Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις

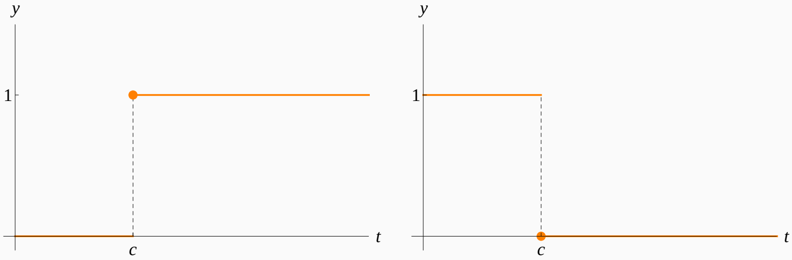
Μιχάλης Αγόρας
Email: agoras@mie.uth.gr

Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών
Εργαστήριο Μηχανικής και Αντοχής των Υλικών
Προπτυχιακό Πρόγραμμα Σπουδών
Χειμερινό Εξάμηνο 2018-2019

Συναρτήσεις Βήματος

Συνάρτηση μοναδιαίου βήματος (Heaviside):

$$u_c(t) = \begin{cases} 0, & t < c \\ 1, & t \geq c \end{cases}, \quad c \geq 0$$



$y = u_c(t)$ $\qquad$ $y = 1 - u_c(t)$

Συναρτήσεις Βήματος

Παράδειγμα 1:

$$h(t) = \left\{ \begin{array}{ll} 0, & 0 \leq t < \pi \\ 1, & \pi \leq t < 2\pi \\ 0, & t \geq 2\pi \end{array} \right\} = u_{\pi}(t) - u_{2\pi}(t)$$

Παράδειγμα 2:

$$f(t) = \left\{ \begin{array}{rl} 2, & 0 \leq t < 4 \\ 5, & 4 \leq t < 7 \\ -1, & 7 \leq t < 9 \\ 1, & t \geq 9 \end{array} \right\} = 2 + 3u_4(t) - 6u_7(t) + 2u_9(t)$$

Παράδειγμα 3:

$$g(t) = \left\{ \begin{array}{rl} 0, & 0 \leq t < c \\ f(t-c), & t \geq c \end{array} \right\} = u_c(t)f(t-c)$$

Συναρτήσεις Βήματος

Μετασχηματισμός Laplace της $u_c(t)$:

$$\mathcal{L}\{u_c(t)\} = \frac{e^{-cs}}{s}, \quad s > 0$$

Θεώρημα: Εάν ο μετασχηματισμός Laplace $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ υπάρχει για $s > a \geq 0$ και c είναι μια θετική σταθερά, τότε

$$\mathcal{L}\{u_c(t)f(t-c)\} = e^{-cs}\mathcal{L}\{f(t)\} = e^{-cs}F(s), \quad s > a$$

και

$$u_c(t)f(t-c) = \mathcal{L}^{-1}\{e^{-cs}F(s)\}$$

Παράδειγμα 1: Να υπολογιστεί ο μ. Laplace της

$$f(t) = \begin{cases} \sin t, & 0 \leq t < \pi/4 \\ \sin t + \cos\left(t - \pi/4\right), & t \geq \pi/4 \end{cases}$$

- Η $f(t)$ μπορεί να γραφεί ως

$$f(t) = \sin t + u_{\pi/4}(t) \cos\left(t - \pi/4\right)$$

- Ο μετασχηματισμός Laplace της $f(t)$ είναι

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{s^2+1} + e^{-\frac{\pi}{4}s} \frac{s}{s^2+1}$$

Συναρτήσεις Βήματος

Παράδειγμα 2: Να υπολογιστεί ο αντίστροφος μ. Laplace της

$$F(s) = \frac{1 - e^{-2s}}{s^2}$$

- Η $F(s)$ μπορεί να γραφεί ως

$$F(s) = \frac{1}{s^2} - e^{-2s}\frac{1}{s^2} = \mathcal{L}\{t\} - \mathcal{L}\{u_2(t)(t-2)\}$$

- Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace της $F(s)$ είναι

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = t - u_2(t)(t-2) = \begin{cases} t, & 0 \leq t < 2 \\ 2, & t \geq 2 \end{cases}$$

Συναρτήσεις Βήματος

Θεώρημα: Εάν ο μετασχηματισμός Laplace $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ υπάρχει για $s > a \geq 0$ και c είναι μια θετική σταθερά, τότε

$$\mathcal{L}\{e^{ct}f(t)\} = F(s-c), \quad s > a + c$$

και

$$e^{ct}f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s-c)\}$$

Παράδειγμα: Ο αντίστροφος μ. Laplace της

$$G(s) = \frac{1}{s^2 - 4s + 5}$$

υπολογίζεται ως εξής:

$$G(s) = \frac{1}{s^2 - 4s + 5} = \frac{1}{(s-2)^2 + 1} \equiv F(s-2)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{F(s-2)\} = e^{2t}\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = e^{2t}\sin t$$

