Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις

Μιχάλης Αγόρας
Email: agoras@mie.uth.gr

Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών
Εργαστήριο Μηχανικής και Αντοχής των Υλικών
Προπτυχιακό Πρόγραμμα Σπουδών
Χειμερινό Εξάμηνο 2018-2019

Γραμμικές Εξισώσεις Τρίτης ή Ανωτέρας Τάξεως

Βασικές Έννοιες και Ορισμοί

- Μια **γραμμική ΣΔΕ τάξεως** n έχει τη γενική μορφή

$$a_n(t)y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \ldots + a_1(t)y' + a_0(t)y = h(t)$$

ή την κανονική μορφή

$$y^{(n)} + p_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \ldots + p_1(t)y' + p_0(t)y = g(t) \qquad (1)$$

- Η εξίσωση ονομάζεται ομογενής όταν $g(t) = 0$ και μη ομογενής όταν $g(t) \neq 0$.

- Το αντίστοιχο **γραμμικό ΠΑΤ τάξεως** n ορίζεται απ' τη ΔΕ (1) σε συνδυασμό με τις ΑΤς

$$\begin{aligned} &y\left(t_0\right) = y_0, \quad y'\left(t_0\right) = y_0', \quad \ldots \\ &\ldots, \quad y^{(n-2)}\left(t_0\right) = y_0^{(n-2)}, \quad y^{(n-1)}\left(t_0\right) = y_0^{(n-1)} \end{aligned} \qquad (2)$$

Βασικές Έννοιες και Ορισμοί

- Εισάγοντας το **γραμμικό διαφορικό τελεστή τάξεως n**

  $$L = \frac{d^n}{dt^n} + p_{n-1}(t)\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} + \ldots + p_1(t)\frac{d}{dt} + p_0(t)$$

  μπορούμε να γράψουμε την αντίστοιχη γραμμική εξίσωση τάξεως n ως

  $$L[y] = g(t)$$

- Λέμε ότι οι συναρτήσεις $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ και y_n είναι **γραμμικά ανεξάρτητες** εάν η εξίσωση

  $$c_1y_1 + c_2y_2 + \ldots + c_{n-1}y_{n-1} + c_ny_n = 0$$

  έχει ως μοναδική λύση την

  $$c_1 = c_2 = \ldots = c_{n-1} = c_n = 0$$

  Διαφορετικά, λέμε ότι είναι γραμμικά εξαρτημένες.

Γραμμικές Εξισώσεις Τρίτης ή Ανωτέρας Τάξεως

1. Ύπαρξη και Μοναδικότητα της Λύσης
2. Ομογενείς Εξισώσεις

   Γενική Λύση

   Εξισώσεις με Σταθερούς Συντελεστές
3. Μη Ομογενείς Εξισώσεις

   Γενική Λύση

   Η Μέθοδος των Απροσδιόριστων Συντελεστών

   Η Μέθοδος Μεταβολής των Παραμέτρων (Lagrange)

Ύπαρξη και Μοναδικότητα της Λύσης

Ύπαρξη και Μοναδικότητα της Λύσης

Θεώρημα: Θεωρούμε το ΠΑΤ που ορίζεται απ' τη ΔΕ

$$y^{(n)} + p_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \ldots + p_1(t)y' + p_0(t)y = g(t)$$

και τις ΑΤς

$$y\left(t_0\right) = y_0, \quad y'\left(t_0\right) = y_0', \quad \ldots,$$
$$y^{(n-2)}\left(t_0\right) = y_0^{(n-2)}, \quad y^{(n-1)}\left(t_0\right) = y_0^{(n-1)}.$$

Εάν οι συναρτήσεις $p_0(t)$, $p_1(t)$, ..., $p_{n-1}(t)$ και $g(t)$ είναι συνεχείς στο διάστημα $I : \alpha < t < \beta$ και $t_0 \in I$, τότε το ΠΑΤ έχει μία και μόνο μία λύση $y = \phi(t)$ στο I.

