ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΤΜΗΜΑ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΥΔΡΑΥΛΙΚΗΣ ΚΑΙ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝΤΙΚΗΣ ΤΕΧΝΙΚΗΣ

Διάλεξη 13: Σχήματα ανώτερης τάξης Οριακές συνθήκες για προβλήματα συναγωγής-διάχυσης

Χειμερινό εξάμηνο 2008

Προηγούμενη παρουσίαση...

- Εξετάσαμε διάφορες συναρτήσεις limiter
- Ακρίβεια δεύτερης τάξης

Οργάνωση παρουσίασης

- Θα εξετάσουμε την φυσική εξήγηση των συναρτήσεων limiter
- Θα δούμε πως υλοποιούνται τα σχήματα ανώτερης τάξης
- Θα συζητήσουμε για τις οριακές συνθήκες

Σχήμα ανώτερης τάξης για το φ_e

- Ας υποθέσουμε ότι βρίσκουμε την τιμή στη πλευρά χρησιμοποιώντας ένα σχήμα δεύτερης τάξης και την κλίση να υπολογίζεται στο απάνεμο κελί:

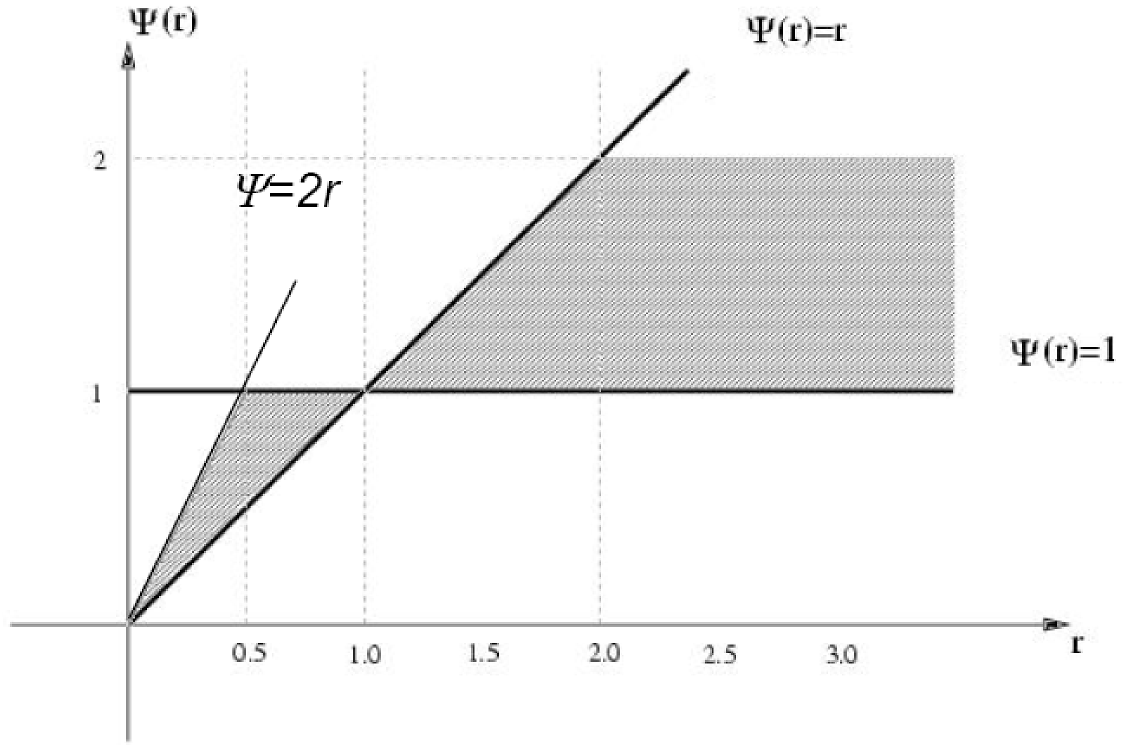
$$\phi_e = \phi_P + \Psi(r_e)\frac{\Delta x}{2}\frac{\left(\phi_P - \phi_W\right)}{\Delta x}$$

- Όπου:

$$r_e = \frac{\phi_E - \phi_P}{\phi_P - \phi_W}$$

- Τι προσπαθεί να κάνει η συνάρτηση του limiter;

