ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΤΜΗΜΑ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΥΔΡΑΥΛΙΚΗΣ ΚΑΙ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝΤΙΚΗΣ ΤΕΧΝΙΚΗΣ

Διάλεξη 5: Εξίσωση διάχυσης (συνέχεια)

Χειμερινό εξάμηνο 2008

Προηγούμενη παρουσίαση...

Εξετάσαμε την εξίσωση διάχυσης σε δύο διαστάσεις (2D) σε Καρτεσιανό δομημένο πλέγμα. Συγκεκριμένα,

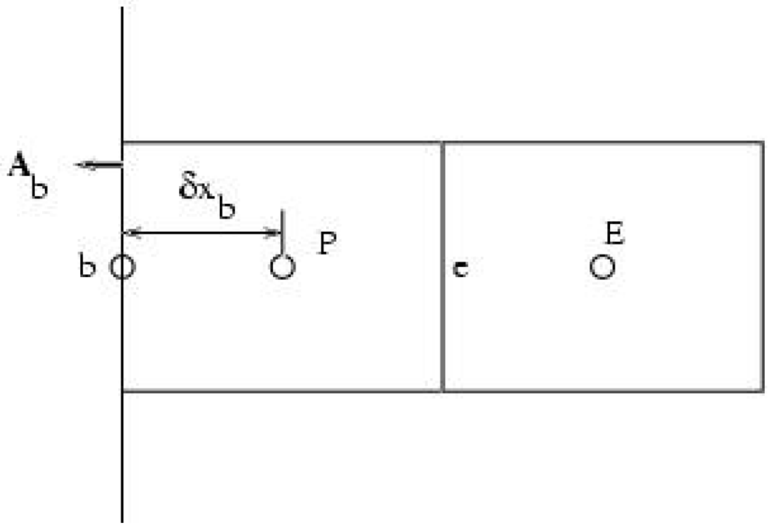
- Ολοκληρώσαμε την εξίσωση διάχυσης σε ένα όγκο ελέγχου (CV)
- Εφαρμόσαμε το θεώρημα τις απόκλισης για να βρούμε την εξίσωση ισορροπίας ροών
- Υποθέσαμε γραμμικό προφίλ
- Βρήκαμε τις διακριτές αλγεβρικές εξισώσεις
- Συζητήσαμε ιδιότητες του συστήματος των διακριτών εξισώσεων, μεταξύ άλλων
  - » το κριτήριο Scarborough
  - » το φράξιμο της λύσης (boundedness)
- Είδαμε οριακές συνθήκες τύπου Dirichlet και Neumann

Οργάνωση παρουσίασης

Θα συνεχίσουμε:

- Ολοκληρώνοντας τη διακριτοποίηση των οριακών συνθηκών
  - » μικτές οριακές συνθήκες (τύπου Robbins)
- Εξετάζοντας τον συνδυασμένο τρόπο (conjugate) μεταφοράς θερμότητας
  - » όπου ο συντελεστής Γ έχει διαφορετικές τιμές στο χώρο, ιδιαίτερα όταν υπάρχουν ασυνέχειες το υλικό (material discontinuities)
- Γραμμικοποίηση πηγών
- Υποχαλάρωση

Οριακές συνθήκες (BCs)