Εφαρμογές στις Διαφορικές Εξισώσεις

Επίλυση Γραμμικών ΔΕν με Σταθερούς Συντελεστές

Παράδειγμα 1: Να λυθεί το ΠΑΤ

$$2y'' + y' + 2y = g(t), \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$$

όπου

$$g(t) = \left\{ \begin{array}{ll} 0, & 0 \le t < 5 \\ 1, & 5 \le t < 20 \\ 0, & t \ge 20 \end{array} \right\} = u_5(t) - u_{20}(t)$$

Λύση:

$$y(t) = u_5(t)h(t-5) - u_{20}(t)h(t-20)$$

όπου

$$h(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-t/4}\left[\cos\left(\frac{\sqrt{15}}{4}t\right) + \frac{\sqrt{15}}{15}\sin\left(\frac{\sqrt{15}}{4}t\right)\right]$$

Παράδειγμα 2: Να λυθεί το ΠΑΤ

$$y'' + 4y = g(t), \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$$

όπου

$$g(t) = \left\{ \begin{array}{cl} 0, & 0 \leq t < 5 \\ \frac{t-5}{5}, & 5 \leq t < 10 \\ 1, & t \geq 10 \end{array} \right\} = \frac{1}{5}\left[u_5(t)(t-5) - u_{10}(t)(t-10)\right]$$

Λύση:

$$y(t) = \frac{1}{5}\left[u_5(t)h(t-5) - u_{10}(t)h(t-10)\right]$$

όπου

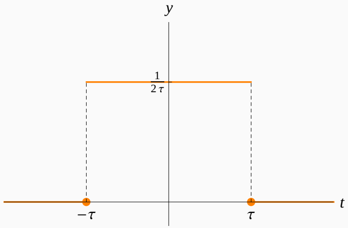
$$h(t) = \frac{1}{4}t - \frac{1}{8}\sin 2t$$

Κρουστικές Συναρτήσεις

Κρουστικές Συναρτήσεις

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$g(t) = d_\tau(t) = \begin{cases} 0, & t \le -\tau \quad \text{ή} \quad t \ge \tau \\ \frac{1}{2\tau}, & -\tau < t < \tau \end{cases}, \quad \tau > 0$$



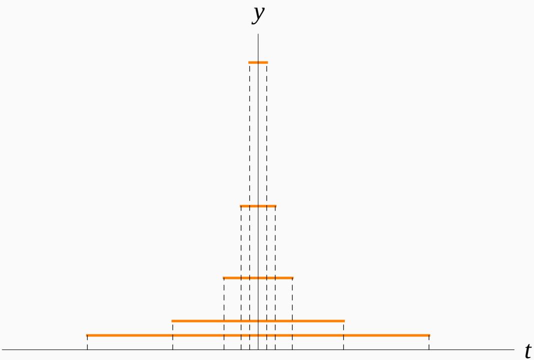
$$y = d_\tau(t)$$

Θεωρούμε επίσης το ολοκλήρωμα

$$I(\tau) = \int_{-\tau}^{\tau} g(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)dt = 1$$

Κρουστικές Συναρτήσεις

Παρατηρούμε ότι



$$y = d_\tau(t) \text{ καθώς } \tau \to 0$$

$$\lim_{\tau \to 0} d_\tau(t) = 0, \quad t \neq 0 \qquad \text{και} \qquad \lim_{\tau \to 0} I(\tau) = 1$$

Κρουστικές Συναρτήσεις

Ορισμοί:

- **Μοναδιαία κρουστική 'συνάρτηση'** (ή 'συνάρτηση' δ του Dirac) στο σημείο $t = 0$:

  $$\delta(t) = 0 \quad \text{για} \quad t \neq 0$$

  και

  $$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

  Μοναδιαία κρουστική συνάρτηση στο σημείο $t = t_0$:

  $$\delta(t - t_0) = 0 \quad \text{για} \quad t \neq t_0$$

  και

  $$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) dt = 1$$

Κρουστικές Συναρτήσεις

- Μετασχηματισμός Laplace της συναρτήσεως δ:

$$\mathcal{L}\{\delta(t-t_0)\} = \lim_{\tau\to 0} \mathcal{L}\{d_\tau(t-t_0)\} = e^{-st_0} \quad t_0 > 0$$

και

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = \lim_{t_0\to 0} \mathcal{L}\{\delta(t-t_0)\} = \lim_{t_0\to 0} e^{-st_0} = 1$$

- Έστω $f(t)$ μια συνάρτηση η οποία είναι συνεχής σε μια γειτονιά του σημείου t_0. Τότε, ορίζουμε

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0) f(t) dt = \lim_{\tau\to 0} \int_{-\infty}^{\infty} d_\tau(t-t_0) f(t) dt$$

