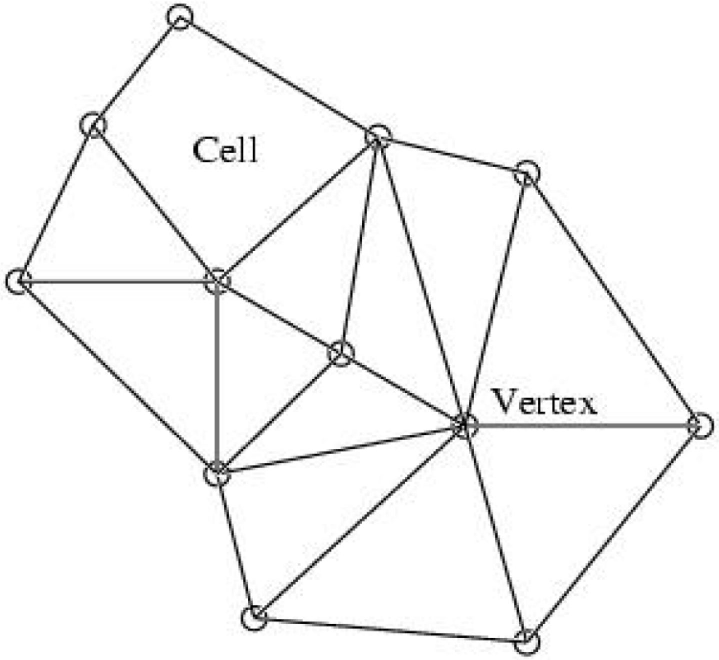


Βαθμιδωτή αναπαράσταση περίπλοκης γεωμετρίας

Τύποι πλεγμάτων (συνέχεια)

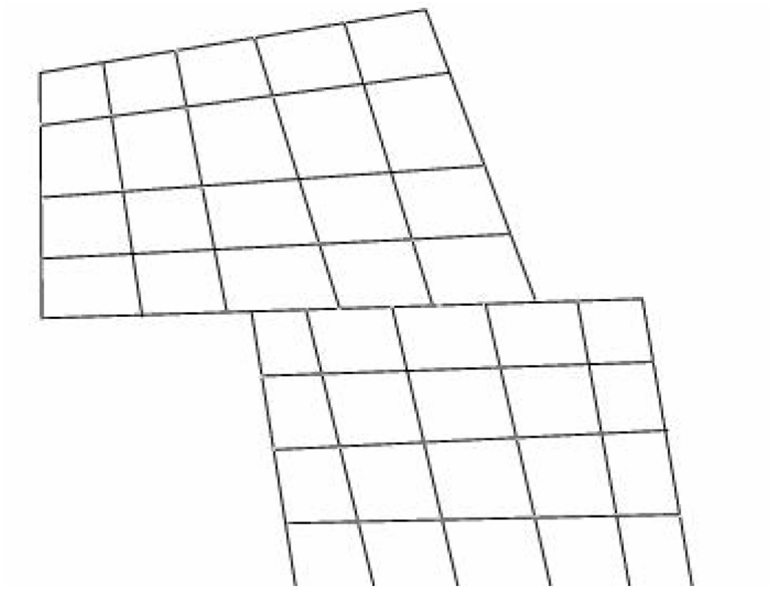


Δομημένα κατά block
πλέγματα



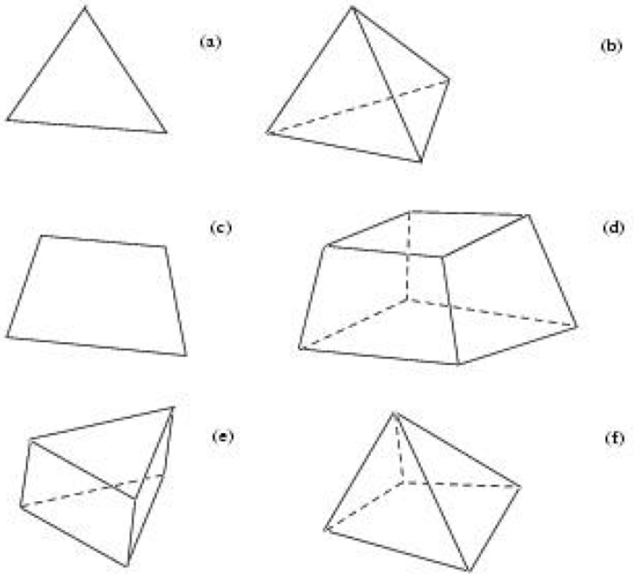
Αδόμητα (unstructured)
πλέγματα

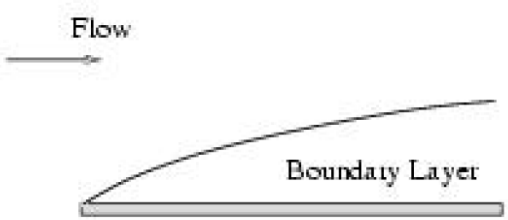
Τύποι πλεγμάτων (συνέχεια)

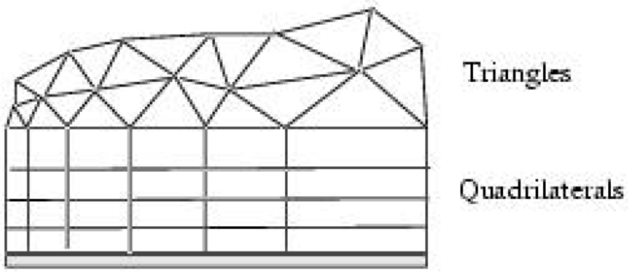


Πλέγματα με κελιά που δεν συμπίπτουν οι ακμές τους

Σχήματα κελιών

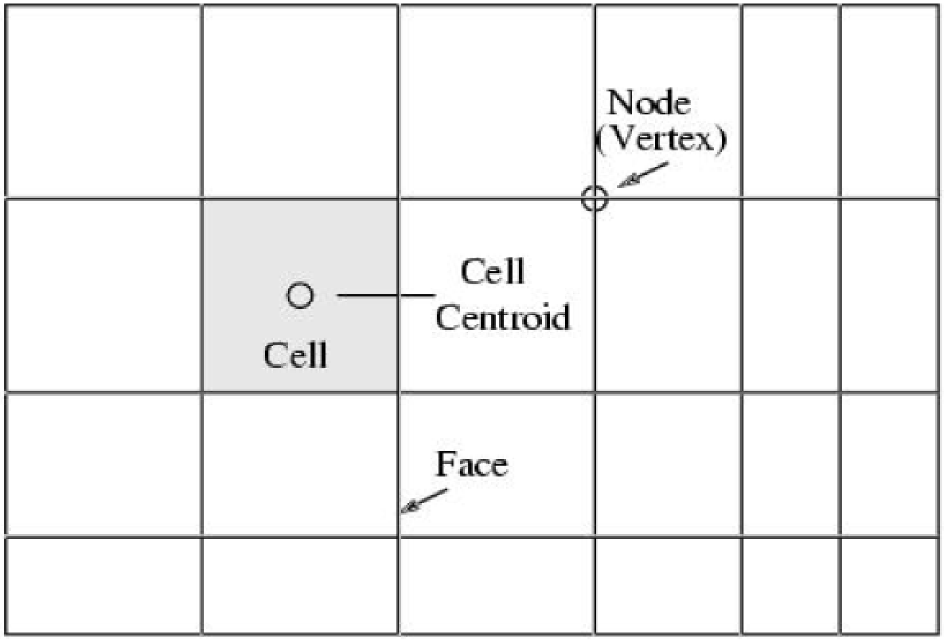






Υβριδικά πλέγματα

Ορολογία πλεγμάτων



Υπάρχουν μέθοδοι πεπερασμένων όγκων που

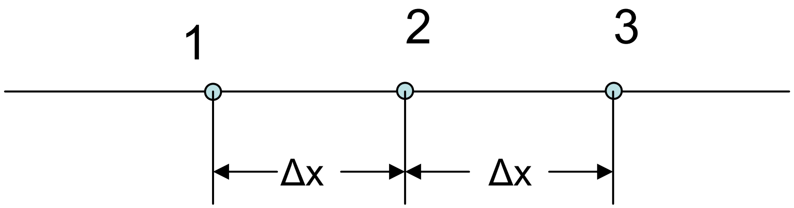
- αποθηκεύουν το φ στο κέντρο
- αποθηκεύουν το φ στους κόμβους

Βασικά στοιχεία μεθόδου πεπερασμένων διαφορών

Θεωρούμε την εξίσωση διάχυσης:

$$\Gamma \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + S = 0$$

Βήμα 1: Διακριτοποιούμε το χώρο χρησιμοποιώντας ένα πλέγμα. Οι άγνωστοι τοποθετούνται στις ακμές (nodes)



Βήμα 2: Αναπτύσσουμε τη φ σε σειρά Taylor γύρω από το σημείο 2

$$\varphi_1 = \varphi_2 - \Delta x \left(\frac{d\varphi}{dx} \right)_2 + \frac{(\Delta x)^2}{2} \left(\frac{d^2\varphi}{dx^2} \right)_2 + O\left((\Delta x)^3 \right)$$

$$\varphi_3 = \varphi_2 + \Delta x \left(\frac{d\varphi}{dx} \right)_2 + \frac{(\Delta x)^2}{2} \left(\frac{d^2\varphi}{dx^2} \right)_2 + O\left((\Delta x)^3 \right)$$

Βήμα 3: Αφαιρούμε τις εξισώσεις :

$$\left(\frac{d\varphi}{dx} \right)_2 = \frac{\varphi_3 - \varphi_1}{2\Delta x} + O\left((\Delta x)^2 \right)$$

Μέθοδος πεπερασμένων διαφορών (συνέχεια)

Βήμα 4: Προσθέτουμε τις εξισώσεις:

$$\left(\frac{d^2\varphi}{dx^2}\right)_2 = \frac{\varphi_1 + \varphi_3 - 2\varphi_2}{\Delta x^2} + O\left(\left(\Delta x\right)^2\right)$$

Λάθος αποκοπής δεύτερης τάξης

Βήμα 5: Διώχνουμε τους όρους αποκοπής:

$$\Gamma\left(\frac{d^2\varphi}{dx^2}\right)_2 = \Gamma\frac{\varphi_1 + \varphi_3 - 2\varphi_2}{\Delta x^2}$$

Βήμα 6: Προσδιορίζουμε τους όρους πηγής στο σημείο 2:

$$S_2 = S\left(\varphi_2\right)$$

Μέθοδος πεπερασμένων διαφορών (συνέχεια)

Βήμα 7: Συμπληρώνουμε την διακριτή εξίσωση:

$$\frac{2\Gamma}{(\Delta x)^2}\varphi_2 = \frac{\Gamma}{(\Delta x)^2}\varphi_1 + \frac{\Gamma}{(\Delta x)^2}\varphi_3 + S_2$$

Σχόλια:

» Μπορούμε να γράψουμε μία τέτοια εξίσωση για κάθε σημείο του πλέγματος

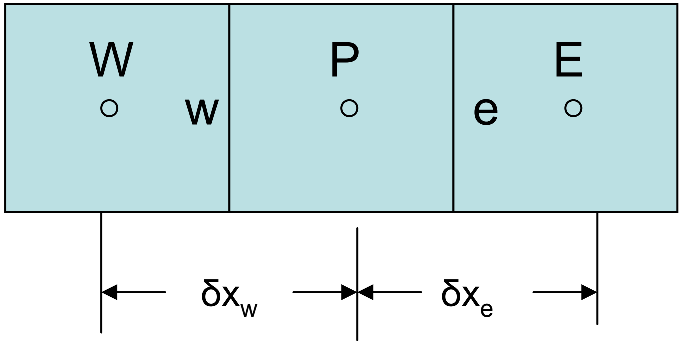
» Οι οριακές συνθήκες μας δίνουν οριακές τιμές για τη *φ*

» Έχουμε ακρίβεια δεύτερης τάξης

» Χρειαζόμαστε μία μέθοδο επίλυσης συστήματος πεπλεγμένων γραμμικών εξισώσεων

Βασικά στοιχεία μεθόδου πεπερασμένων όγκων

Θεωρούμε την εξίσωση διάχυσης:



$$\Gamma \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + S = 0$$

Βήμα 1: Ολοκληρώνουμε στον όγκο ελέγχου:

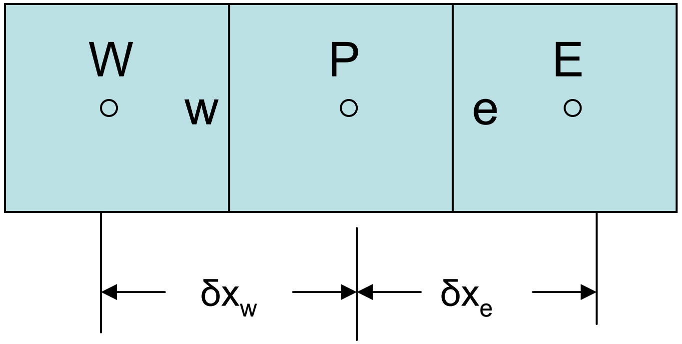
$$\int_w^e \frac{d}{dx}\left(\Gamma \frac{d\varphi}{dx}\right) dx + \int_w^e S dx = 0$$

$$\left(\Gamma \frac{d\varphi}{dx}\right)_e - \left(\Gamma \frac{d\varphi}{dx}\right)_w + \int_w^e S dx = 0$$

Μέθοδος πεπερασμένων όγκων (συνέχεια)

Βήμα 2: Υποθέτουμε γραμμικό προφίλ μεταξύ των κέντρων των κελιών για την φ και υποθέτουμε ότι η πηγή S μεταβάλλετε γραμμικά στον όγκο ελέγχου (CV)

$$\frac{\Gamma_e\left(\varphi_E-\varphi_P\right)}{\delta x_e}-\frac{\Gamma_w\left(\varphi_P-\varphi_W\right)}{\delta x_w}+\bar{S}\Delta x=0$$



Βήμα 3: Συγκεντρώνουμε παράγοντες και σχηματίζουμε την αλγεβρική εξίσωση:

$$a_P\varphi_P=a_E\varphi_E+a_W\varphi_W+b$$

$$a_E=\Gamma_e/\delta x_e,\quad a_W=\Gamma_w/\delta x_w$$

$$a_P=a_E+a_W,\quad b=\bar{S}\Delta x$$

Σχόλια

• Η διαδικασία αρχίζει από την αρχή διατήρησης στο υπολογιστικό κελί. Βρίσκουμε τη ποσότητα φ έτσι ώστε να ικανοποιείται η αρχή διατήρησης. Έτσι, ανεξαρτήτως του πόσο αραιό είναι το πλέγμα, η μέθοδος των πεπερασμένων όγκων πάντα ικανοποιεί την αρχή διατήρησης

• Οπωσδήποτε, αυτό δεν εξασφαλίζει ακρίβεια...

• Η διαδικασία της διακριτοποίησης εισάγει ισορροπία μεταξύ ροών για τις τιμές στις πλευρές της ροής διάχυσης, για παράδειγμα:

$$-\Gamma_e \frac{d\varphi}{dx}_e$$

• Δεν πρέπει να έχουμε υποθέσει ότι τα προφίλ των φ και S είναι ακριβώς ίδια.

Σχόλια (συνέχεια)

- Όπως και στη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων πρέπει επίσης να επιλύσουμε ένα τελικό σύστημα πεπλεγμένων διαφορικών εξισώσεων

- Παρόλο που οι μέθοδοι των πεπερασμένων διαφορών και των πεπερασμένων όγκων χρησιμοποιούν διαφορετικές διαδικασίες για να καταλήξουν στο τελικό σύστημα εξισώσεων, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την ίδια τεχνική επίλυσης για τη λύση των διακριτοποιημένων εξισώσεων.

Επίλογος

Σε αυτή τη διάλεξη

- Θεωρήσαμε ΜΔΕ διαφορετικών τύπων και εξετάσαμε την συμπεριφορά τους
- Καταλάβαμε πώς οι απλές εξισώσεις συνδέονται με τη γενική εξίσωση μεταφοράς
- Αρχίσαμε μια περίληψη των βασικών στοιχείων κάθε αριθμητικής μεθόδου
- Στο επόμενο μάθημα, θα ολοκληρώσουμε την περίληψη και θα δούμε με περισσότερες λεπτομέρειες τη μέθοδο των πεπερασμένων όγκων σε προβλήματα διάχυσης.