$$\mathbf{A}_b = -\Delta y \mathbf{i}$$

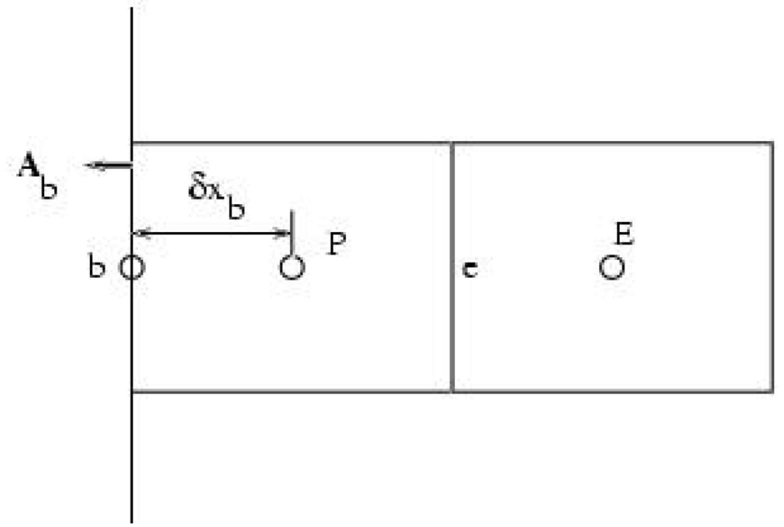
Ισορροπία ροών:

$$(\mathbf{J} \cdot \mathbf{A})_b + (\mathbf{J} \cdot \mathbf{A})_e + (\mathbf{J} \cdot \mathbf{A})_n + (\mathbf{J} \cdot \mathbf{A})_s = \overline{S} \Delta V$$

$$\mathbf{J}_b = -\Gamma_b \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_b$$

Διαφορετικές οριακές συνθήκες απαιτούν διαφορετικές μορφές για το $\mathbf{J}_b$

Μικτές οριακές συνθήκες ή τύπου Robbins



- Μικτές οριακές συνθήκες:

$$-(\Gamma \nabla \varphi)_b \cdot \mathbf{i} = h_b(\varphi_\infty - \varphi_b)$$

- Η ροή που εξέρχεται από το πεδίο είναι:

$$\mathbf{J}_b \cdot \mathbf{A}_b = h_b(\varphi_b - \varphi_\infty)\Delta y$$

- Αν υποθέσουμε ότι το προφίλ είναι γραμμικό:

$$\Gamma_b \frac{\varphi_P - \varphi_b}{(\delta x)_b} = -h_b(\varphi_\infty - \varphi_b)$$

Όπου το φ_b δεν είναι γνωστό

Μικτές οριακές συνθήκες ή τύπου Robbins (συνέχεια)

•Ιδέα: βρίσκουμε το φ_b από:

$$\Gamma_b \frac{\varphi_P - \varphi_b}{(\delta x)_b} = -h_b(\varphi_\infty - \varphi_b) \Longrightarrow \varphi_b = \frac{h_b \varphi_\infty + (\Gamma_b / \delta x_b)\varphi_P}{h_b + (\Gamma_b / \delta x_b)}$$

• Γράφουμε το **J** χρησιμοποιώντας το φ_p και φ_∞ :

$$\mathbf{J}_b \cdot \mathbf{A}_b = h_b(\varphi_b - \varphi_\infty)\Delta y$$

Διώχνουμε το φ_b

$$\mathbf{J}_b \cdot \mathbf{A}_b = -\mathrm{R}_{eq}(\varphi_\infty - \varphi_p)\Delta y$$

$$R_{eq} = \frac{h_b (\Gamma_b / \delta x_b)}{h_b + (\Gamma_b / \delta x_b)}$$

Μικτές οριακές συνθήκες ή τύπου Robbins (συνέχεια)

Αντικαθιστούμε το όρο της οριακής συνθήκης ροής στην εξίσωση ισορροπίας των ροών :

$$\left(\mathbf{J}\cdot\mathbf{A}\right)_e+\left(\mathbf{J}\cdot\mathbf{A}\right)_w+\left(\mathbf{J}\cdot\mathbf{A}\right)_n+\left(\mathbf{J}\cdot\mathbf{A}\right)_s=\overline{S}\Delta V$$

$$\mathbf{J}_b\cdot\mathbf{A}_b=-\mathrm{R}_{eq}(\varphi_\infty-\varphi_p)\Delta y$$

Τελική γραμμική εξίσωση

$$a_p\varphi_p = a_E\varphi_E + a_N\varphi_N + a_S\varphi_S + b$$

Όπου:

$$a_E = \Gamma_e \frac{\Delta y}{(\delta x)_e}$$

$$a_N = \Gamma_n \frac{\Delta x}{(\delta y)_n}$$

$$a_S = \Gamma_s \frac{\Delta x}{(\delta y)_s}$$

$$a_b = R_{eq}\Delta y$$

$$a_p = a_E + a_N + a_S + a_b - S_p\Delta x\Delta y$$

$$b = R_{eq}\Delta y\varphi_\infty + S_C\Delta x\Delta y$$

Για τα κελιά που βρίσκονται κοντά στο όριο:

$$a_p > \sum_{nb} a_{nb}$$

Άρα το κριτήριο του Scarborough ικανοποιείται!

Επίσης, όταν δεν υπάρχουν όροι πηγής η τιμή του φ_P είναι φραγμένη μεταξύ των εσωτερικών τιμών και φ_∞ .

Οριακές τιμές και ροές

• Για τις μικτές οριακές συνθήκες πρώτα βρίσκουμε την τιμή στο όριο χρησιμοποιώντας τη σχέση:

$$\varphi_b = \frac{h_b \varphi_\infty + \left(\Gamma_b / \delta x_b\right) \varphi_P}{h_b + \left(\Gamma_b / \delta x_b\right)}$$

• και έπειτα υπολογίσουμε τις οριακές τιμές τις ροής χρησιμοποιώντας τη σχέση:

$$\mathbf{J}_b \cdot \mathbf{A}_b = h_b (\varphi_b - \varphi_\infty) \Delta y$$

Σχόλια

• Όταν έχουμε Dirichlet ή μικτές οριακές συνθήκες, η τιμή της φ είναι πάντοτε φραγμένη από τις οριακές συνθήκες και το φ_∞ στην περίπτωση όπου δεν υπάρχουν όροι πηγής

• Δεν υπάρχει εγγύηση φραξίματος για οριακές συνθήκες τύπου Neumann, αλλά αυτό είναι αναμενόμενο

• Το κριτήριο Scarborough ικανοποιείται (όταν δεν υπάρχουν όροι πηγής) για τις οριακές συνθήκες τύπου Dirichlet και τις μικτές

• Όταν όλες οι οριακές συνθήκες είναι τύπου Neumann, το κριτήριο Scarborough δεν μπορεί να ικανοποιηθεί όταν δεν υπάρχουν όροι πηγής

Παρεμβολή για το Γ

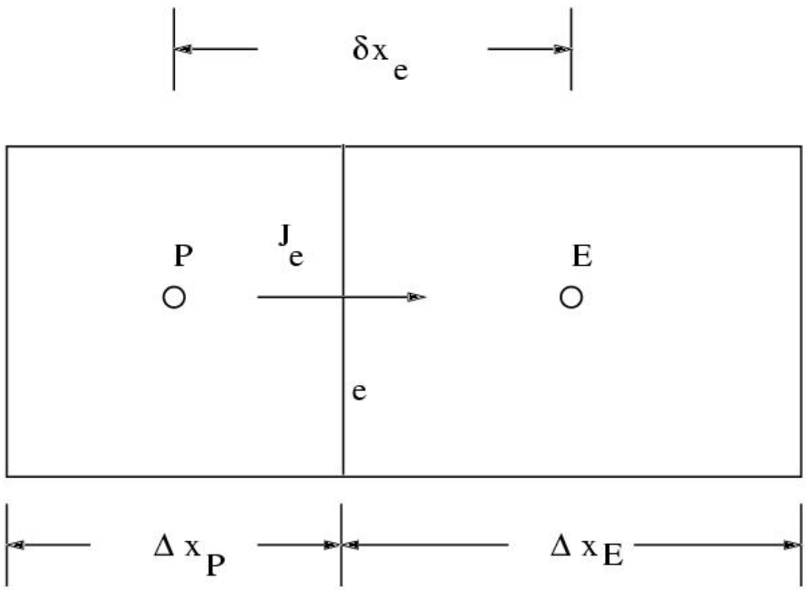
• Θυμίζουμε ότι χρειαζόμαστε το Γ στις πλευρές του όγκου ελέγχου

• Αποθηκεύεται στο κέντρο του όγκου ελέγχου

• Είναι εύκολο να το υπολογίσουμε με γραμμική παρεμβολή:

$$\Gamma_e = f_e \Gamma_P + \left(1 - f_e\right) \Gamma_E$$

$$f_e = \frac{0.5 \Delta x_E}{\left(\delta x\right)_e}$$



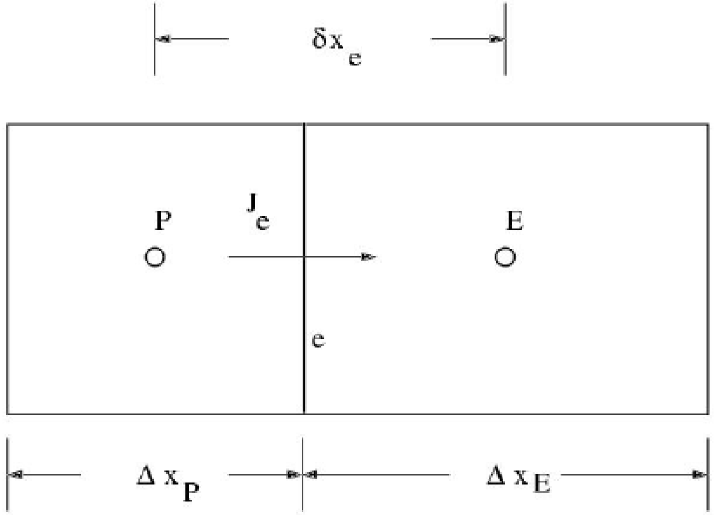
• Αντίθετα, χρησιμοποιούμε ένα διαφορετικό τρόπο

Παρεμβολή μέσης αρμονικής

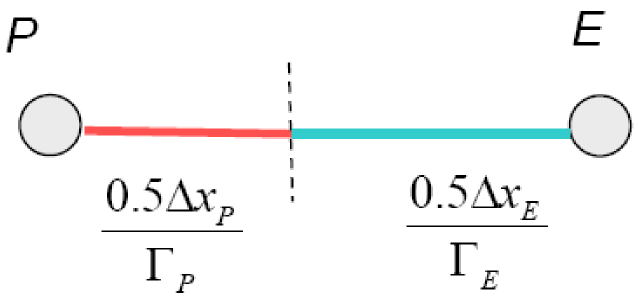
• Υποθέτουμε συνδυασμένη μετάδοση θερμότητας σε μία διάσταση

•Έστω δύο μπλοκ E και P με διαφορετικές θερμικές αγωγιμότητες

• Ο ρυθμός της μετάδοσης θερμότητας υπολογίζεται σχεδιάζοντας το θερμικό κύκλωμα



$$J_e = -\frac{(\phi_E - \phi_P)}{(0.5\Delta x_P)/\Gamma_P + (0.5\Delta x_E)/\Gamma_E}$$



Παρεμβολή μέσης αρμονικής (συνέχεια)