Αποδεικνύεται ότι

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0) f(t) dt = f(t_0)$$

Κρουστικές Συναρτήσεις

Παράδειγμα: Να λυθεί το ΠΑΤ

$$2y'' + y' + 2y = \delta(t-5), \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$$

Επίλυση με Laplace:

- Μετασχηματισμός Laplace της λύσης:

$$Y(s) = \frac{e^{-5s}}{2s^2 + s + 2} = e^{-5s}\frac{1}{2s^2 + s + 2}$$

ή

$$Y(s) = e^{-5s}\frac{2}{\sqrt{15}}\frac{\sqrt{15}/4}{\left(s + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{15}{16}}$$

- Λύση:

$$y(t) = u_5(t)\left[\frac{2}{\sqrt{15}}e^{-(t-5)/4}\sin\frac{\sqrt{15}}{4}(t-5)\right]$$

Το Ολοκλήρωμα της Συνέλιξης

Το Ολοκλήρωμα της Συνέλιξης

Θεώρημα: Εάν οι μετασχηματισμοί $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ και $G(s) = \mathcal{L}\{g(t)\}$ υπάρχουν για $s > a \geq 0$, τότε

$$H(s) = F(s)G(s) = \mathcal{L}\{h(t)\}, \quad s > a$$

όπου

$$h(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

Η συνάρτηση $h(t)$ αναφέρεται στη βιβλιογραφία ως η συνέλιξη των συναρτήσεων $f(t)$ και $g(t)$ και συμβολίζεται ως

$$h(t) = (f * g)(t)$$

Επίσης, τα αντιστοιχα ολοκληρώματα στον ορισμό της $h(t)$ αναφέρονται ως ολοκληρώματα συνέλιξης.

Το Ολοκλήρωμα της Συνέλιξης

Παράδειγμα: Να υπολογιστεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace της συναρτήσεως

$$H(s) = \frac{a}{s^2(s^2+a^2)}$$

Υπολογισμός:

$$H(s) = \frac{1}{s^2}\frac{a}{s^2+a^2}$$

Απ΄ το θεώρημα της συνέλιξης

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\} = \int_0^t (t-\tau)\sin a\tau d\tau = \frac{at - \sin at}{a^2}$$

Παρομοίως

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\} = \int_0^t \tau \sin a(t-\tau) d\tau = \frac{at - \sin at}{a^2}$$

Το Ολοκλήρωμα της Συνέλιξης

Παράδειγμα: Να λυθεί το ΠΑΤ

$$y'' + 4y = g(t), \qquad y(0) = 3, \quad y'(0) = -1$$

Επίλυση με Laplace:

- Μετασχηματισμός Laplace της λύσης:

$$Y(s) = \frac{3s-1}{s^2+4} + \frac{G(s)}{s^2+4}, \quad G(s) = \mathcal{L}\{g(t)\}$$

ή

$$Y(s) = 3\frac{s}{s^2+4} - \frac{1}{2}\frac{2}{s^2+4} + \frac{1}{2}\frac{2}{s^2+4}G(s)$$

- Λύση:

$$y(t) = 3\cos 2t - \frac{1}{2}\sin 2t + \frac{1}{2}\int_0^t \sin 2(t-\tau)g(\tau)d\tau$$

Το Ολοκλήρωμα της Συνέλιξης

Θεωρούμε το ΠΑΤ:

$$ay'' + by' + cy = g(t), \qquad y(0) = y_0, \quad y'(0) = y_0' \tag{1}$$

Επίλυση με Laplace:

- Μετασχηματισμός Laplace της λύσης:

$$Y(s) = \Phi(s) + \Psi(s)$$

  όπου

$$\Phi(s) = \frac{(as+b)y_0 + ay_0'}{as^2 + bs + c}, \quad \Psi(s) = \frac{G(s)}{as^2 + bs + c}, \quad G(s) = \mathcal{L}\{g(t)\}$$

- Λύση:

$$y(t) = \phi(t) + \psi(t), \quad \phi(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\Phi(s)\}, \quad \psi(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\Psi(s)\}$$

Το Ολοκλήρωμα της Συνέλιξης

Παρατηρήσεις:

- Το ΠΑΤ (1) μπορεί να θεωρηθεί ως μια επαλληλία του προβλήματος

$$ay'' + by' + cy = 0, \qquad y(0) = y_0, \quad y'(0) = y_0' \tag{2}$$

  με λύση $y(t) = \phi(t)$, και του προβλήματος

$$ay'' + by' + cy = g(t), \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0 \tag{3}$$

  με λύση $y(t) = \psi(t)$.

- Γράφοντας

$$\Psi(s) = H(s)G(s), \qquad H(s) = \frac{1}{as^2 + bs + c}$$

  η λύση του προβλήματος (3) μπορεί να υπολογιστεί ως

$$\psi(t) = \int_0^t h(t-\tau)g(\tau)d\tau, \qquad h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\}$$