Ομογενείς Εξισώσεις

Ομογενείς Εξισώσεις: Γενική Λύση

Θεώρημα: Έστω ότι y_1, y_2, ..., y_n είναι **ειδικές λύσεις** της ομογενούς διαφορικής εξισώσεως

$$y^{(n)} + p_{n-1}(t)y^{(n-1)} + ... + p_1(t)y' + p_0(t)y = 0 \tag{3}$$

όπου οι $p_0(t)$, $p_1(t)$, ..., $p_{n-1}(t)$ είναι συνεχείς σε κάποιο ανοιχτό διάστημα I. Έστω επίσης ότι η **Βροσκιανή** W των y_1, y_2, ..., y_n

$$W(y_1, y_2, ..., y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \neq 0$$

σε κάποιο σημείο $t_0 \in I$. Τότε, η **γενική λύση** της ΔΕς (3) στο I έχει τη μορφή

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + ... + c_n y_n, \quad c_1, c_2, ..., c_n \in \mathbb{R}$$

Ομογενείς Εξισώσεις: Γενική Λύση

Ορολογία: Όταν $W(y_1, y_2, ..., y_n) \neq 0$ λέμε ότι οι συναρτήσεις y_1, y_2, ..., y_n ορίζουν ένα **θεμελιώδες σύνολο λύσεων**.

Θεώρημα: Έστω ότι οι συναρτήσεις y_1, y_2, ..., y_n ορίζουν ένα θεμελιώδες σύνολο λύσεων της ομογενούς διαφορικής εξισώσεως

$$y^{(n)} + p_{n-1}(t)y^{(n-1)} + ... + p_1(t)y' + p_0(t)y = 0$$

σε ένα ανοιχτό διάστημα I. Τότε, οι συναρτήσεις y_1, y_2, ..., y_n είναι γραμμικώς ανεξάρτητες στο I.

Ομογενείς Εξισώσεις με Σταθερούς Συντελεστές

Θεωρούμε τη ΔΕ

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = 0 \tag{4}$$

όπου $a_n \neq 0$, ..., a_1 και a_0 είναι σταθερές.

Παρατήρηση: Η ΔΕ (4) έχει **λύσεις της μορφής** $y = e^{rt}$ για κάθε r το οποίο ικανοποιεί τη n-βάθμια αλγεβρική εξίσωση

$$a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \ldots + a_1 r + a_0 = 0 \tag{5}$$

Η (5) ονομάζεται **χαρακτηριστική εξίσωση** (ΧΕ) της (4).

Σημειώσεις:

- Η ΧΕ (5) έχει n ακριβώς ρίζες r_1, r_2, ..., r_n, οι οποίες όμως δεν είναι απαραίτητα πραγματικές ή διακριτές.
- Εάν μια απ' τις ρίζες της ΧΕς (5) είναι μιγαδικός αριθμός, τότε ο συζυγής αυτού του μιγαδικός αριθμού είναι επίσης ρίζα της ΧΕς.

Πραγματικές και Διακριτές Ρίζες

Εάν οι ρίζες r_1, r_2, ..., r_n της ΧΕς (5) είναι πραγματικές και διακριτές, τότε μπορεί να αποδειχθεί ότι οι συναρτήσεις

$$y_1 = e^{r_1 t}, \quad y_2 = e^{r_2 t}, \quad \dots, \quad y_n = e^{r_n t}$$

είναι γραμμικά ανεξάρτητες. Επομένως, σε αυτή την περίπτωση, η **γενική λύση** της ΔΕς (4) είναι

$$y = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t} + \dots + c_n e^{r_n t}, \quad c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{R}$$

Μιγαδικές και Διακριτές Ρίζες

Έστω ότι η ΧΕ έχει δυο συζυγείς μιγαδικές ρίζες

$$r_k = \lambda + i\mu, \quad r_{k+1} = \lambda - i\mu, \qquad 1 \leq k \leq n-1, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Τότε, η **γενική λύση** της ΔΕς (4) είναι

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_n y_n, \quad c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$$

όπου

$$y_i = e^{r_i t} \quad \forall\, i = 1, \ldots, n \neq k, k+1$$

και

$$y_k = e^{\lambda t} \cos \mu t \quad y_{k+1} = e^{\lambda t} \sin \mu t$$

Επαναλλαμβανόμενες Ρίζες

Έστω ότι η ρίζα r_k $(1 \leq k \leq n)$ της ΧΕς (5) έχει πολλαπλότητα s, όπου $2 \leq s \leq n$. Τότε, αποδεικνύεται ότι οι συναρτήσεις

$$e^{r_k t}, \quad te^{r_k t}, \quad t^2 e^{r_k t}, \quad \dots, \quad t^{s-1} e^{r_k t}$$

είναι γραμμικώς ανεξάρτητες, ειδικές λύσεις της ΔΕς (4).

Επομένως, σε αυτή την περίπτωση, η **γενική λύση** της ΔΕς (4) είναι

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n, \quad c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{R}$$

όπου το σύνολο των s ειδικών λύσεων που αντιστοιχούν στη ρίζα r_k δίνεται απ' την έκφραση (6), ενώ οι υπόλοιπες ειδικές λύσεις υπολογίζονται όπως συζητήθηκε προηγουμένως.