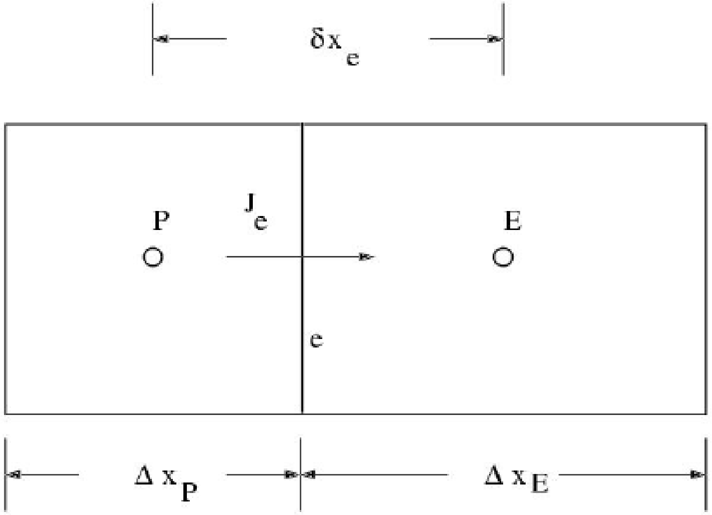
Ομοίως ορίζουμε το Γ_e ως:

$$\frac{\delta x_e}{\Gamma_e} = \frac{0.5\Delta x_P}{\Gamma_P} + \frac{0.5\Delta x_E}{\Gamma_E}$$

$$\Gamma_e = \left(\frac{1-f_e}{\Gamma_P} + \frac{f_e}{\Gamma_E}\right)^{-1}$$

$$f_e = \frac{0.5\Delta x_E}{(\delta x)_e}$$

$$J_e = -\frac{\Gamma_e\left(\phi_E - \phi_P\right)}{\delta x_e}$$



Διακριτοποίηση

• Ορίζουμε το Γ_e έτσι ώστε η μονοδιάστατη ροή να είναι σωστή

• Αυτό εγγυάται σωστή λύση σε προβλήματα συνδυασμένης μεταφοράς θερμότητας

$$\Gamma_e = \frac{2\Gamma_P\Gamma_E}{\Gamma_P + \Gamma_E}$$

•Όταν το πλέγμα είναι ομοιόμορφο τότε:

•Όταν $\Gamma_P >> \Gamma_E$, $\Gamma e = 2\,\Gamma_E$

•Είναι σωστό; Γιατί;

Γραμμικοποίηση πηγών

- Θυμόμαστε ότι ο όρος πηγής μπορεί να διακριτοποιηθεί ως:

$$\overline{S} = S_c + S_p \varphi_p$$

- Είναι αυτό πάντοτε εφικτό; Αν όχι, ποιες είναι οι εναλλακτικές λύσεις;

•Σκεφτείτε τη σειρά Taylor πρώτης τάξης

$$S = S^* + \left(\frac{\partial S}{\partial \phi}\right)^* (\phi - \phi^*)$$

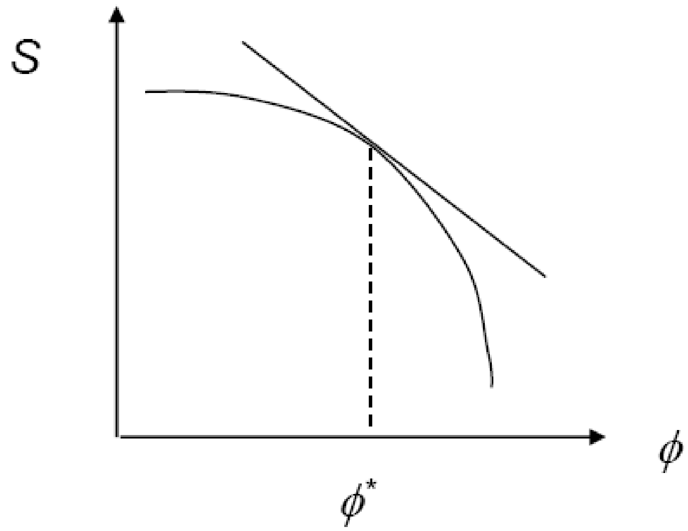
•Η τιμή με το αστέρι αντιστοιχεί στη τρέχουσα επανάληψη

$$S = S_C + S_P \phi \qquad\qquad S = S^* + \left(\frac{\partial S}{\partial \phi}\right)^* (\phi - \phi^*)$$