Συνάρτηση limiter



Φυσική σημασία

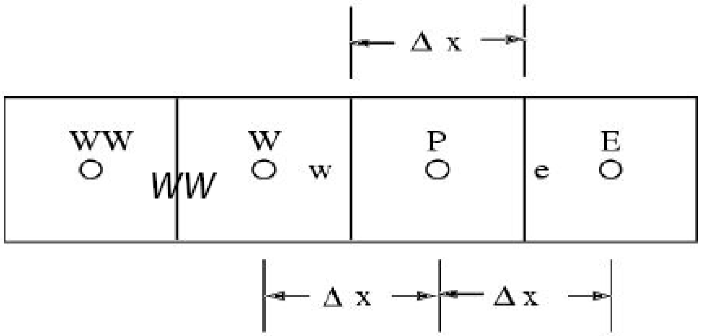
Η τιμή του ρ μπορεί να υπολογιστεί από το γινόμενο δύο κλίσεων:

$$r_e = \frac{\phi_E - \phi_P}{\phi_P - \phi_W}$$

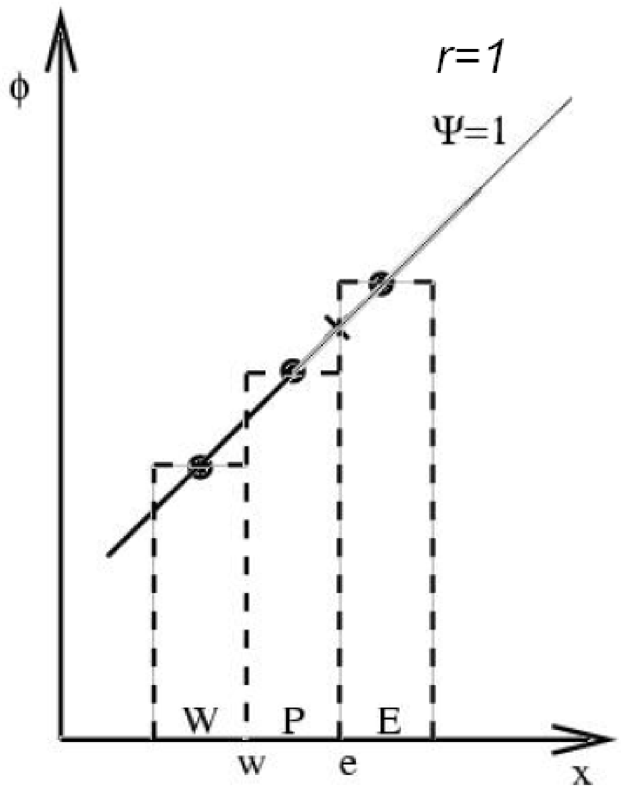
Κατάνεμη κλίση στο κελί

Απάνεμη κλίση στο κελί

Ο limiter διαλέγει την κλίση κάθε φορά ώστε να αποφεύγει να δημιουργεί μέγιστα



$1^η$ περίπτωση: Γραμμική μεταβολή του φ



(a) $r = 1$

- Επειδή:

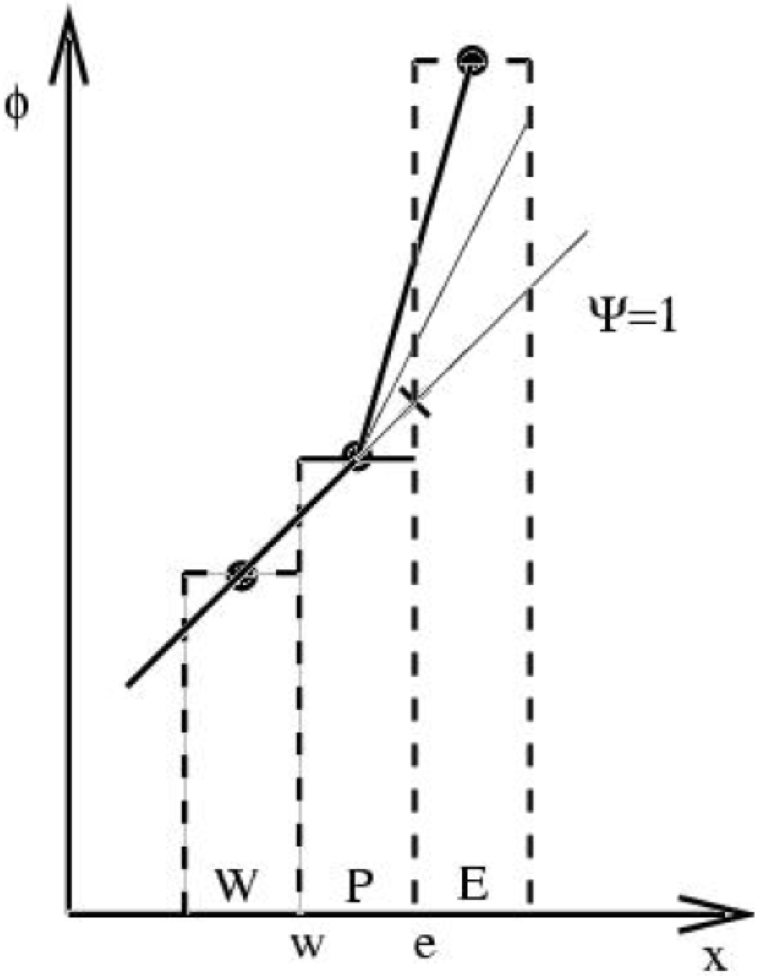
$$r = \frac{\phi_E - \phi_P}{\phi_P - \phi_W}$$

- Αν η μεταβολή είναι μία ευθεία γραμμή, σε ομοιόμορφο πλέγμα, r = 1

- Από το εύρος της συνάρτησης του limiter έχουμε, Ψ =1 για r = 1

- Μπορεί να χρησιμοποιηθεί οποιοδήποτε κλίση για να υπολογίσουμε την σωστή τιμή για το e

2η περίπτωση: 2 > r > 1



• Αν r > 1 σημαίνει:

$$\left(\phi_E - \phi_P\right) > \left(\phi_P - \phi_W\right)$$

• Αν χρησιμοποιήσουμε Ψ = 1, δεν θα δημιουργήσουμε πρόβλημα υπερεκτίμησης

• Στην ουσία μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε οποιοδήποτε Ψ έως την τιμή του r και να μην έχουμε

$$\phi_e > \phi_E$$

2η περίπτωση: 2 > r > 1 (συνέχεια)

- Θεωρήστε την περίπτωση όπου $r_e > 1$, π.χ., $\phi_E - \phi_P > \phi_P - \phi_W$
- Ας υποθέσουμε ότι διαλέγουμε την γραμμή $\Psi = r_e$
- When $\Psi = r_e$:

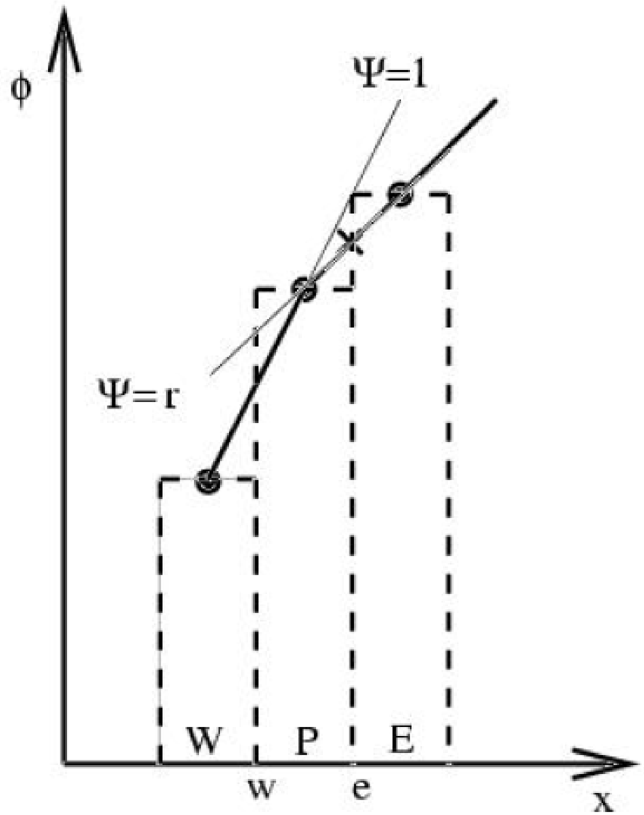
$$\begin{aligned}
\phi_e &= \phi_P + \Psi(r_e)\frac{\Delta x}{2}\frac{(\phi_P - \phi_W)}{\Delta x} \\
&= \phi_P + \frac{(\phi_E - \phi_P)}{(\phi_P - \phi_W)}\frac{1}{2}(\phi_P - \phi_W) \\
&= \phi_P + \frac{(\phi_E - \phi_P)}{2} \\
&= \frac{1}{2}\phi_P + \frac{1}{2}\phi_E \\
&\le \phi_E
\end{aligned}$$

$2^{η}$ *περίπτωση: r > 2*

- Θεωρήστε την περίπτωση όπου r_e >2, π.χ., $\phi_E - \phi_P > \phi_P - \phi_W$
- Ας υποθέσουμε ότι διαλέγουμε την γραμμή Ψ=2 για r_e>2
- Όταν Ψ=2:

$$
\begin{aligned}
\phi_e &= \phi_P + \Psi(r_e)\frac{\Delta x}{2}\frac{(\phi_P - \phi_W)}{\Delta x} \\
&= \phi_P + (\phi_P - \phi_W) \\
&= \phi_P + \frac{(\phi_E - \phi_P)}{r_e} \\
&= \left(1 - \frac{1}{r_e}\right)\phi_P + \left(\frac{1}{r_e}\right)\phi_E \\
&\leq \phi_E
\end{aligned}
$$

$3^η$ περίπτωση: $0 < r < 1$



(c) $r < 1$

- Αν r < 1:

$$\left(\phi_E - \phi_P\right) < \left(\phi_P - \phi_W\right)$$

3η περίπτωση: 0 < r < 1 (συνέχεια)

- Θεωρήστε την περίπτωση όπου 0 < r_e < 1 , π.χ., $\phi_E - \phi_P < \phi_P - \phi_W$
- Ας υποθέσουμε ότι διαλέγουμε την γραμμή $\Psi = r_e$
- Όταν $\Psi = r_e$:

$$\phi_e = \phi_P + \Psi(r_e)\frac{\Delta x}{2}\frac{(\phi_P - \phi_W)}{\Delta x}$$

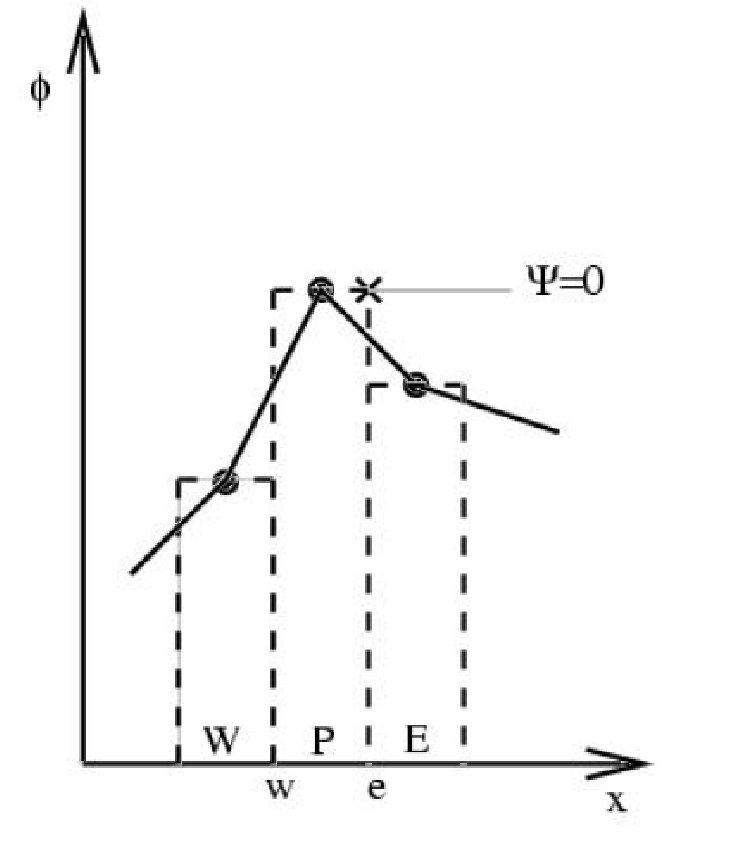
$$= \phi_P + \frac{(\phi_E - \phi_P)}{(\phi_P - \phi_W)}\frac{1}{2}(\phi_P - \phi_W)$$

$$= \phi_P + \frac{(\phi_E - \phi_P)}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\phi_P + \frac{1}{2}\phi_E$$

$$\leq \phi_E$$

$4^η$ περίπτωση: $r < 0$



(d) $r < 0$

- Όταν r < 0, αυτό υποδηλώνει τοπικό μέγιστο

- Ο limiter μας έχει Ψ=0 για r<0

- Αυτό σημαίνει:

$$\phi_e = \phi_P$$

Συνηθισμένη περίπτωση για τα απάνεμα σχήματα πρώτης τάξης

Υλοποίηση σχημάτων ανώτερης τάξης

• Τα ανώτερης τάξης σχήματα οδηγούν σε συστήματα με κυρίαρχη διαγώνιο

• Ο ευκολότερος τρόπος για να εισάγουμε σχήματα ανώτερης τάξης είναι εισάγοντας διορθώσεις

• Κάθε σχήμα ανώτερης τάξης μπορεί να γραφεί ως:

$$\phi_{\mathrm{HO}} = \phi_{Upwind} + \left(\phi_{HO} - \phi_{Upwind} \right)^{*}$$

$$\phi_{HO,e} = \phi_P + \left(\phi_{_{HO,e}} - \phi_P \right)^{*}$$

• Βάζουμε τους όρους με το αστεράκι στο b

• Ο πίνακας των συντελεστών περιλαμβάνει μόνο τους απάνεμους συντελεστές

Υλοποίηση σχημάτων ανώτερης τάξης (συνέχεια)

• Για παράδειγμα στο σχήμα QUICK, η ροή συναγωγής στη πλευρά δίνεται από:

$$F_e \phi_e = \underbrace{F_e \phi_P}_{\text{Απάνεμη διαφορά}} + \underbrace{F_e \left(\frac{(\phi_E^* + \phi_P^*)}{2} - \frac{(\phi_E^* + \phi_W^* - 2\phi_P^*)}{8} - \phi_P^* \right)}_{\text{QUICK - Απάνεμη διαφορά}}$$

• Χρειάζεται να λυθεί επαναληπτικά όπως οι μη-γραμμικοί όροι

Διακριτή εξίσωση

$$a_P \phi_P = \sum_{nb} a_{nb} \phi_{nb} + b$$

Όπου:

$$\begin{aligned} Max[a,b] &= a \quad \text{if } a > b \\ &= b \quad \text{otherwise} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_E &= D_e + Max[-F_e, 0] \\ a_W &= D_w + Max[F_w, 0] \\ a_N &= D_n + Max[-F_n, 0] \\ a_S &= D_s + Max[F_s, 0] \\ a_P &= \sum_{\text{nb}} a_{\text{nb}} - S_P \Delta \mathcal{V}_P + (F_e - F_w + F_n - F_s) \end{aligned}$$

$$b = S_c \Delta V_P - F_e \Delta \phi^*_{ho,e} + F_w \Delta \phi^*_{ho,w} - F_n \Delta \phi^*_{ho,n} + F_s \Delta \phi^*_{ho,s}$$

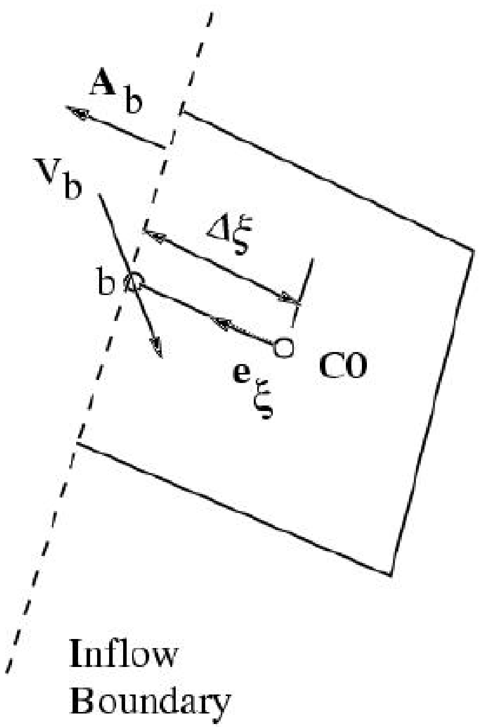
Η συνεισφορά από την ανώτερη τάξη πρέπει να λυθεί επαναληπτικά

Οριακές συνθήκες: Είσοδος

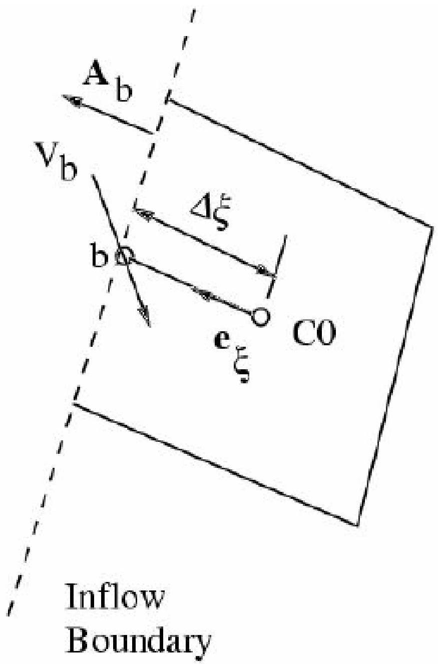
• Θεωρούμε μια οριακή συνθήκη όπου η ροή εισέρχεται στο υπολογιστικό πεδίο

$$
\begin{aligned}
\mathbf{V} &= \mathbf{V}_{\mathrm{b}}; \quad \mathbf{V}_{\mathrm{b}} \cdot \mathbf{A}_b \leq 0 \\
\phi &= \phi_{\text{given}}
\end{aligned}
$$

$$\mathbf{J}_b \cdot \mathbf{A}_b + \sum_f \mathbf{J}_f \cdot \mathbf{A}_f = \left(S_C + S_P \phi_0\right) \Delta \mathcal{V}_0$$



Οριακή συνθήκη εισόδου



- Στο όριο έχουμε συναγωγή και διάχυση ταυτοχρόνως

$$\mathbf{J}_b \cdot \mathbf{A}_b = \rho \mathbf{V}_b \cdot \mathbf{A}_b \phi_b - \Gamma_b (\nabla \phi)_b \cdot \mathbf{A}_b$$

$$\mathbf{J}_b \cdot \mathbf{A}_b = \rho \mathbf{V}_b \cdot \mathbf{A}_b \phi_{\text{given}} - \frac{\Gamma_b}{\Delta\xi} \frac{\mathbf{A}_b \cdot \mathbf{A}_b}{\mathbf{A}_b \cdot \mathbf{e}_\xi} \left(\phi_0 - \phi_{\text{given}} \right) + \mathscr{S}_b$$

Γνωστές τιμές

Όρος διάχυσης ίδιος όπως και στις οριακές συνθήκες τύπου Dirichlet

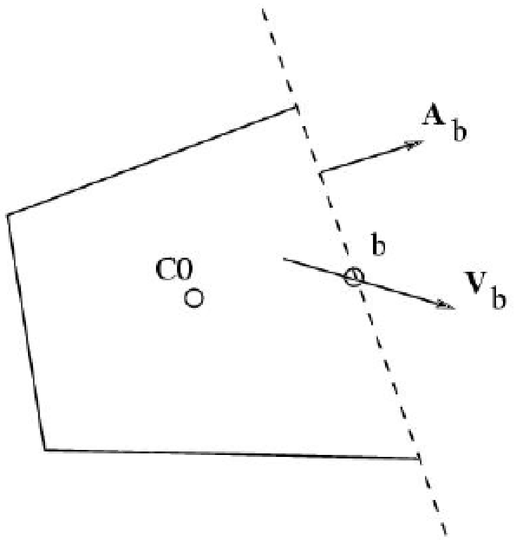
Οριακή συνθήκη εξόδου

- Η ροή βγαίνει από το υπολογιστικό πεδίο

- Τυπικά δεν ξέρουμε την τιμή του φ στο όριο της εξόδου
  » Η τιμή εξαρτάτε από αυτό που συμβαίνει στο εσωτερικό του πεδίου

- Αγνοούμε τη διάχυση στην εξωτερική πλευρά
  » Υποθέτουμε ότι ο αριθμός Peclet στη πλευρά είναι άπειρος
  » Χρησιμοποιούμε απάνεμες διαφορές πρώτης τάξης

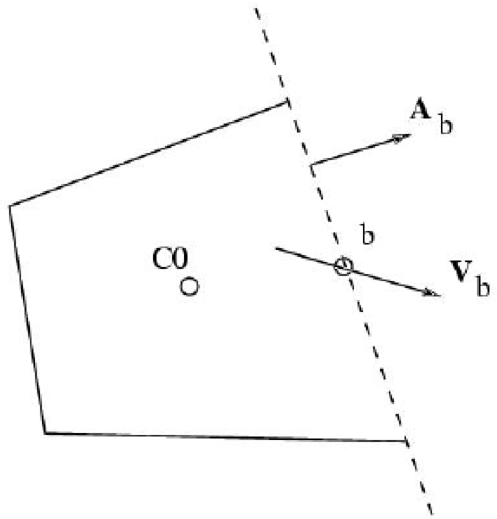
- Οι υπόλοιπες πλευρές στο εσωτερικό του κελιού διακριτοποιούνται ως συνήθως



Οριακή συνθήκη εξόδου (συνέχεια)

- Θέτουμε τη τιμή της διάχυσης στο όριο ίση με μηδέν:

$$-\Gamma_b (\nabla\phi)_b \cdot \mathbf{A}_b = 0$$



- Άρα, η ροή στο όριο είναι:

$$\mathbf{J}_b \cdot \mathbf{A}_b = \rho \mathbf{V}_b \cdot \mathbf{A}_b \phi_b; \quad \mathbf{V}_b \cdot \mathbf{A}_b > 0$$

- Χρησιμοποιώντας πρώτης τάξης απάνεμο σχήμα έχουμε:

$$\mathbf{J}_b \cdot \mathbf{A}_b = \rho \mathbf{V}_b \cdot \mathbf{A}_b \phi_0$$

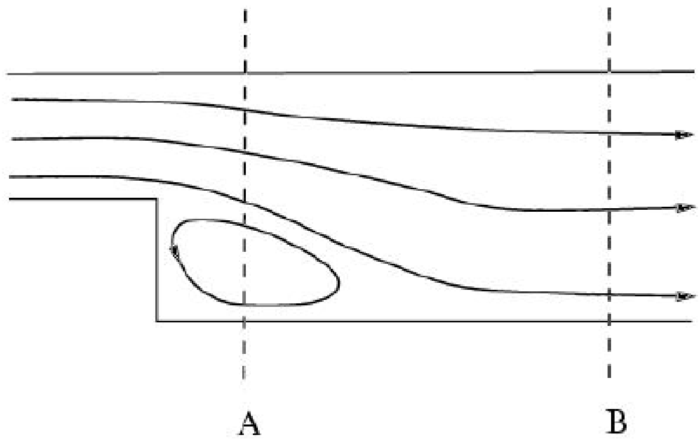
Πότε χρησιμοποιούμε οριακές συνθήκες εξόδου

• Οι οριακές συνθήκες εξόδου κόβουν το πεδίο σε κατάντη θέσεις

• Τυπικά αυτό είναι σωστό μόνο όταν η συναγωγή είναι ισχυρότερη από την αγωγή

» $Pe_f >> 1$

• Οι οριακές συνθήκες δεν πρέπει να κόβουν περιοχές ανακυκλοφοριών



Τετραγωνικοί και κυβικοί limiters

- Συνήθως τα τυπικά "φυσικά" όρια ενός πεδίου είναι:
  - » Ο τοίχος

- Στους τοίχους

$$\mathbf{V}_b \cdot \mathbf{A}_b = 0$$

  - » Δεν υπάρχει ροή συναγωγής (u = 0)

- Η ροή στο όριο είναι μόνο λόγο διάχυσης: $\mathbf{J}_b = -\Gamma_b (\nabla \phi)_b$

- Μπορεί να έχει Dirichlet/Neumann/μικτές οριακές συνθήκες όπως σε προβλήματα καθαρής διάχυσης

Επίλογος

Στη παρούσα διάλεξη είδαμε:

- τη φυσική σημασία των συναρτήσεων limiter
- πως μπορούμε να επιλέξουμε μεταξύ μιας απάνεμου ή κατάνεμου κλίσης για να βρούμε την τιμή στη πλευρά
- θέματα που σχετίζονται με την υλοποίηση της διακριτοποίησης
- Οριακές συνθήκες