Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις

Μιχάλης Αγόρας
Email: agoras@mie.uth.gr

Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών
Εργαστήριο Μηχανικής και Αντοχής των Υλικών
Προπτυχιακό Πρόγραμμα Σπουδών
Χειμερινό Εξάμηνο 2018-2019

Λύσεις Γύρω Από Ιδιόμορφα Σημεία

Η Εξίσωση Euler

Εξίσωση Euler:

$$L[y] = (x - x_0)^2 y'' + \alpha(x - x_0)y' + \beta y = 0, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R} \tag{1}$$

Παρατηρήσεις:

- Το $x = x_0$ είναι **ιδιόμορφο σημείο** της ΔΕ (1).
- Για $x \neq x_0$, δυο **ειδικές λύσεις** της ΔΕς (1) είναι οι

$$y_1 = |x - x_0|^{r_1}, \qquad y_2 = |x - x_0|^{r_2}$$

όπου r_1 και r_2 είναι οι ρίζες της δευτεροβάθμιας εξισώσεως

$$F(r) = r(r-1) + \alpha r + \beta = 0 \tag{2}$$

Η (2) ονομάζεται **ενδεικτική εξίσωση** (ΕΕ) της ΔΕς (1).

Η Εξίσωση Euler

Η **γενική λύση** $y(x)$ της εξισώσεως Euler για $x \neq x_0$ εξαρτάται από τον τύπο των ριζών r_1 και r_2 της ΕΕ (2).

- Για $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$, **με** $r_1 \neq r_2$:

$$y(x) = c_1|x - x_0|^{r_1} + c_2|x - x_0|^{r_2}, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

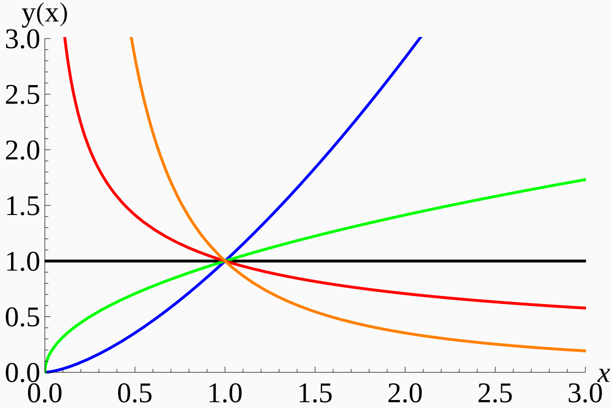
- Για $r_1 = r_2 \in \mathbb{R}$:

$$y(x) = c_1|x - x_0|^{r_1} + c_2|x - x_0|^{r_1} \ln|x - x_0|, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

- Για $r_1, r_2 = \lambda \pm i\mu \in \mathbb{C}$, **με** $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} y(x) = & c_1|x - x_0|^{\lambda} \cos(\mu \ln|x - x_0|) + c_2|x - x_0|^{\lambda} \sin(\mu \ln|x - x_0|), \\ & c_1, c_2 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

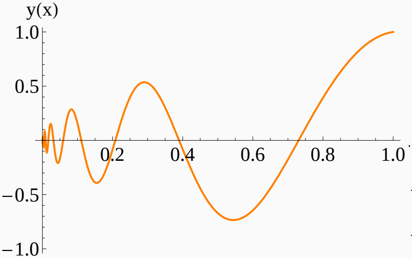
- **Λύσεις της μορφής** $y(x) = x^r$:



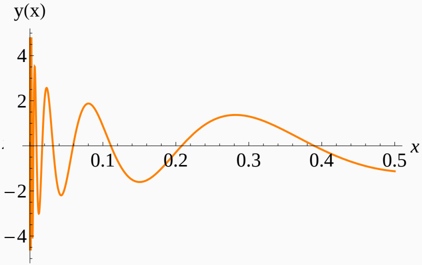
$r = -3/2, -1/2, 0, 1/2, 3/2$

Η Εξίσωση Euler: Λύσεις Κοντά στο $x_0 = 0$

- **Λύσεις της μορφής** $y(x) = x^{\lambda} \cos(\mu \ln x)$:



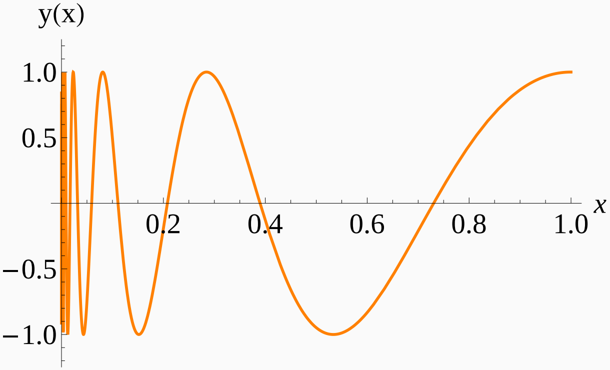
$y(x) = x^{1/2} \cos(5 \ln x)$



$y(x) = x^{-1/4} \cos(5 \ln x)$

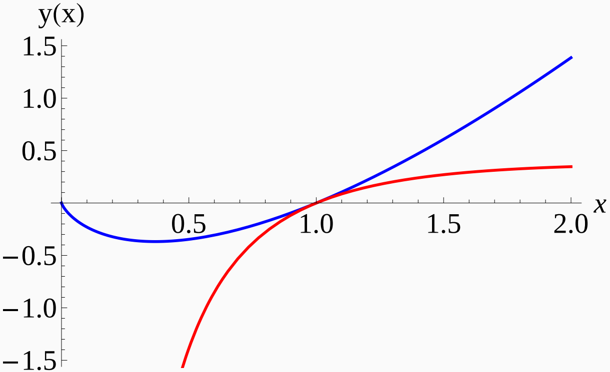
Η Εξίσωση Euler: Λύσεις Κοντά στο $x_0 = 0$

- **Λύσεις της μορφής** $y(x) = \cos(\mu \ln x)$:



$y(x) = \cos(5 \ln x)$

- **Λύσεις της μορφής** $y(x) = x^r \ln x$:



$r = 1, -1$

Ιδιόμορφα Σημεία

Θεωρούμε την εξίσωση:

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0$$

Ορισμοί:

- Ένα ιδιόμορφο σημείο x_0 ($P(x_0) = 0$) λέμε ότι είναι **ομαλό ιδιόμορφο σημείο** της εξισώσεως εάν οι συναρτήσεις

$$(x - x_0)\frac{Q(x)}{P(x)}, \qquad (x - x_0)^2\frac{R(x)}{P(x)}$$

  είναι αναλυτικές στο x_0. Στην **ειδική περίπτωση** όπου οι $P(x)$, $Q(x)$ και $R(x)$ είναι πολυώνυμα, το x_0 είναι ομαλό ιδιόμορφο σημείο της εξισώσεως εάν υπάρχουν τα όρια

$$\lim_{x \to x_0}(x - x_0)\frac{Q(x)}{P(x)}, \qquad \lim_{x \to x_0}(x - x_0)^2\frac{R(x)}{P(x)}$$

- Διαφορετικά, λέμε ότι το x_0 είναι ένα **ανώμαλο ιδιόμορφο σημείο** της εξισώσεως.

Παράδειγμα (εξίσωση Legendre):

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \alpha(\alpha+1)y = 0, \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

- **Ιδιόμορφα σημεία**:

$$P(x) = (1-x^2) = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

- Το $x_0 = 1$ είναι ένα **ομαλό ιδιόμορφο σημείο**, διότι

$$\lim_{x\to 1}\left[(x-1)\frac{-2x}{1-x^2}\right] = \lim_{x\to 1}\left[(x-1)\frac{-2x}{(1-x)(1+x)}\right] = 1$$

και

$$\lim_{x\to 1}\left[(x-1)^2\frac{\alpha(\alpha+1)}{1-x^2}\right] = \lim_{x\to 1}\left[(x-1)^2\frac{\alpha(\alpha+1)}{(1-x)(1+x)}\right] = 0$$