Όπου:

$$S_C = S^* - \left(\frac{\partial S}{\partial \phi}\right)^* \phi^*$$

$$S_P = \left(\frac{\partial S}{\partial \phi}\right)^*$$



Γραμμικοποίηση πηγών (συνέχεια)

- Όταν η λύση συγκλίνει, $\varphi = \varphi^*$, και έχουμε $S = S^*$

- Άρα η γραμμικοποίηση δεν αλλάζει την τιμή του όρου πηγής

- Αλλάζει μόνο τον δρόμο για την λύση

- Διαδικασία επίλυσης:
  - » Υποθέτουμε μια τιμή για το φ^*
  - » Βρίσκουμε τα S_c και S_P
  - » Λύνουμε το διακριτό σύστημα
  - » Ανανεώνουμε τα S_c και S_P …

Παράδειγμα

• Συνήθως σε προβλήματα ακτινοβολίας συναντάμε όρους πηγής στην εξίσωση θερμότητας που έχουν τύπο:

$$\frac{\kappa}{\pi}\sigma\left(T_\infty^4 - T^4\right)$$

• Όπου κ είναι ο συντελεστής απορρόφησης ακτινοβολίας (1/m)
• Ο όρος πηγής στον όγκο ελέγχου είναι:

$$\overline{S}\Delta V = \left(S_C + S_P T_P\right)\Delta V$$

• Πως θα γραμμικοποιήσουμε αυτό τον όρο πηγής; Υπάρχουν εναλλακτικές λύσεις; Ποιές είναι οι συνέπειες διαφορετικών επιλογών;

Παράδειγμα (συνέχεια)

Μπορούμε να επιλέξουμε διάφορες λύσεις

Πρώτη προσέγγιση: $S_C = \frac{\kappa\sigma}{\pi}\left(T_\infty^{*4} - T_P^{\;*4}\right) \qquad S_P = 0$

Επίσης, γύρο από των τρέχουσα επανάληψη:

$$S = S^* + \left(\frac{dS}{dT_P}\right)^* \left(T_P - T_P^*\right)$$

$$= \frac{\kappa\sigma}{\pi}\left(T_\infty^{*4} - T^{*4}\right) - \frac{4\kappa\sigma}{\pi} T_P^{*3}\left(T_P - T_P^*\right)$$

$$S_C = \frac{\kappa\sigma}{\pi}\left(T_\infty^{*4} - T_P^{\;*4}\right) + \frac{4\kappa\sigma}{\pi} T_P^{*4} \qquad S_P = -\frac{4\kappa\sigma}{\pi} T_P^{*3}$$

Επίσης:

$$S_C = \frac{\kappa\sigma}{\pi}\left(T_\infty^{*4} - T_P^{\;*4}\right) + \frac{2\kappa\sigma}{\pi} T_P^{*4} \qquad S_P = -\frac{2\kappa\sigma}{\pi} T_P^{*3}$$

$$S_C = \frac{\kappa\sigma}{\pi}\left(T_\infty^{*4} - T_P^{\;*4}\right) + \frac{10\kappa\sigma}{\pi} T_P^{*4} \qquad S_P = -\frac{10\kappa\sigma}{\pi} T_P^{*3}$$

Παράδειγμα (συνέχεια)

- Η πρώτη προσέγγιση μπορεί να μη συγκλίνει

- Η δεύτερη προσέγγιση είναι ιδανική

- Η τρίτη προσέγγιση μπορεί επίσης να μη συγκλίνει επειδή δεν είναι αρκετά “implicit” – δηλ. Δεν αντιστέκεται αρκετά στις αλλαγές που προκαλούνται στον όρο από τη θερμοκρασία

- Στη τέταρτη προσέγγιση είναι σίγουρο ότι θα συγκλίνει. Οι αλλαγές τις τιμής της θερμοκρασίας επιβραδύνονται επειδή ο όρος πηγής αντιστέκεται περισσότερο στις μεταβολές της