Παράδειγμα 1: Να λυθεί το ΠΑΤ που ορίζεται απ' τη ΔΕ

$$y^{(4)} - y = 0$$

και τις ΑΤς

$$y(0) = 7/4, \quad y'(0) = -4, \quad y''(0) = 5/2, \quad y'''(0) = -2$$

Χαρακτηριστική εξίσωση:

$$(r^2 - 1)(r^2 + 1) = 0 \Rightarrow \quad r_1 = 1, \quad r_2 = -1, \quad r_3 = i, \quad r_4 = -i$$

Γενική λύση της ΔΕς:

$$y = c_1 e^t + c_2 e^{-t} + c_3 \cos t + c_4 \sin t, \quad c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}$$

Λύση του ΠΑΤ:

$$y = 3e^{-t} + \frac{1}{2} \cos t - \sin t$$

Ομογενείς Εξισώσεις με Σταθερούς Συντελεστές

Παράδειγμα 2: Να βρεθεί η γενική λύση της εξισώσεως

$$y^{(4)} + 2y'' + y = 0$$

Χαρακτηριστική εξίσωση:

$$(r^2+1)(r^2+1) = 0 \Rightarrow \quad r_1 = i, \quad r_2 = i, \quad r_3 = -i, \quad r_4 = -i$$

Γενική λύση της ΔΕς:

$$y = c_1 \cos t + c_2 \sin t + c_3 t \cos t + c_4 t \sin t, \quad c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}$$

Παράδειγμα 3: Να βρεθεί η γενική λύση της εξισώσεως

$$y^{(4)} + y = 0$$

Χαρακτηριστική εξίσωση:

$$r^4 + 1 = 0 \Rightarrow \quad r_1 = \frac{1+i}{\sqrt{2}}, \quad r_2 = \frac{-1+i}{\sqrt{2}}, \quad r_3 = \frac{-1-i}{\sqrt{2}}, \quad r_4 = \frac{1-i}{\sqrt{2}}$$

Γενική λύση της ΔΕς:

$$y = e^{t/\sqrt{2}}\left(c_1 \cos\frac{t}{\sqrt{2}} + c_2 \sin\frac{t}{\sqrt{2}}\right) + e^{-t/\sqrt{2}}\left(c_3 \cos\frac{t}{\sqrt{2}} + c_4 \sin\frac{t}{\sqrt{2}}\right),$$

$$c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}$$

Μη Ομογενείς Εξισώσεις

Μη Ομογενείς Εξισώσεις: Γενική Λύση

Θεώρημα: Η γενική λύση της μη ομογενούς εξισώσεως

$$y^{(n)} + p_{n-1}(t)y^{(n-1)} + ... + p_1(t)y' + p_0(t)y = g(t) \qquad (6)$$

έχει τη μορφή

$$y = y_H + y_p$$

όπου

$$y_H = c_1y_1 + c_2y_2 + ... + c_ny_n, \quad c_1, c_2, ..., c_n \in \mathbb{R}$$

είναι η γενική λύση της αντίστοιχης ομογενούς εξισώσεως

$$y^{(n)} + p_{n-1}(t)y^{(n-1)} + ... + p_1(t)y' + p_0(t)y = 0$$

και y_p είναι μια ειδική λύση της μη ομογενούς εξισώσεως (6).

Παράδειγμα 1: Να βρεθεί μια ειδική λύση της εξισώσεως

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = 4e^t \tag{7}$$

Γενική λύση της αντίστοιχης ομογενούς εξισώσεως:

$$y_H = c_1 e^t + c_2 t e^t + c_3 t^2 e^t, \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$$

Ειδική λύση της μη ομογενούς εξισώσεως (7):

$$y_p = A t^3 e^t, \qquad A = \frac{2}{3}$$

Γενική λύση της μη ομογενούς εξισώσεως (7):

$$y = c_1 e^t + c_2 t e^t + c_3 t^2 e^t + \frac{2}{3} t^3 e^t$$

Παράδειγμα 2: Να βρεθεί μια ειδική λύση της εξισώσεως

$$y^{(4)} + 2y'' + y = 3\sin t - 5\cos t \tag{8}$$

Γενική λύση της αντίστοιχης ομογενούς εξισώσεως:

$$y_H = c_1 \cos t + c_2 \sin t + c_3 t \cos t + c_4 t \sin t, \quad c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}$$

Ειδική λύση της μη ομογενούς εξισώσεως (8):

$$y_p = At^2 \sin t + Bt^2 \cos t, \qquad A = -\frac{3}{8}, \quad B = \frac{5}{8}$$

Γενική λύση της μη ομογενούς εξισώσεως (8):

$$y = \left(c_1 + c_3 t + \frac{5}{8} t^2\right) \cos t + \left(c_2 + c_4 t - \frac{3}{8} t^2\right) \sin t$$

ΜΟΕς: Η Μέθοδος Μεταβολής των Παραμέτρων

Αναζητούμε μια **ειδική λύση της μη ομογενούς εξισώσεως**

$$y^{(n)} + p_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \ldots + p_1(t)y' + p_0(t)y = g(t)$$

με δεδομένο ότι είναι γνωστή η γενική λύση

$$y_H = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_n y_n, \quad c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$$

της αντίστοιχης ομογενούς εξισώσεως

$$y^{(n)} + p_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \ldots + p_1(t)y' + p_0(t)y = 0$$

Βασική ιδέα: Θεωρούμε μια συνάρτηση της μορφής

$$y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2 + \ldots + u_n y_n \tag{9}$$

όπου $u_1 = u_1(t)$, ..., $u_n = u_n(t)$ είναι άγνωστες συναρτήσεις του t, οι οποίες πρέπει να προσδιοριστούν έτσι ώστε η $y_p = y_p(t)$ να είναι λύση της μη ομογενούς εξισώσεως.

ΜΟΕς: Η Μέθοδος Μεταβολής των Παραμέτρων

Συνθήκες προσδιορισμού των συναρτήσεων $u_i, i = 1, ..., n$:

$$\begin{aligned} y_1 u_1' + y_2 u_2' + ... + y_n u_n' &= 0 \\ y_1' u_1' + y_2' u_2' + ... + y_n' u_n' &= 0 \\ &\vdots \\ y_1^{(n-1)} u_1' + y_2^{(n-1)} u_2' + ... + y_n^{(n-1)} u_n' &= g \end{aligned} \tag{10}$$

Λύνοντας το σύστημα (10) βρίσκουμε ότι

$$u_i' = \frac{W_i(t)g(t)}{W(t)} \Rightarrow u_i(t) = \int \frac{W_i(t)g(t)}{W(t)} dt, \qquad i = 1, ..., n$$

όπου $W_i(t)$ είναι η ορίζουσα που προκύπτει απ' τη Βροσκιανή $W(t)$ αντικαθιστώντας τη στήλη i με το διάνυσμα-στήλη $(0, 0, ..., 1)$.

Επομένως, η ειδική λύση της μη ομογενούς εξισώσεως είναι

$$y_p(t) = \sum_{i=1}^{n} y_i(t) \int \frac{W_i(t)g(t)}{W(t)} dt$$

Παράδειγμα: Να προσδιοριστεί μια ειδική λύση της μη ομογενούς εξισώσεως

$$y''' - y'' - y' + y = g(t)$$

με δεδομένες τις ειδικές λύσεις

$$y_1 = e^t, \quad y_2 = te^t, \quad y_3 = e^{-t}$$

της αντίστοιχης ομογενούς εξισώσεως.

Η Βροσκιανή των y_1, y_2 **και** y_3:

$$W(t) = \begin{vmatrix} e^t & te^t & e^{-t} \\ e^t & (t+1)e^t & -e^{-t} \\ e^t & (t+2)e^t & e^{-t} \end{vmatrix} = 4e^t$$

ΜΟΕς: Η Μέθοδος Μεταβολής των Παραμέτρων

Η ορίζουσες W_i ($i = 1, 2, 3$):

$$W_1(t) = \begin{vmatrix} 0 & te^t & e^{-t} \\ 0 & (t+1)e^t & -e^{-t} \\ 1 & (t+2)e^t & e^{-t} \end{vmatrix} = -2t - 1$$

$$W_2(t) = \begin{vmatrix} e^t & 0 & e^{-t} \\ e^t & 0 & -e^{-t} \\ e^t & 1 & e^{-t} \end{vmatrix} = 2, \quad W_3(t) = \begin{vmatrix} e^t & te^t & 0 \\ e^t & (t+1)e^t & 0 \\ e^t & (t+2)e^t & 1 \end{vmatrix} = e^{2t}$$

Ειδική λύση y_p της μη ομογενούς εξισώσεως:

$$y_p = e^t \int \frac{(-2t-1)g(t)}{4e^t} dt + te^t \int \frac{2g(t)}{4e^t} dt + e^{-t} \int \frac{e^{2t} g(t)}{4e^t} dt$$