Ιδιόμορφα Σημεία

Παράδειγμα (εξίσωση Legendre):

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \alpha(\alpha+1)y = 0, \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

- **Ιδιόμορφα σημεία**:

$$P(x) = (1-x^2) = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

- Το $x_0 = -1$ είναι ένα **ομαλό ιδιόμορφο σημείο**, διότι

$$\lim_{x\to -1}\left[(x+1)\frac{-2x}{1-x^2}\right] = \lim_{x\to -1}\left[(x+1)\frac{-2x}{(1-x)(1+x)}\right] = 1$$

και

$$\lim_{x\to -1}\left[(x+1)^2\frac{\alpha(\alpha+1)}{1-x^2}\right] = \lim_{x\to -1}\left[(x+1)^2\frac{\alpha(\alpha+1)}{(1-x)(1+x)}\right] = 0$$

Παράδειγμα:

$$2x(x-2)^2y'' + 3xy' + (x-2)y = 0$$

- **Ιδιόμορφα σημεία**:

$$P(x) = 2x(x-2)^2 = 0 \Rightarrow x = 0, 2$$

- Το $x_0 = 0$ είναι ένα **ομαλό ιδιόμορφο σημείο**, διότι

$$\lim_{x\to 0}\left[x\frac{3x}{2x(x-2)^2}\right] = 0 \quad \text{και} \quad \lim_{x\to 0}\left[x^2\frac{x-2}{2x(x-2)^2}\right] = 0$$

- Το $x_0 = 2$ είναι ένα **ανώμαλο ιδιόμορφο σημείο**, διότι

$$\lim_{x\to 2}\left[(x-2)\frac{3x}{2x(x-2)^2}\right] : \text{δεν υπάρχει}$$

Λύσεις Γύρω Από Ομαλά Ιδιόμορφα Σημεία

Έστω ότι το $x_0 = 0$ είναι ένα **ομαλό ιδιόμορφο σημείο** της εξισώσεως

$$L[y] = P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0$$

Να υπολογιστούν οι **λύσεις** της εξισώσεως γύρω απ΄ το $x_0 = 0$.

Παρατηρήσεις:

- Επειδή το $x_0 = 0$ είναι ένα ομαλό ιδιόμορφο σημείο, μπορούμε να γράψουμε

  $$x\frac{Q(x)}{P(x)} \equiv xp(x) = p_0 + p_1 x + ... + p_n x^n + ... = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n$$

  και

  $$x^2\frac{R(x)}{P(x)} \equiv x^2 q(x) = q_0 + q_1 x + ... + q_n x^n + ... = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n$$

  σε ένα διάστημα $|x| < \rho$, όπου $\rho > 0$.

Λύσεις Γύρω Από Ομαλά Ιδιόμορφα Σημεία

- Γύρω απ' το σημείο $x_0 = 0$, η ΔΕ μπορεί να γραφεί ως

$$L[y] = x^2 y'' + x[xp(x)]y' + [x^2 q(x)]y = 0$$

ή

$$L[y] = x^2 y'' + x\left[\sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n\right] y' + \left[\sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n\right] y = 0 \qquad (3)$$

ή

$$x^2 y'' + x[p_0 + p_1 x + \ldots + p_n x^n + \ldots]y' + [q_0 + q_1 x + \ldots + q_n x^n + \ldots]y = 0$$

- Στην ειδική περίπτωση όπου $p_n = q_n = 0$ για κάθε $n \geq 1$, η ΔΕ παίρνει τη μορφή

$$x^2 y'' + x p_0 y' + q_0 y = 0$$

η οποία είναι μια εξίσωση Euler.

- **Για** $x > 0$, υποθέτουμε ότι οι λύσεις της ΔΕς σε ένα διάστημα τιμών του x κοντά στο σημείο $x_0 = 0$ έχουν τη μορφή

$$y(x) = x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n}, \qquad x > 0 \tag{4}$$

όπου $a_0 \neq 0$. Μια σειρά της μορφής (4) ονομάζεται **σειρά Frobenius**.

