Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις

Μιχάλης Αγόρας
Email: agoras@mie.uth.gr

Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών
Εργαστήριο Μηχανικής και Αντοχής των Υλικών
Προπτυχιακό Πρόγραμμα Σπουδών
Χειμερινό Εξάμηνο 2018-2019

Γενικές Πληροφορίες

Γενικές Πληροφορίες

- **Προαπαιτούμενα**:
  - Εφαρμοσμένα Μαθηματικά I
  - Εφαρμοσμένα Μαθηματικά II
- **Διαλέξεις**: Αμφιθέατρο ΤΜΜ, Τρίτη & Πέμπτη, 09:00-11:00
- **Εργασίες**: Βλέπε e-class
- **Αξιολόγηση**:
  - Πρόοδος (30%)
  - Τελική Εξέταση (70%)
- **Επικοινωνία**: agoras@mie.uth.gr

Βιβλιογραφία

- Boyce, W.E. & DiPrima, R.C. (2015). *Στοιχειώδεις Διαφορικές Εξισώσεις και Προβλήματα Συνοριακών Τιμών*. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Ε.Μ.Π.
- Τραχανάς, Σ. (2013). *Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις*. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.
- Σταυρακάκης, Ν. (2015). *Διαφορικές Εξισώσεις: Συνήθεις και Μερικές*. Εκδόσεις Σταυρακάκης.
- Μυλωνάς, Ν. & Σχοινάς, Χ. (2015). *Διαφορικές Εξισώσεις, Μετασχηματισμοί & Μιγαδικές Συναρτήσεις*. Εκδόσεις Τζιόλα.
- Cengel, Y. A. & Palm III, W. J. (2017). *Διαφορικές Εξισώσεις για Επιστήμονες και Μηχανικούς*. Εκδόσεις Τζιόλα.
- Σούρλας, Δ. (2010). *Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις*. Εκδόσεις Συμμετρία.
- Τσουμπελής, Δ. (2008). *Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις*.

Εισαγωγή

Περιεχόμενα

1. Σκοπός του Μαθήματος
2. Βασικές Έννοιες και Ορισμοί
3. Περιεχόμενα Μαθήματος

Σκοπός του Μαθήματος

Παράδειγμα: Απλή Αρμονική Κίνηση

- Διαφορική εξίσωση (ΔΕ):

$$m\frac{d^2y}{dt^2} + ky = 0 \quad \text{ή} \quad my'' + ky = 0$$

Μεταβλητές:

  - Χρόνος t (ανεξάρτητη)
  - Μετατόπιση $y = y(t)$ (εξαρτημένη)

Γενική λύση:

$$y(t) = c_1 \cos(\omega_0 t) + c_2 \sin(\omega_0 t), \quad \omega_0 = \sqrt{k/m}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

- Αρχικές τιμές (ΑΤ):

$$y(0) = y_0, \quad y'(0) = 0$$

Παράδειγμα: Απλή Αρμονική Κίνηση

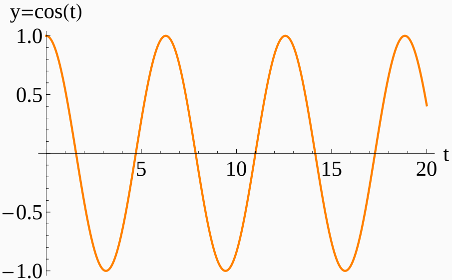
- Πρόβλημα αρχικών τιμών (ΠΑΤ=ΔΕ+ΑΤ):

$$my'' + ky = 0 \quad \text{και} \quad y(0) = y_0, \quad y'(0) = 0$$

Λύση:

$$\left.\begin{aligned} y(0) = y_0 \Rightarrow c_1 = y_0 \\ y'(0) = 0 \Rightarrow c_2 = 0 \end{aligned}\right\} \longrightarrow y(t) = y_0 \cos(\omega_0 t)$$

π.χ., για $y_0 = 1$ και $\omega_0 = 1$:



Σκοπός του Μαθήματος

Εν γένει, η διαδικασία αντιμετώπισης ενός φυσικού προβλήματος αποτελείται από τα εξής στάδια:

1. Μαθηματική διατύπωση του προβλήματος (μοντελοποίηση).
2. Επίλυση του προβλήματος.
3. Πειραματικός έλεγχος της λύσης.

Ο **βασικός σκοπός του μαθήματος** είναι η ανάπτυξη μεθόδων επίλυσης ΔΕν και ΠΑΤ.

Επιπλέον Παραδείγματα ΔΕν

- Διάδοση κυμάτων:

$$\nabla^2 u - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

- Φαινόμενα διάχυσης (θερμότητας και μάζας):

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \xi \nabla^2 u = 0$$

- Ρευστοδυναμική (εξισώσεις Navier-Stokes):

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\nabla \mathbf{v})\, \mathbf{v} \right] = \mu \nabla^2 \mathbf{v} - \nabla p + \mathbf{b}, \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

- Ελαστοστατική (εξισώσεις Beltrami):

$$\nabla^2 \boldsymbol{\sigma} + \frac{3}{1+\nu} \nabla\left(\nabla p\right) = \mathbf{0}$$

Ταξινόμηση Διαφορικών Εξισώσεων

- **Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις** (ΣΔΕς): ΔΕς με μόνο μια ανεξάρτητη μεταβλητή.
- **Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις** (ΜΔΕς): ΔΕς με δυο ή περισσότερες ανεξάρτητες μεταβλητές.

Σημείωση: Στα πλαίσια του παρόντος μαθήματος, θα ασχοληθούμε αποκλειστικά με συνήθεις διαφορικές εξισώσεις.

Παραδείγματα ΣΔΕν

$$y'' + 4y = 0 \tag{1}$$

$$y' = 0 \tag{2}$$

$$y' = y \tag{3}$$

$$y'' + y = 0 \tag{4}$$

$$y'' - y = 0 \tag{5}$$

Εύκολες!

Παραδείγματα ΣΔΕν

$$y'' + y' + 4y = 0 \tag{6}$$

$$y' - xy = 0 \tag{7}$$

$$y'' - xy = 0 \tag{8}$$

$$t^2 y' + 2ty - y^3 = 0 \tag{9}$$

$$t^2 y'' + 2ty' - y = 0 \tag{10}$$

Όχι και τόσο εύκολες!

Παραδείγματα ΣΔΕν

$$y' = x^2 - y^2 \tag{11}$$

$$y'' + (y')^2 + y = \sin x \tag{12}$$

$$y'' + yy' = e^x \tag{13}$$

$$y'' + xy' + y^2 = x^2 \tag{14}$$

$$y'' + e^x y' + x^3 y = \tan y \tag{15}$$

Δύσκολες!

Βασικές Έννοιες και Ορισμοί

Βασικές Έννοιες και Ορισμοί

- Η γενική μορφή μιας ΣΔΕ είναι:

$$F\left(x, y, y^{(1)}, ..., y^{(n)}\right) = 0, \tag{16}$$

όπου

$$y^{(k)} = \frac{d^k y}{dx^k}, \quad k = 1, ..., n$$

Λέμε ότι μια ΣΔΕ είναι n-οστής τάξης (ή τάξης n) όταν η μέγιστη παράγωγος της εξαρτημένης μεταβλητής στην εξίσωση είναι η n-οστή.

Το σύνολο ΑΤν που αντιστοιχεί στη (16) είναι

$$y\left(x_0\right) = y_0,\ y^{(1)}\left(x_0\right) = y_0^{(1)}, ...y^{(n-1)}\left(x_0\right) = y_0^{(n-1)} \tag{17}$$

Η ΣΔΕ (16) και οι ΑΤς (17) ορίζουν ένα ΠΑΤ.

Βασικές Έννοιες και Ορισμοί

- Γραμμική ΣΔΕ είναι κάθε εξίσωση της μορφής

$$a_n y^{(n)} + ... + a_1 y^{(1)} + a_0 y = h \tag{18}$$

όπου, εν γένει,

$$a_n = a_n(x), ..., a_1 = a_1(x), a_0 = a_0(x) \quad \text{και} \quad h = h(x)$$

Οι συναρτήσεις $a_n, ..., a_1, a_0$ ονομάζονται συντελεστές της εξισώσεως.
Η εξίσωση (18) ονομάζεται ομογενής όταν $h(x) = 0$ και μη ομογενής όταν $h(x) \neq 0$.

- Μη γραμμική ΣΔΕ είναι κάθε ΣΔΕ η οποία δεν είναι γραμμική.

Βασικές Έννοιες και Ορισμοί

Παράδειγμα	Τάξη	Γραμμική	Ομογενής
$\frac{dy}{dx} + y = x^2$	1	Ναι	Όχι
$x\frac{dy}{dx} + x^2\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$	2	Ναι	Ναι
$\frac{d^2y}{dx^2} + \sin(x)\, y = \sin x$	2	Ναι	Όχι
$\frac{d^2y}{dx^2} + \sin(x+y)\, y = \sin x$	2	Όχι	Όχι

Περιεχόμενα Μαθήματος

Περιεχόμενα Μαθήματος

1. Εισαγωγή
2. Εξισώσεις πρώτης τάξεως
3. Γραμμικές εξισώσεις δευτέρας τάξεως
4. Γραμμικές εξισώσεις τρίτης ή ανωτέρας τάξεως
5. Η μέθοδος των δυναμοσειρών
6. Ο μετασχηματισμός Laplace
7. Συστήματα γραμμικών εξισώσεων πρώτης τάξεως