# Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις

Μιχάλης Αγόρας
Email: agoras@mie.uth.gr

Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών
Εργαστήριο Μηχανικής και Αντοχής των Υλικών
Προπτυχιακό Πρόγραμμα Σπουδών
Χειμερινό Εξάμηνο 2018-2019

# Η Μέθοδος των Δυναμοσειρών

# Γραμμικές Εξισώσεις με Μεταβλητούς Συντελεστές

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0$$

**Παραδείγματα**:

- Εξίσωση Bessel

$$x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \nu^2\right) y = 0$$

- Εξίσωση Legendre

$$\left(1 - x^2\right) y'' - 2xy' + \alpha\,(\alpha + 1)\, y = 0$$

- Εξίσωση Chebyshev

$$\left(1 - x^2\right) y'' - xy' + p^2y = 0$$

- Εξίσωση Hermite

$$y'' - 2xy' + 2py = 0$$

# Η Μέθοδος των Δυναμοσειρών

**Θεωρούμε εξισώσεις της μορφής**

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0$$

**Αναζητούμε λύσεις της μορφής**

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \tag{1}$$

**Βασικά ζητήματα**:

- Υπό ποιες συνθήκες οι λύσεις έχουν τη μορφή (1);
- Πως υπολογίζονται οι συντελεστές $a_n$;

# Στοιχεία Δυναμοσειρών

# Στοιχεία Δυναμοσειρών

- Εάν υπάρχει το όριο

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{n=0}^{m} a_n(x-x_0)^n$$

τότε λέμε ότι η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ συγκλίνει.

- Εάν η σειρά

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mid a_n(x-x_0)^n \mid = \sum_{n=0}^{\infty} \mid a_n \mid\mid x-x_0 \mid^n$$

συγκλίνει, τότε η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ συγκλίνει επίσης. Το αντίστροφο δεν ισχύει πάντα.

# Στοιχεία Δυναμοσειρών

- **Έλεγχος σύγκλισης**: Θεωρούμε τη δυναμοσειρά

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

Έστω ότι

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}(x - x_0)^{n+1}}{a_n (x - x_0)^n}\right| = |x - x_0| \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = |x - x_0| L$$

για $a_n \neq 0$ και $x \neq x_0$. Τότε

*i*) Εάν $|x - x_0|L < 1$, η σειρά συγκλίνει.
*ii*) Εάν $|x - x_0|L > 1$, η σειρά αποκλίνει.
*iii*) Εάν $|x - x_0|L = 1$, η πληροφορία αυτή δεν αρκεί για να συμπεράνουμε εάν η σειρά συγκλίνει ή αποκλίνει.

# Στοιχεία Δυναμοσειρών

- **Ακτίνα σύγκλισης**: Υπάρχει αριθμός $\rho \geq 0$ τέτοιος ώστε η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ συγκλίνει για $|x-x_0| < \rho$ και αποκλίνει για $|x-x_0| > \rho$. Ο αριθμός $\rho$ ονομάζεται ακτίνα σύγκλισης της σειράς και δίνεται απ΄ τη σχέση

$$\rho = \lim_{n\to\infty} |\frac{a_n}{a_{n+1}}|$$

- Μια δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ με ακτίνα σύγκλισης $\rho > 0$ συγκλίνει σε μια συνάρτηση $f$ στο διάστημα σύγκλισης:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n \quad \forall \quad |x-x_0| < \rho$$

# Στοιχεία Δυναμοσειρών

- **Πράξεις με σειρές**: Έστω ότι

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \quad \text{και} \quad g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n$$

για $|x - x_0| < \rho$, με $\rho > 0$.

(*i*) Ισότητα σειρών:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n \Leftrightarrow a_n = b_n, \;\; n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Ειδικότερα,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = 0 \Leftrightarrow a_n = 0, \;\; n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

- **Πράξεις με σειρές**: Έστω ότι

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \quad \text{και} \quad g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n$$

για $|x - x_0| < \rho$, με $\rho > 0$.

$(ii)$ Πρόσθεση ή αφαίρεση σειρών:

$$f(x) \pm g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n)(x - x_0)^n$$

$(iii)$ Πολλαπλασιασμός σειρών:

$$f(x)g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n, \qquad c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

- **Πράξεις με σειρές**: Έστω ότι

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \quad \text{και} \quad g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n$$

για $|x - x_0| < \rho$, με $\rho > 0$.

$(iv)$ Διαίρεση σειρών: Εάν $g(x_0) \neq 0$, τότε

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} d_n (x - x_0)^n$$

όπου οι συντελεστές $d_n$ υπολογίζονται απ' τη σχέση

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^{n} d_k b_{n-k} \right) (x - x_0)^n$$

- **Πράξεις με σειρές**: Έστω ότι

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \quad \text{για} \quad |x - x_0| < \rho, \quad \text{με} \quad \rho > 0$$

(*iv*) Παραγώγιση σειρών:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1}$$

$$f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n (x - x_0)^{n-2}$$

$$\vdots$$

$$f^{(m)}(x) = \sum_{n=m}^{\infty} \left[\Pi_{k=0}^{m-1}(n-k)\right] a_n (x - x_0)^{n-m}$$

$$\vdots$$

# Στοιχεία Δυναμοσειρών

- **Σειρά Taylor**: Η σειρά

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n \quad \text{όπου} \quad a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

  ονομάζεται σειρά Taylor της συνάρτησης $f(x)$ γύρω απ΄ το σημείο $x = x_0$.

- **Αναλυτικές συναρτήσεις**: Μια συνάρτηση η οποία έχει ανάπτυγμα Taylor στο σημείο $x = x_0$ με $\rho > 0$, δηλ.,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \quad \text{με} \quad \rho > 0$$

  λέμε ότι είναι αναλυτική στο $x = x_0$.

# Στοιχεία Δυναμοσειρών

- **Ο δείκτης της αθροίσεως είναι άεργος**:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = \sum_{m=0}^{\infty} a_m (x - x_0)^m = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$$

- **Μετατόπιση του δείκτη της αθροίσεως**:

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2} x^{n+2}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} (n+2)(n+1) a_n (x-x_0)^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+4)(n+3) a_{n+2} (x-x_0)^n$$

$$x^2 \sum_{n=0}^{\infty} (r+n) a_n x^{r+n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} (r+n-1) a_{n-1} x^{r+n}$$

# Βασικοί Ορισμοί

# Βασικοί Ορισμοί

**Το πρόβλημα**: Να βρεθεί η γενική λύση της εξισώσεως

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0$$

γύρω απ' το σημείο $x_0$, όπου οι συναρτήσεις $P(x)$, $Q(x)$ και $R(x)$ είναι **αναλυτικές** στο $x_0$.

**Ειδικές περιπτώσεις**:

- Εάν $P(x_0) \neq 0$, τότε το $x_0$ ονομάζεται **σύνηθες σημείο** της εξισώσεως.
- Εάν $P(x_0) = 0$, τότε το $x_0$ ονομάζεται **ιδιόμορφο σημείο** της εξισώσεως.