Υποχαλάρωση (συνέχεια)

• Σε μη-γραμμικά προβλήματα, μια συνηθισμένη διαδικασία επίλυσης ονομάζεται επανάληψη *Picard:*

» Υποθέτουμε μια τιμή για την φ

» Βρίσκουμε τους συντελεστές a_P, a_{nb}, b

» χρησιμοποιούμε τη μέθοδο Gauss-Seidel ή άλλη επαναληπτική μέθοδο για να βρούμε την τιμή της φ

» Η τιμή είναι προσωρινή επειδή και οι συντελεστές είναι προσωρινοί

» Επαναλαμβάνουμε έως τη σύγκλιση

• Δεν υπάρχει εγγύηση για σύγκλιση όταν υπάρχουν ισχυρές μη-γραμμικότητες

• Ελέγχουμε τη ποσότητα της φ από επανάληψη σε επανάληψη χρησιμοποιώντας υποχαλάρωση (*under-relaxation)*

Υποχαλάρωση (συνέχεια)

• Θεωρούμε τη διακριτή εξίσωση γύρω από το σημείο P

$$a_P\phi_P = \sum_{\text{nb}} a_{\text{nb}}\phi_{\text{nb}} + b$$

• Σε κάθε επανάληψη, η υπολογισμένη τιμή στο σημείο P μπορεί να είναι

$$\phi_P = \frac{\sum_{\text{nb}} a_{\text{nb}}\phi_{\text{nb}} + b}{a_P}$$

• Η αλλαγή σε σχέση με την τρέχουσα επανάληψη θα είναι :

$$\frac{\sum_{\text{nb}} a_{\text{nb}}\phi_{\text{nb}} + b}{a_P} - \phi_P^*$$

Υποχαλάρωση (συνέχεια)

• Θέλουμε να ελέγξουμε την μεταβολή της φ κατά τη διάρκεια των επαναλήψεων:

$$\phi_P = \phi_P^* + \alpha\left(\frac{\sum_{\mathrm{nb}} a_{\mathrm{nb}}\phi_{\mathrm{nb}} + b}{a_P} - \phi_P^*\right)$$

• Όπου α είναι ο συντελεστής υποχαλάρωσης, 0<α<1.0
•Τελικά :

$$\frac{a_P}{\alpha}\phi_P = \sum_{\mathrm{nb}} a_{\mathrm{nb}}\phi_{\mathrm{nb}} + b + \frac{1-\alpha}{\alpha}a_P\phi_P^*$$

Υποχαλάρωση (συνέχεια)

• Όταν επέλθει σύγκλιση, φ=φ*

• Έτσι, καταλήγουμε να λύνουμε την αρχική διακριτοποιημένη εξίσωση. Η τελική λύση <u>**δεν**</u> εξαρτάτε από τον συντελεστή υποχαλάρωσης

$$a_P \phi_P = \sum_{\text{nb}} a_{\text{nb}} \phi_{\text{nb}} + b$$

•Πως συμπεριφέρεται η εξίσωση για α→0 and α→1;

Σημείωση:

- η υποχαλάρωση βελτιώνει την κυριαρχία της διαγωνίου
- δρα όπως ένας όρος χρονικής μεταβολής

Επίλογος

- Στη παρούσα διάλεξη

  » Ολοκληρώσαμε την συζήτηση για τις οριακές συνθήκες

  » Μάθαμε πως να διακριτοποιούμε προβλήματα συνδυασμένης μετάδοσης θερμότητας

  » Γραμμικοποιήσαμε τους όρους πηγής και είδαμε πως διαφορετικές επιλογές επηρεάζουν τη σύγκλιση

  » Εξετάσαμε την υποχαλάρωση ως εργαλείο για τον έλεγχο της σύγκλισης