Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις

Μιχάλης Αγόρας
Email: agoras@mie.uth.gr

Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών
Εργαστήριο Μηχανικής και Αντοχής των Υλικών
Προπτυχιακό Πρόγραμμα Σπουδών
Χειμερινό Εξάμηνο 2018-2019

Ο Μετασχηματισμός Laplace

Ο Μετασχηματισμός Laplace

- **Ολοκληρωτικοί μετασχηματισμοί**:

$$F(s) = \int_{\alpha}^{\beta} K(s,t) f(t) dt$$

Η συνάρτηση $K(s,t)$ ονομάζεται **πυρήνας** του μετασχηματισμού.

- **Μετασχηματισμός Laplace**:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_{0}^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

Λέμε ότι η συνάρτηση $F(s)$ είναι ο μετασχηματισμός Laplace της συναρτήσεως $f(t)$.

- **Μη γνήσιο ολοκλήρωμα**:

$$\int_a^{\infty} f(t)dt = \lim_{A \to \infty} \int_a^A f(t)dt \tag{1}$$

Εάν το όριο $\lim_{A \to \infty} \int_a^A f(t)dt$ υπάρχει, τότε λέμε ότι το μη γνήσιο ολοκλήρωμα $\int_a^{\infty} f(t)dt$ **συγκλίνει** σε αυτό το όριο. Διαφορετικά, λέμε ότι το μη γνήσιο ολοκλήρωμα **αποκλίνει**.

Ο Μετασχηματισμός Laplace

Ορισμός: Λέμε ότι μια συνάρτηση $f(t)$ είναι **τμηματικά συνεχής** στο διάστημα $\alpha \leq t \leq \beta$ εάν το διάστημα αυτό μπορεί να χωριστεί σε ένα πεπερασμένο αριθμό n υποδιαστημάτων $t_{i-1} < t < t_i$, όπου $i = 1, ..., n$ και $\alpha = t_0 < t_1 < ... < t_n = \beta$, τέτοια ώστε για κάθε υποδιάστημα $t_{i-1} < t < t_i$:

i) Η $f(t)$ είναι συνεχής στο εσωτερικό του υποδιαστήματος.

ii) Η $f(t)$ τείνει σε ένα πεπερασμένο όριο στα άκρα του υποδιαστήματος καθώς το t τείνει σε αυτά τα άκρα απ΄ το εσωτερικό του διαστήματος.

Παρατηρήσεις:

- Εάν η $f(t)$ είναι τμηματικά συνεχής στο διάστημα $\alpha \leq t \leq A$, τότε το ολοκλήρωμα $\int_a^A f(t)dt$ υπάρχει.
- Εάν η $f(t)$ είναι τμηματικά συνεχής για $t > a$, τότε το ολοκλήρωμα $\int_a^A f(t)dt$ υπάρχει για κάθε $A > a$.

Θεώρημα: Έστω ότι η συνάρτηση $f(t)$ είναι τμηματικά συνεχής για $t \geq a$.

- Εάν
  - $i)$ $|f(t)| \leq g(t)$ για $t \geq M$, όπου M είναι ένας θετικός πραγματικός αριθμός, και
  - $ii)$ το ολοκλήρωμα $\int_M^\infty g(t)dt$ συγκλίνει,

  τότε το ολοκλήρωμα $\int_a^\infty f(t)dt$ συγκλίνει.

- Εάν
  - $i)$ $f(t) \geq g(t) \geq 0$ για $t \geq M$, όπου M είναι ένας θετικός πραγματικός αριθμός, και
  - $ii)$ το ολοκλήρωμα $\int_M^\infty g(t)dt$ αποκλίνει,

  τότε το ολοκλήρωμα $\int_a^\infty f(t)dt$ αποκλίνει.

Θεώρημα: Έστω ότι ισχύουν οι συνθήκες:

i) Η συνάρτηση $f(t)$ είναι τμηματικά συνεχής στο διάστημα $0 \leq t \leq A$ για κάθε θετικό πραγματικό αριθμό A.

ii) Η συνάρτηση $f(t)$ είναι εκθετικής τάξης, δηλαδή, υπάρχουν πραγματικές σταθερές a, $K > 0$ και $M > 0$ τέτοιες ώστε $|f(t)| \leq Ke^{at}$ για $t \geq M$.

Τότε ο μερασχηματισμός Laplace

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$$

υπάρχει για $s > a$.

Παραδείγματα:

1. $f(t) = 1,\ t \geq 0$:
$$\mathcal{L}\{1\} = \int_0^\infty e^{-st} dt = \frac{1}{s}, \quad s > 0$$
2. $f(t) = e^{at},\ t \geq 0$:
$$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \int_0^\infty e^{-(s-a)t} dt = \frac{1}{s-a}, \quad s > a$$
3. $f(t) = \sin at,\ t \geq 0$:
$$\mathcal{L}\{\sin at\} = \int_0^\infty e^{-st} \sin at dt = \frac{a}{s^2 + a^2}, \quad s > 0$$
4. $f(t) = \cos at,\ t \geq 0$:
$$\mathcal{L}\{\cos at\} = \int_0^\infty e^{-st} \cos at dt = \frac{s}{s^2 + a^2}, \quad s > 0$$

Ο Μετασχηματισμός Laplace

Θεώρημα: Έστω ότι οι μετασχηματισμοί Laplace δυο συναρτήσεων $f_1(t)$ και $f_2(t)$ υπάρχουν για $s > a_1$ και $s > a_2$, αντίστοιχα. Τότε, για $s > \max\{a_1, a_2\}$

$$\mathcal{L}\{c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)\} = c_1 \mathcal{L}\{f_1(t)\} + c_2 \mathcal{L}\{f_2(t)\}$$

Δηλαδή, **ο μετασχηματισμός Laplace είναι γραμμικός**.

Παράδειγμα: $f(t) = 5e^{-2t} - 3\sin 4t,\ t \geq 0$:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f(t)\} &= \mathcal{L}\{5e^{-2t} - 3\sin 4t\} \\ &= 5\mathcal{L}\{e^{-2t}\} - 3\mathcal{L}\{\sin 4t\} \\ &= \frac{5}{s+2} - \frac{12}{s^2+16}, \qquad s > 0\end{aligned}$$

Θεώρημα: Έστω ότι η συνάρτηση $f(t)$ είναι συνεχής και ότι η συνάρτηση $f'(t)$ είναι τμηματικά συνεχής στο διάστημα $0 \leq t \leq A$ για κάθε $A > 0$. Έστω επίσης ότι υπάρχουν πραγματικές σταθερές a, $K > 0$ και $M > 0$ τέτοιες ώστε $|f(t)| \leq Ke^{at}$ για $t \geq M$. Τότε ο $\mathcal{L}\{f'(t)\}$ υπάρχει και δίνεται απ' τη σχέση

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0)$$

Πόρισμα: Έστω ότι οι συναρτήσεις $f(t), f'(t), ..., f^{(n-1)}(t)$ είναι συνεχείς και ότι η συνάρτηση $f^{(n)}(t)$ είναι τμηματικά συνεχής στο διάστημα $0 \leq t \leq A$ για κάθε $A > 0$. Έστω επίσης ότι υπάρχουν πραγματικές σταθερές a, $K > 0$ και $M > 0$ τέτοιες ώστε $|f(t)| \leq Ke^{at}$, $|f'(t)| \leq Ke^{at}$, ..., $|f^{(n-1)}(t)| \leq Ke^{at} \quad \forall\, t \geq M$. Τότε ο $\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\}$ υπάρχει και δίνεται απ' τη σχέση

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n\mathcal{L}\{f(t)\} - s^{n-1}f(0) - ... - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$$

Εφαρμογές στις Διαφορικές Εξισώσεις

Εφαρμογές στις Διαφορικές Εξισώσεις

Παράδειγμα: Να λυθεί το ΠΑΤ

$$y'' - y' - 2y = 0, \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

Επίλυση με Laplace:

- Εφαρμόζουμε το μετασχηματισμό Laplace στη ΔΕ:

$$\left[s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0)\right] - [sY(s) - y(0)] - 2Y(s) = 0$$

- Λύνουμε ως προς $Y(s)$:

$$Y(s) = \frac{s-1}{s^2 - s - 2} = \frac{1/3}{s-2} + \frac{2/3}{s+1}$$

- Αντιστρέφουμε το μετασχηματισμό Laplace $Y(s)$:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \frac{1}{3}e^{2t} + \frac{2}{3}e^{-t}$$

Εφαρμογές στις Διαφορικές Εξισώσεις

Θεωρούμε την εξίσωση

$$ay'' + by' + cy = f(t)$$

Επίλυση με Laplace:

- Εφαρμόζουμε το μετασχηματισμό Laplace στη ΔΕ:

$$a\left[s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0)\right] + b\left[sY(s) - y(0)\right] + cY(s) = F(s)$$

- Λύνουμε ως προς $Y(s)$:

$$Y(s) = \frac{(as+b)y(0) + ay'(0)}{as^2 + bs + c} + \frac{F(s)}{as^2 + bs + c}$$

- Αντιστρέφουμε το μετασχηματισμό Laplace $Y(s)$:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}$$

Παρατηρήσεις:

- Ο μετασχηματισμός Laplace αναγάγει τη διαφορική εξίσωση ως προς $y(t)$ σε μια αλγεβρική εξίσωση ως προς $Y(s)$.
- Οι μη ομογενείς εξισώσεις λύνονται με τον ίδιο τρόπο που λύνονται και οι ομογενείς εξισώσεις.
- Η μέθοδος εφαρμόζεται κατά τον ίδιο τρόπο για εξισώσεις ανωτέρας τάξεως.
- Η βασική δυσκολία της μεθόδου έγκειται στην αντιστροφή του μετασχηματισμού Laplace.

Θεώρημα: Έστω ότι οι συναρτήσεις $f(t)$ και $g(t)$ είναι τμηματικά συνεχείς και εκθετικής τάξης. Εάν $\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{g(t)\}$ για $s > a$, τότε $f(t) = g(t)$ για κάθε $t > 0$, με πιθανές εξεραίσεις τα σημεία ασυνέχειας των $f(t)$ και $g(t)$.

Θεώρημα: Εάν υπάρχουν οι αντίστροφοι μετασχηματισμοί Laplace των συναρτήσεων $F_1(s)$ και $F_2(s)$, τότε

$$\mathcal{L}^{-1}\{c_1F_1(s) + c_2F_2(s)\} = c_1\mathcal{L}^{-1}\{F_1(s)\} + c_2\mathcal{L}^{-1}\{F_2(s)\}$$

Δηλαδή, **ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace είναι γραμμικός**.

Μετασχηματισμοί Laplace στοιχειωδών συναρτήσεων:

$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$
1	$\frac{1}{s}, \quad s > 0$
$t^n, \quad n \in \mathbb{N}$	$\frac{n!}{s^{n+1}}, \quad s > 0$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}, \quad s > a$
$\sin at$	$\frac{a}{s^2+a^2}, \quad s > 0$
$\cos at$	$\frac{s}{s^2+a^2}, \quad s > 0$
$\sinh at$	$\frac{a}{s^2-a^2}, \quad s > \lvert a \rvert$
$\cosh at$	$\frac{s}{s^2-a^2}, \quad s > \lvert a \rvert$
$t^n e^{at}, \quad n \in \mathbb{N}$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}, \quad s > a$
$e^{at} \sin bt$	$\frac{b}{(s-a)^2+b^2}, \quad s > a$
$e^{at} \cos bt$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}, \quad s > a$

Εφαρμογές στις Διαφορικές Εξισώσεις

Παράδειγμα: Να λυθεί το ΠΑΤ

$$y'' + y = \sin 2t, \qquad y(0) = 2, \quad y'(0) = 1$$

Επίλυση με Laplace:

- Εφαρμόζουμε το μετασχηματισμό Laplace στη ΔΕ:

$$\left[s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0)\right] + Y(s) = \frac{2}{s^2+4}$$

- Λύνουμε ως προς $Y(s)$:

$$Y(s) = \frac{2s^3 + s^2 + 8s + 6}{(s^2+1)(s^2+4)} = \frac{2s}{s^2+1} + \frac{5/3}{s^2+1} - \frac{2/3}{s^2+4}$$

- Αντιστρέφουμε το μετασχηματισμό Laplace $Y(s)$:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = 2\cos t + \frac{5}{3}\sin t - \frac{1}{3}\sin 2t$$