Βασικά ζητήματα:

1. Τιμές του r για τις οποίες η ΔΕ έχει λύσεις της μορφής (4).
2. Αναδρομική σχέση για τους συντελεστές a_n.
3. Ακτίνα σύγκλισης της σειράς $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

Λύσεις Γύρω Από Ομαλά Ιδιόμορφα Σημεία

Παράδειγμα: Να υπολογιστούν οι λύσεις της εξισώσεως

$$2x^2y'' - xy' + (1+x)y = 0$$

στη γειτονιά του ιδιόμορφου σημείου $x_0 = 0$.

Παρατήρηση: Το $x_0 = 0$ είναι ένα **ομαλό ιδιόμορφο σημείο**, διότι

$$\lim_{x\to 0}\left[x\frac{-x}{2x^2}\right] = -\frac{1}{2} \quad \text{και} \quad \lim_{x\to 0}\left[x^2\frac{1+x}{2x^2}\right] = \frac{1}{2}$$

Υπόθεση: Έστω ότι οι λύσεις της ΔΕς κοντά στο $x_0 = 0$ έχουν τη μορφή (4), δηλαδή,

$$y(x) = x^r\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n}, \qquad x > 0$$

με $a_0 \neq 0$.

Λύσεις Γύρω Από Ομαλά Ιδιόμορφα Σημεία

Αντικαθιστώντας τη σειρά (4) στη ΔΕ, βρίσκουμε ότι πρέπει να ισχυούν οι ακόλουθες **συνθήκες**:

- Ενδεικτική Εξίσωση (ΕΕ):

$$F(r) = 2r(r-1) - r + 1 = 0 \Rightarrow r_1 = 1,\ r_2 = \frac{1}{2}$$

- Αναδρομική Εξίσωση (ΑΕ):

$$a_n = -\frac{a_{n-1}}{\left[(r+n)-1\right]\left[2(r+n)-1\right]}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Παρατήρηση: Η αναδρομική εξίσωση εξαρτάται απ΄ το r.

Για $r = r_1 = 1$:

- Συντελεστές της δυναμοσειράς:

$$a_n = \frac{(-1)^n 2^n}{(2n+1)!} a_0, \quad n = 1, 2, 3, ...$$

- Ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς:

$$\rho = \lim_{n\to\infty} |\frac{a_n}{a_{n+1}}| = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} |(2n+2)(2n+3)| = \infty$$

- Ειδική λύση της ΔΕς:

$$y_1(x) = x \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{(2n+1)!} x^n \right]$$

Παρατήρηση: Η συνάρτηση $y_1(x)$ **είναι αναλυτική** σε κάθε σημείο $x \in \mathbb{R}$.

Για $r = r_2 = 1/2$:

- Συντελεστές της δυναμοσειράς:

$$a_n = \frac{(-1)^n 2^n}{(2n)!} a_0, \quad n = 1, 2, 3, ...$$

- Ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς:

$$\rho = \lim_{n\to\infty} |\frac{a_n}{a_{n+1}}| = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} |(2n+1)(2n+2)| = \infty$$

- Ειδική λύση της ΔΕς:

$$y_2(x) = x^{1/2}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{(2n)!} x^n\right]$$

Παρατήρηση: Η συνάρτηση $y_2(x)$ **δεν είναι αναλυτική** στο σημείο $x = 0$.

Παρατήρηση: Κοντά στο σημείο $x = 0$, οι ιδιότητες των $y_1(x)$ και $y_2(x)$ προσδιορίζονται απ΄ τις συναρτήσεις x και $x^{1/2}$, αντίστοιχα, οι οποίες είναι γραμμικώς ανεξάρτητες. Επομένως, οι συναρτήσεις $y_1(x)$ και $y_2(x)$ είναι επίσης γραμμικώς ανεξάρτητες.

Γενική λύση της ΔΕς:

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x), \quad c_1,\, c_2 \in \mathbb{R}, \quad x > 0$$

όπου

$$y_1(x) = x \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{(2n+1)!} x^n \right]$$

και

$$y_2(x) = x^{1/2} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{(2n)!} x^n \right]$$

Λύσεις Γύρω Από Ομαλά Ιδιόμορφα Σημεία

Γενίκευση: Αντικαθιστώντας τη σειρά Frobenius

$$y(x) = x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n}, \quad x > 0$$

στη διαφορική εξίσωση

$$L[y] = x^2 y'' + x \left[\sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n \right] y' + \left[\sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n \right] y = 0$$

βρίσκουμε ότι

$$L[y] = F(r) a_0 x^r + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ F(r+n) a_n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k [(r+k) p_{n-k} + q_{n-k}] \right\} x^{r+n} = 0$$

όπου

$$F(r) = r(r-1) + p_0 r + q_0$$

Λύσεις Γύρω Από Ομαλά Ιδιόμορφα Σημεία

Επομένως, για να έχει η ΔΕ λύσεις τύπου Frobenius, πρέπει να ικανοποιούνται οι ακόλουθες **συνθήκες**:

1. Ενδεικτική Εξίσωση (ΕΕ):

$$F(r) = r(r-1) + p_0 r + q_0 = 0 \tag{5}$$

2. Αναδρομική Εξίσωση (ΑΕ):

$$F(r+n)a_n(r) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k(r)[(r+k)p_{n-k} + q_{n-k}] = 0, \quad n \geq 1 \tag{6}$$

Λύσεις Γύρω Από Ομαλά Ιδιόμορφα Σημεία

Θεώρημα: Έστω ότι $x_0 = 0$ και ότι οι ρίζες της ΕΕς (5) είναι $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$, με $r_1 \geq r_2$. Τότε, ισχύουν οι ακόλουθες προτάσεις:

A. Μια **ειδική λύση** $y_1(x)$ της ΔΕς είναι η

$$y_1(x) = x^{r_1}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r_1)x^n\right], \qquad x > 0$$

όπου οι συντελεστές $a_n(r_1)$ υπολογίζονται απ' την ΑΕ

$$F(r_1+n)a_n(r_1)+\sum_{k=0}^{n-1} a_k(r_1)[(r_1+k)p_{n-k}+q_{n-k}] = 0, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

για $a_0 = 1$.

B. **Η μορφή μιας ειδικής λύσης** $y_2(x)$ της ΔΕς, η οποία είναι γραμμικώς ανεξάρτητη της $y_1(x)$, **εξαρτάται από τη διαφορά μεταξύ των ριζών** r_1 **και** r_2 της ΕΕς. Συγκεκριμένα,

i) **Εάν** $r_1 - r_2 \neq 0, 1, 2, 3, \ldots$, τότε

$$y_2(x) = x^{r_2}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r_2)x^n\right], \qquad x > 0$$

όπου οι συντελεστές $a_n(r_2)$ υπολογίζονται απ΄ την ΑΕ

$$F(r_2+n)a_n(r_2)+\sum_{k=0}^{n-1} a_k(r_2)[(r_2+k)p_{n-k}+q_{n-k}] = 0, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

για $a_0 = 1$.

B. **Η μορφή μιας ειδικής λύσης** $y_2(x)$ της ΔΕς, η οποία είναι γραμμικώς ανεξάρτητη της $y_1(x)$, **εξαρτάται από τη διαφορά μεταξύ των ριζών** r_1 **και** r_2 της ΕΕς. Συγκεκριμένα,

ii) **Εάν** $r_1 - r_2 = 0$ (ή $r_1 = r_2$), τότε

$$y_2(x) = y_1(x)\ln x + x^{r_1}\sum_{n=1}^{\infty} b_n(r_1)x^n, \qquad x > 0$$

όπου οι συντελεστές $b_n(r_1)$ υπολογίζονται αντικαθιστώντας την πιο πάνω έκφραση στη ΔΕ.

iii) **Εάν** $r_1 - r_2 = 1, 2, 3, \ldots$, τότε

$$y_2(x) = ay_1(x)\ln x + x^{r_2}\sum_{n=1}^{\infty} c_n(r_2)x^n, \qquad x > 0$$

όπου η σταθερά a και οι συντελεστές $c_n(r_2)$ υπολογίζονται αντικαθιστώντας την πιο πάνω έκφραση στη ΔΕ.

Λύσεις Γύρω Από Ομαλά Ιδιόμορφα Σημεία

C. **Για $x < 0$**, οι λύσεις $y_1(x)$ και $y_2(x)$ δίνονται απ' τις αντίστοιχες εκφράσεις που συζητήσαμε προηγουμένως για $x > 0$, όπου όμως θα πρέπει να γίνουν οι αντικαταστάσεις:

$$x^{r_1} \to (-x)^{r_1}, \qquad x^{r_2} \to (-x)^{r_2}, \qquad \ln x \to \ln(-x)$$

D. **Για κάθε $x \neq 0$**, οι λύσεις $y_1(x)$ και $y_2(x)$ δίνονται απ' τις αντίστοιχες εκφράσεις που συζητήσαμε προηγουμένως για $x > 0$, όπου όμως θα πρέπει να γίνουν οι αντικαταστάσεις:

$$x^{r_1} \to |x|^{r_1}, \qquad x^{r_2} \to |x|^{r_2}, \qquad \ln x \to \ln|x|$$

E. **Για $x_0 \neq 0$**, οι λύσεις $y_1(x)$ και $y_2(x)$ δίνονται απ' τις αντίστοιχες εκφράσεις που συζητήσαμε προηγουμένως για $x > 0$, όπου όμως θα πρέπει να γίνουν οι αντικαταστάσεις:

$$x^{r_1} \to |x - x_0|^{r_1},\ x^{r_2} \to |x - x_0|^{r_2},\ \ln x \to \ln|x - x_0|,\ x^n \to (x - x_0)^n$$

Λύσεις Γύρω Από Ομαλά Ιδιόμορφα Σημεία

F. Σε κάθε περίπτωση, οι δυναμοσειρές στις εκφράσεις για τις $y_1(x)$ **και** $y_2(x)$ **συγκλίνουν** τουλάχιστον για κάθε $|x - x_0| < \rho$, όπου ρ είναι η μικρότερη απ΄ τις ακτίνες σύγκλισης των δυναμοσειρών:

$$(x - x_0)p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n (x - x_0)^n$$

και

$$(x - x_0)^2 q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n (x - x_0)^n$$

G. Σε κάθε περίπτωση, οι λύσεις $y_1(x)$ και $y_2(x)$ ορίζουν ένα θεμελιώδες σύνολο λύσεων και, επομένως, η **γενική λύση** της ΔΕς έχει τη μορφή:

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x), \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Εξίσωση Bessel:

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0, \qquad x > 0$$

Παρατηρήσεις:

- Το σημείο 0 είναι ομαλό ιδιόμορφο:

$$\lim_{x\to 0} x\frac{Q(x)}{P(x)} = \lim_{x\to 0} x\frac{x}{x^2} = 1 \equiv p_0$$

$$\lim_{x\to 0} x^2\frac{R(x)}{P(x)} = \lim_{x\to 0} x^2\frac{x^2-\nu^2}{x^2} = -\nu^2 \equiv q_0$$

- Ενδεικτική εξίσωση:

$$F(r) = r^2 - \nu^2 \Rightarrow r_1 = \nu, \quad r_2 = -\nu$$

Ασκήσεις:

1. Να λυθεί η εξίσωση Bessel για $\nu = 0$ $(r_1 = r_2 = 0)$:

$$x^2 y'' + xy' + x^2 y = 0, \qquad x > 0$$

2. Να λυθεί η εξίσωση Bessel για $\nu = 1/2$ $(r_1 = 1/2,\ r_2 = -1/2)$:

$$x^2 y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right) y = 0, \qquad x > 0$$

3. Να λυθεί η εξίσωση Bessel για $\nu = 1$ $(r_1 = 1,\ r_2 = -1)$:

$$x^2 y'' + xy' + \left(x^2 - 1\right) y = 0, \qquad x > 0$$

Η Εξίσωση Bessel

Εξίσωση Bessel τάξης 0 ($\nu = 0, r_1 = r_2 = 0$):

$$x^2 y'' + xy' + x^2 y = 0, \qquad x > 0$$

Λύσεις:

- Συνάρτηση Bessel τάξης 0, 1ου είδους:

$$J_0(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2} x^{2n}$$

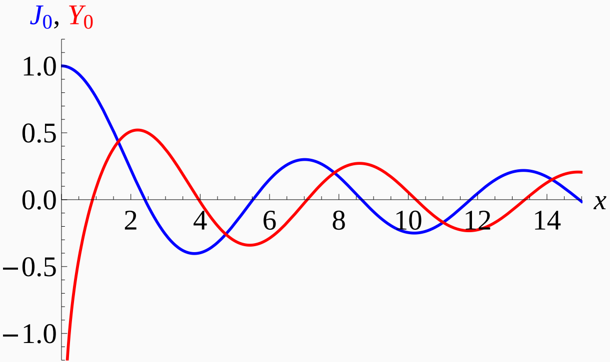
- Συνάρτηση Bessel τάξης 0, 2ου είδους:

$$Y_0(x) = \frac{2}{\pi} \left[\left(\gamma + \ln \frac{x}{2} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} H_n}{2^{2n}(n!)^2} x^{2n} \right]$$

όπου

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}, \qquad \gamma = \lim_{n \to \infty} (H_n - \ln n) \cong 0.5772$$

Συναρτήσεις Bessel τάξης 0, 1ου και 2ου είδους:



Εξίσωση Bessel τάξης 1/2 ($\nu = 0, r_1 = 1/2, r_2 = -1/2$):

$$x^2 y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right) y = 0, \qquad x > 0$$

Λύσεις:

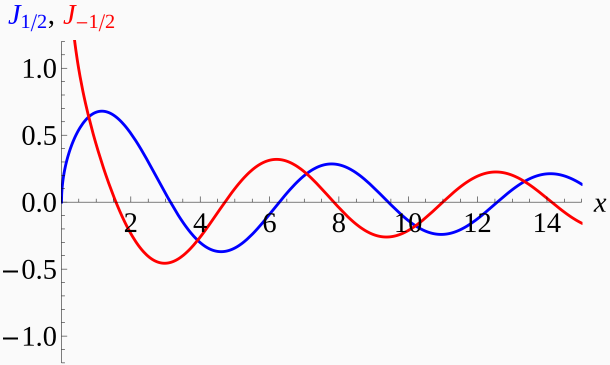
- Συνάρτηση Bessel τάξης 1/2, 1ου είδους:

$$J_{1/2}(x) = \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2} \sin x$$

- Συνάρτηση Bessel τάξης 1/2, 2ου είδους:

$$J_{-1/2}(x) = \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2} \cos x$$

Συναρτήσεις Bessel τάξης 1/2, **1ου και 2ου είδους**:



Η Εξίσωση Bessel

Εξίσωση Bessel τάξης 1 ($\nu = 1, r_1 = 1, r_2 = -1$):

$$x^2 y'' + xy' + \left(x^2 - 1\right) y = 0, \qquad x > 0$$

Λύσεις:

- Συνάρτηση Bessel τάξης 1, 1ου είδους:

$$J_1(x) = \frac{x}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n}(n+1)!n!} x^{2n}$$

- Συνάρτηση Bessel τάξης 1, 2ου είδους:

$$Y_1(x) = \frac{2}{\pi}\left(\gamma + \ln\frac{x}{2}\right) J_1(x) - \frac{2}{\pi x}\left[1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (H_n + H_{n-1})}{2^{2n}(n-1)!n!} x^{2n}\right]$$

Η Εξίσωση Bessel

Συναρτήσεις Bessel τάξης 1, 1ου και 2ου είδους: