Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις

Μιχάλης Αγόρας
Email: agoras@mie.uth.gr

Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών
Εργαστήριο Μηχανικής και Αντοχής των Υλικών
Προπτυχιακό Πρόγραμμα Σπουδών
Χειμερινό Εξάμηνο 2018-2019

Λύσεις Γύρω Από Συνήθη Σημεία

Λύσεις Γύρω Από Συνήθη Σημεία

Συνήθη Σημεία: Έστω ότι το x_0 είναι ένα σύνηθες σημείο της διαφορικής εξισώσεως

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0$$

δηλαδή, $P(x_0) \neq 0$. Τότε, η ΔΕ μπορεί να γραφεί ως

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

όπου οι συναρτήσεις $p(x) = Q(x)/P(x)$ και $q(x) = R(x)/P(x)$ είναι συνεχείς σε ένα διάστημα τιμών του x γύρω απ' το x_0.

Λύσεις: Υποθέτουμε ότι οι λύσεις της ΔΕς έχουν τη μορφή

$$y(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + ... + a_n(x - x_0)^n + ... = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$$

όπου η σειρά συγκλίνει για κάθε $|x - x_0| < \rho$, με $\rho > 0$.

Παράδειγμα: Να λυθεί η εξίσωση

$$y'' + y = 0, \qquad -\infty < x < \infty \tag{1}$$

Παρατηρήσεις:

- $P(x) = 1$, $Q(x) = 0$, $R(x) = 1$: αναλυτικές σε κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- $P(x) = 1 \neq 0$: κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι σύνηθες σημείο.

Λύσεις γύρω απ΄ το σημείο $x_0 = 0$:

- Υποθέτουμε ότι

$$y(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

- Αντικαθιστώντας στη ΔΕ βρίσκουμε ότι

$$y(x) = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} + a_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}, \quad a_0, a_1 \in \mathbb{R}$$

Λύσεις Γύρω Από Συνήθη Σημεία

- Ορίζουμε τις σειρές

$$C(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}, \qquad S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

  έτσι ώστε

$$y(x) = a_0 C(x) + a_1 S(x), \qquad a_0, a_1 \in \mathbb{R}$$

- Ακτίνα σύγκλισης της $C(x)$:

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^n/(2n)!}{(-1)^{n+1}/[2(n+1)]!} \right| = \infty$$

  Επομένως, η σειρά $C(x)$ συγκλίνει σε κάθε σημείο $x \in \mathbb{R}$.
- Ακτίνα σύγκλισης της $S(x)$:

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^n/(2n+1)!}{(-1)^{n+1}/[2(n+1)+1]!} \right| = \infty$$

  Επομένως, η σειρά $S(x)$ συγκλίνει σε κάθε σημείο $x \in \mathbb{R}$.

Λύσεις Γύρω Από Συνήθη Σημεία

- Ιδιότητες των $C(x)$ και $S(x)$:
  - *i*) $C(-x) = C(x), \quad S(-x) = -S(x)$
  - *ii*) $S'(x) = C(x), \quad C'(x) = -S(x)$
  - *iii*) $C(0) = 1 \to S'(0) = 1$
  - *iv*) $S(0) = 0 \to C'(0) = 0$
  - *v*) $W(C, S)(0) = C(0)S'(0) - C'(0)S(0) = 1 \neq 0$
- Η **γενική λύση** της ΔΕς (1) είναι:

$$y(x) = a_0 C(x) + a_1 S(x), \qquad a_0, a_1 \in \mathbb{R}$$

- Η συνάρτηση $C(x)$ μπορεί να οριστεί ως η λύση του ΠΑΤ:

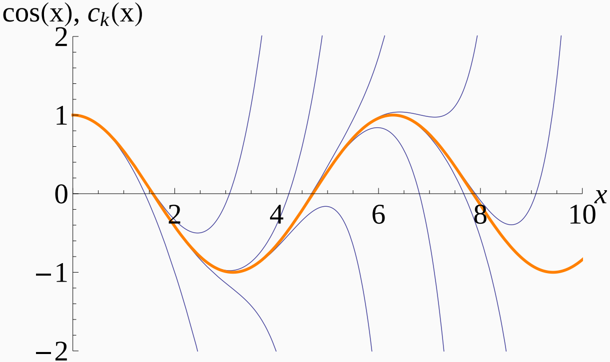
$$y'' + y = 0, \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

- Η συνάρτηση $S(x)$ μπορεί να οριστεί ως η λύση του ΠΑΤ:

$$y'' + y = 0, \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

Λύσεις Γύρω Από Συνήθη Σημεία

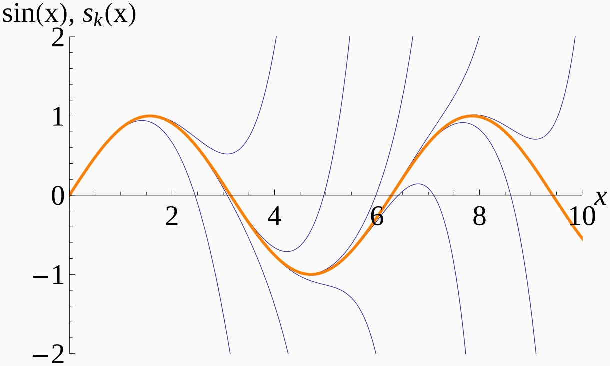
- Σύγκλιση της σειράς $C(x)$:



Οι συναρτήσεις $\cos x$ (πορτοκαλί καμπύλη) και $c_k(x) = \sum_{n=0}^{k} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$, για $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$ (μπλε καμπύλες)

Λύσεις Γύρω Από Συνήθη Σημεία

- Σύγκλιση της σειράς $S(x)$:



Οι συναρτήσεις $\sin x$ (πορτοκαλί καμπύλη) και $s_k(x) = \sum_{n=0}^{k} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdots$
$\ldots x^{2n+1}$, για $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$ (μπλε καμπύλες)

Λύσεις Γύρω Από Συνήθη Σημεία

Εξίσωση Airy:

$$y'' - xy = 0, \qquad -\infty < x < \infty \tag{2}$$

Παρατηρήσεις:

- $P(x) = 1$, $Q(x) = 0$, $R(x) = -x$: αναλυτικές σε κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- $P(x) = 1 \neq 0$: κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι σύνηθες σημείο.

Λύσεις γύρω απ΄ το σημείο $x_0 = 0$:

- Υποθέτουμε ότι

$$y(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

- Αντικαθιστώντας στη ΔΕ (1) βρίσκουμε ότι

$$y(x) = a_0 y_1(x) + a_1 y_2(x), \quad a_0, a_1 \in \mathbb{R}$$

Λύσεις Γύρω Από Συνήθη Σημεία

όπου

$$y_1(x) = 1 + \frac{x^3}{2\cdot 3} + \frac{x^6}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6} + \ldots + \frac{x^{3n}}{2\cdot 3\cdot \ldots \cdot (3n-1)\cdot (3n)} + \ldots$$

και

$$y_2(x) = x + \frac{x^4}{3\cdot 4} + \frac{x^7}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7} + \ldots + \frac{x^{3n+1}}{3\cdot 4\cdot \ldots \cdot (3n)\cdot (3n+1)} + \ldots$$

- Ακτίνα σύγκλισης της $y_1(x)$:

$$\rho = \lim_{n\to\infty} |[3(n+1)-1][3(n+1)]| = \infty$$

Επομένως, η σειρά $y_1(x)$ συγκλίνει σε κάθε σημείο $x \in \mathbb{R}$.

- Ακτίνα σύγκλισης της $y_2(x)$:

$$\rho = \lim_{n\to\infty} |[3(n+1)][3(n+1)+1]| = \infty$$

Επομένως, η σειρά $y_2(x)$ συγκλίνει σε κάθε σημείο $x \in \mathbb{R}$.

Λύσεις Γύρω Από Συνήθη Σημεία

- Γραμμική ανεξαρτησία των $y_1(x)$ και $y_2(x)$:

$$y_1(0) = 1, \quad y_1'(0) = 0$$
$$y_2(0) = 0, \quad y_2'(0) = 1$$
$$W(y_1, y_2)(0) = y_1(0)y_2'(0) - y_1'(0)y_2(0) = 1 \neq 0$$

- Η **γενική λύση** της ΔΕς (2) είναι:

$$y(x) = a_0 y_1(x) + a_1 y_2(x), \qquad a_0, a_1 \in \mathbb{R}$$

- Η συνάρτηση $y_1(x)$ μπορεί να οριστεί ως η λύση του ΠΑΤ:

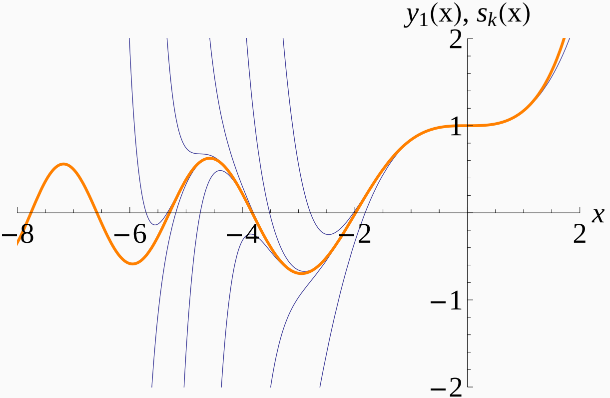
$$y'' - xy = 0, \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

- Η συνάρτηση $y_2(x)$ μπορεί να οριστεί ως η λύση του ΠΑΤ:

$$y'' - xy = 0, \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

Λύσεις Γύρω Από Συνήθη Σημεία

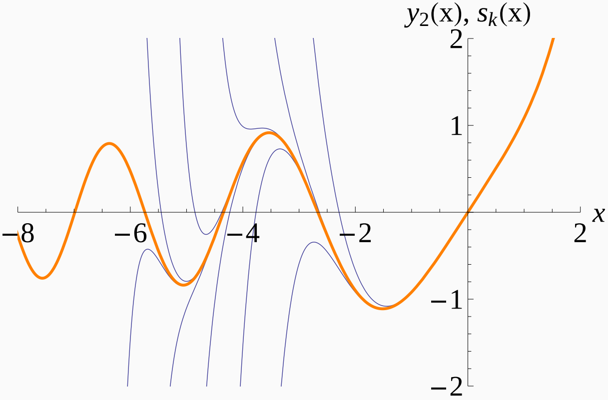
- Σύγκλιση της σειράς $y_1(x)$:



Οι συναρτήσεις $y_1(x)$ (πορτοκαλί καμπύλη) και $s_k(x) = 1 + \sum_{n=1}^{k} \ldots$
$\ldots \frac{x^{3r}}{\prod_{r=1}^{n}(3r-1)(3r)}$, για $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$ (μπλε καμπύλες).

Λύσεις Γύρω Από Συνήθη Σημεία

- Σύγκλιση της σειράς $y_2(x)$:



Οι συναρτήσεις $y_2(x)$ (πορτοκαλί καμπύλη) και $s_k(x) = x + \sum_{n=1}^{k} \dots$
$\dots \frac{x^{3r+1}}{\prod_{r=1}^{n}(3r)(3r+1)}$, για $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$ (μπλε καμπύλες).

Λύσεις Γύρω Από Συνήθη Σημεία

Εξίσωση Airy:

$$y'' - xy = 0, \qquad -\infty < x < \infty \tag{3}$$

Λύσεις γύρω απ΄ το σημείο $x_0 = 1$:

- Υποθέτουμε ότι

$$y(x) = a_0 + a_1(x-1) + \ldots + a_n(x-1)^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n$$

- Αντικαθιστώντας στη ΔΕ βρίσκουμε ότι

$$y(x) = a_0 y_3(x) + a_1 y_4(x), \quad a_0, a_1 \in \mathbb{R}$$

όπου

$$y_3(x) = 1 + \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{6} + \frac{(x-1)^4}{24} + \frac{(x-1)^5}{30} + \ldots$$

$$y_4(x) = (x-1) + \frac{(x-1)^3}{6} + \frac{(x-1)^4}{12} + \frac{(x-1)^5}{120} + \ldots$$

Λύσεις Γύρω Από Συνήθη Σημεία

Θεώρημα: Έστω ότι x_0 είναι ένα σύνηθες σημείο της ΔΕς

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0 \quad \text{ή} \quad y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

όπου οι συναρτήσεις $p(x) = Q(x)/P(x)$ και $q(x) = R(x)/P(x)$ είναι αναλυτικές στο x_0. Τότε:

- Η γενική λύση της ΔΕς έχει τη μορφή

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 y_1(x) + a_1 y_2(x), \quad a_0, a_1 \in \mathbb{R}$$

  όπου $y_1(x)$ και $y_2(x)$ είναι δυο σειρές οι οποίες είναι αναλυτικές στο x_0. (Οι $y_1(x)$ και $y_2(x)$ ορίζουν ένα θεμελιώδες σύνολο λύσεων της ΔΕς.)
- Η ακτίνες σύγκλισης των $y_1(x)$ και $y_2(x)$ είναι τουλάχιστον ίσες με τη μικρότερη απ' τις ακτίνες σύγκλισης των $p(x)$ και $q(x)$.

Λύσεις Γύρω Από Συνήθη Σημεία

Σημείωση: Αποδεικνύεται ότι μια συνάρτηση $p(x) = Q(x)/P(x)$, όπου $P(x)$ και $Q(x)$ είναι πολυώνυμα, μπορεί να γραφεί υπό μορφή μιας συγκλίνουσας δυναμοσειράς γύρω απ΄ το σημείο $x = x_0$ εάν $P(x_0) \neq 0$. Επιπλέον, η ακτίνα σύγκλισης αυτής της σειράς είναι ίση με την απόσταση του x_0 από την πλησιέστερη ρίζα του $P(x)$.

Παράδειγμα 1: Να υπολογιστεί η ακτίνα σύγκλισης ρ της σειράς Taylor της συναρτήσεως $(1 + x^2)^{-1}$ γύρω απ΄ το σημείο $x = 0$. **Απάντηση**: $\rho = 1$.

Παράδειγμα 2: Να υπολογιστεί η ακτίνα σύγκλισης ρ της σειράς Taylor της συναρτήσεως $(x^2 - 2x + 2)^{-1}$ γύρω απ΄ το σημείο $x = 0$. **Απάντηση**: $\rho = \sqrt{2}$.

Εξίσωση Legendre:

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + \alpha(\alpha + 1)y = 0, \qquad \alpha \in \mathbb{R} \tag{4}$$

Λύσεις γύρω απ΄ το σημείο $x_0 = 0$:

- Οι λύσεις της ΔΕς (4) γύρω απ΄ το $x_0 = 0$, τουλάχιστον για $-1 < x < 1$, έχουν τη μορφή

$$y(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

- Αναδρομική σχέση

$$a_{n+2} = \frac{n(n+1) - \alpha(\alpha+1)}{(n+1)(n+2)} a_n, \qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Λύσεις Γύρω Από Συνήθη Σημεία

Η ακολουθία $\{a_0, a_2, a_4, \ldots, a_{2k}, \ldots\}$, όπου $a_{2k+2} = \frac{2k(2k+1)-\alpha(\alpha+1)}{(2k+1)(2k+2)} a_{2k}$:

$$a_2 = -\frac{\alpha(\alpha+1)}{2!} a_0$$

$$a_4 = \frac{2 \cdot 3 - \alpha(\alpha+1)}{3 \cdot 4} a_2 = -\frac{(\alpha-2)(\alpha+3)}{3 \cdot 4} a_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_4 = \frac{[\alpha(\alpha-2)]\,[(\alpha+1)(\alpha+3)]}{4!} a_0$$

$$a_6 = \frac{4 \cdot 5 - \alpha(\alpha+1)}{5 \cdot 6} a_4 = -\frac{(\alpha-4)(\alpha+5)}{5 \cdot 6} a_4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_6 = -\frac{[\alpha(\alpha-2)(\alpha-4)]\,[(\alpha+1)(\alpha+3)(\alpha+5)]}{6!} a_0$$

$$\vdots$$

$$a_{2k} = (-1)^k \frac{\left[\prod_{m=1}^{k}(\alpha-2m+2)\right]\,\left[\prod_{m=1}^{k}(\alpha+2m-1)\right]}{(2k)!} a_0, \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

Λύσεις Γύρω Από Συνήθη Σημεία

Η ακολουθία $\{a_1, a_3, a_5, ..., a_{2k+1}, ...\}$, $a_{2k+1} = \frac{2k(2k-1)-\alpha(\alpha+1)}{2k(2k+1)} a_{2k-1}$:

$$a_3 = \frac{1\cdot 2 - \alpha(\alpha+1)}{2\cdot 3} a_1 \Rightarrow a_3 = -\frac{(\alpha-1)(\alpha+2)}{3!} a_1$$

$$a_5 = \frac{3\cdot 4 - \alpha(\alpha+1)}{4\cdot 5} a_3 \Rightarrow a_5 = -\frac{(\alpha-3)(\alpha+4)}{4\cdot 5} a_3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_5 = \frac{[(\alpha-1)(\alpha-3)]\,[(\alpha+2)(\alpha+4)]}{5!} a_1$$

$$a_7 = \frac{5\cdot 6 - \alpha(\alpha+1)}{6\cdot 7} a_5 \Rightarrow a_7 = -\frac{(\alpha-5)(\alpha+6)}{6\cdot 7} a_5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_7 = -\frac{[(\alpha-1)(\alpha-3)(\alpha-5)]\,[(\alpha+2)(\alpha+4)(\alpha+6)]}{7!} a_1$$

$$\vdots$$

$$a_{2k+1} = (-1)^k \frac{\left[\Pi_{m=1}^{k}(\alpha-2m+1)\right]\,\left[\Pi_{m=1}^{k}(\alpha+2m\right]}{(2k+1)!} a_1, \quad k = 1, 2, 3, ...$$

Λύσεις Γύρω Από Συνήθη Σημεία

- Η **γενική λύση της ΔΕς (4) γύρω απ΄ το σημείο $x_0 = 0$** είναι

$$y(x) = a_0 y_1(x) + a_1 y_2(x), \qquad a_0, a_1 \in \mathbb{R}$$

όπου

$$y_1(x) = 1 - \frac{\alpha(\alpha+1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-2)(\alpha+1)(\alpha+3)}{4!}x^4 + \sum_{k=3}^{\infty}(-1)^k \times$$
$$\times \frac{\alpha(\alpha-2)\cdot \ldots \cdot(\alpha-2k+2)(\alpha+1)(\alpha+3)\cdot \ldots \cdot(\alpha+2k-1)}{(2k)!}x^{2k}$$

και

$$y_2(x) = x - \frac{(\alpha-1)(\alpha+2)}{3!}x^3 + \frac{(\alpha-1)(\alpha-3)(\alpha+2)(\alpha+4)}{5!}x^5 + \sum_{k=3}^{\infty}(-1)^k \times$$
$$\times \frac{(\alpha-1)(\alpha-3)\cdot \ldots \cdot(\alpha-2k+1)(\alpha+2)(\alpha+4)\cdot \ldots \cdot(\alpha+2k)}{(2k+1)!}x^{2k+1}$$

Λύσεις Γύρω Από Συνήθη Σημεία

Παρατηρήσεις:

- Για $\alpha \neq 0, 2, 4, ..., 2n, ...$, η ακτίνα σύγκλισης της $y_1(x)$ είναι
$$\rho = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{(2n+1)(2n+2)}{(\alpha - 2n)(\alpha + 2n + 1)} \right| = 1$$
Επομένως, η σειρά $y_1(x)$ συγκλίνει σε κάθε σημείο $|x| < 1$.
- Για $\alpha = 0, 2, 4, ..., 2n, ...$, η σειρά $y_1(x)$ ''τερματίζει'' σε ένα πολυώνυμο βαθμού α:
$$\begin{aligned} \widehat{P}_0(x) &= 1 \\ \widehat{P}_2(x) &= 1 - 3x^2 \\ \widehat{P}_4(x) &= 1 - 10x^2 + \frac{35}{3}x^4 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Παρατηρήσεις:

- Για $\alpha \neq 1, 3, 5, ..., 2n+1, ...$, η ακτίνα σύγκλισης της $y_2(x)$ είναι
$$\rho = \lim_{n\to\infty} |\frac{(2n+2)(2n+3)}{(\alpha - 2n - 1)(\alpha + 2n + 2)}| = 1$$
Επομένως, η σειρά $y_2(x)$ συγκλίνει σε κάθε σημείο $|x| < 1$.
- Για $\alpha = 1, 3, 5, ..., 2n+1, ...$, η σειρά $y_2(x)$ ''τερματίζει'' σε ένα πολυώνυμο βαθμού α:
$$\widehat{P}_1(x) = x$$
$$\widehat{P}_3(x) = x - \frac{5}{3}x^3$$
$$\widehat{P}_5(x) = x - \frac{14}{3}x^3 + \frac{21}{5}x^5$$
$$\vdots$$

Πολυώνυμα Legendre:

$$(1-x^2)P_n'' - 2xP_n' + \lambda_n P_n = 0, \qquad \lambda_n = n(n+1)$$

Ιδιότητες των πολυωνύμων Legendre:

- Ορθογωνιότητα

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)dx = \frac{2}{2n+1}\delta_{nm}, \qquad \delta_{nm} = \begin{cases} 1, & n = m \\ 0, & n \neq m \end{cases}$$

- Πληρότητα

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(x), \qquad c_n = \frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)P_n(x)dx$$

Λύσεις Γύρω Από Συνήθη Σημεία

Υπολογισμός των πολυωνύμων Legendre $P_n(x)$:

- Χρήση της αναδρομικής σχέσης

  $$(n+1)P_{n+1}(x) - (2n+1)P_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

  με

  $$P_0(x) = 1$$

- Χρήση του τύπου

  $$P_n(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{(-1)^k (2n-2k)!}{k!(n-k)!(n-2k)!} x^{n-2k}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

- Χρήση του τύπου (Rodrigues)

  $$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Λύσεις Γύρω Από Συνήθη Σημεία

- **Τα πολυώνυμα Legendre** P_0, P_1, P_2, P_3, P_4 **και** P_5:

$$
\begin{aligned}
P_0(x) &= 1 \\
P_1(x) &= x \\
P_2(x) &= -\frac{1}{2}(1 - 3x^2) \\
P_3(x) &= -\frac{1}{2}(3x - 5x^3) \\
P_4(x) &= \frac{1}{8}(3 - 30x^2 + 35x^4) \\
P_5(x) &= \frac{1}{8}(15x - 70x^3 + 63x^5)
\end{aligned}
$$

Λύσεις Γύρω Από Συνήθη Σημεία

- **Τα πολυώνυμα Legendre** P_0, P_1, P_2, P_3, P_4 και P_5: