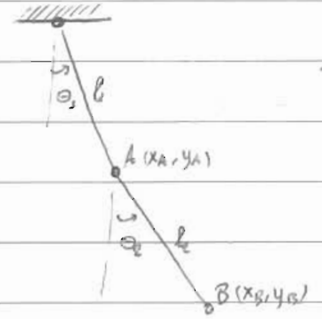
Αρχή Δυνατών Έργων και Εξισώσεις Lagrange.



Περιγραφή κίνησης

1. Εξισώσεις Νεύτωνα ή Euler
2. Αρχή Δυνατών Έργων
3. Εξισώσεις Lagrange.

Για κάποια προβλήματα είναι ευκολότερο να γράφουμε εξ. κίνησης με 2 και 3 αντί για με το 1.

Γενικευμένες Συντεταγμένες : Μεταβλητές που προσδιορίζουν τη θέση των μελών του συστήματος.

↓

q_i , $i = 1, 2, \dots, n$. n : # γενικευμένων συντεταγμένων

Πχ για το σχήμα που έχουμε, υπάρχουν 2 τρόποι

I. $q_1 = \theta_1$, $q_2 = \theta_2$ $\rightarrow n = 2$

II. $q_1 = x_A$, $q_2 = y_A$, $q_3 = x_B$, $q_4 = y_B$ $\rightarrow n = 4$.

(+) κινηματικοί περιορισμοί (ΚΠ) , k : ο # των κινηματικών περιορισμών

↳ τα x_A, y_A δεν είναι ανεξάρτητα $x_A^2 + y_A^2 = \ell_1^2$
τα x_B, y_B, x_A, y_A — " — $(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 = \ell_2^2$ $\Big\}$ $k = 2$

Αριθμός Βαθμών Ελευθερίας (ΒΕ) του Συστήματος = Ελάχιστος Αριθμός γενικευμένων συντεταγμένων που περιγράφουν το σύστημα μου.

$\# \text{B.E.} = n - k$ (σταθερός ∀ σύστημα).

αριθμός ανεξάρτητων γενικευμένων συντεταγμένων

Στο πχ: I. $n = 2$, $k = 0$ $\rightarrow \# BE = 2 - 0 = 2$

II. $n = 4$, $k = 2$ $\rightarrow \# BE = 4 - 2 = 2$.

Γενική Μορφή Κινηματικών Περιορισμών.

$f_j(q_1, q_2, \dots, q_n, t) = 0 \quad , \; j = 1, \dots, k$

$\downarrow$

οι ΚΠ αυτοι, ονομαζονται ολόνομοι κινηματικοι περιορισμοι

~~ΠΧ~~: $q_1 + q_2 + t = 0$.

Παράδειγμα:

1. Χωρική κίνηση υλικού σημείου

$\left.\begin{array}{l} n = 3 \text{ (οι συντεταγμένες)} \\ k = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \# BE = n - k = 3 - 0 = 3.$

2. Χωρική Κίνηση Υλικού Σημείου στην επιφάνεια σφαίρας ακτίνας R.

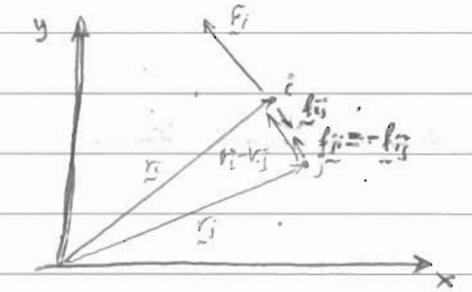
$\left.\begin{array}{l} n = 3 \text{ (οι συντεταγμενες , (πχ } x, y, z)). \\ \text{περιορισμοι : } \boxed{x^2 + y^2 + z^2 = R^2} \Rightarrow k = 1 \end{array}\right\} \# BE = n - k = 3 - 1 = 2$

3. Χωρική Κιν. Υλ. Σημείου πάνω σε επίπεδο

$\left.\begin{array}{l} n = 3 \\ \text{περιορισμοι : } \boxed{ax + by + cz = d} \rightarrow k = 1 \end{array}\right\} \# BE = n - k = 3 - 1 = 2.$

20/12/2014

Αρχή των Δυνατών Έργων



N υλικά σημεία , i, j : 2 απ' αυτά

m_i = η μάζα του i

r_i = διάνυσμα θέσης υλικού σημείου i

F_i = συνισταμένη εξωτερική δύναμη στο σημείο i.

f_{ij} = συνισταμένη εσωτερική δύναμη στο σημείο i από το σημείο j.

Συνισταμένη εσωτερική δύναμη στο i (απ' όλα τα j).

$$F_i' = \sum_{j=1}^{N} f_{ij} \quad , \quad \text{όπου } f_{ii} = 0$$

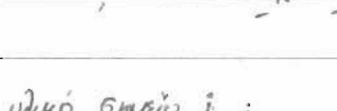
Εξίσωση κίνησης για το υλικό σημείο i :

Εξίσωση Νεύτωνα: $\underbrace{m_i \ddot{r}_i}_{\text{αδράνεια για το } i} = \underbrace{F_i}_{\text{εξωτερικές}} + \underbrace{F_i'}_{\text{εσωτερικές}} \Rightarrow (F_i' + F_i) - m_i \ddot{r}_i = 0 \quad (1)$

Θεωρώ αυθαίρετες απειροστές μετατοπίσεις δr_i , οι οποίες ικανοποιούν τους κινηματικούς περιορισμούς του συστήματος , στην χρονική στιγμή t.
(οι δr_i ονομάζονται δυνατές μετατοπίσεις).

$\sin\theta = \theta$
$\cos\theta = 1$.

Παράδειγμα:



→ 1 β.ε. → η θ(t)
→ τυχαία θέση , $\theta \ll 1$

$u = x \sin\theta \xrightarrow{\theta \ll 1} u = x \cdot \theta$
$(\sin\theta = \tan\theta \approx \theta)$, $(\cos\theta \approx 1)$

μετατόπιση υλικού σημείου $\xrightarrow{\text{"σαν" να παραγωγίζουμε}}$ δυνατή μετατόπιση

$u = x\theta \Rightarrow \delta u = x \cdot \delta\theta$, για διαφορική μεταβολή $\delta\theta$.

$u = x \cancel{\sin\theta}$ ($\tan\theta$) $\Rightarrow \cancel{\delta u = x\,\delta(\sin\theta) = x \cos\theta \cdot \delta\theta}$

$u = f(\theta)$
$du = \frac{\partial f(\theta)}{\partial \theta} d\theta$.
$\delta u = \frac{\partial f(\theta)}{\partial \theta} \delta\theta$

$\underbrace{\text{δυνατή μετατόπιση}}_{\text{υποθετική μετατόπιση}}$ $\delta\theta$ (διαφορική) → ίδιες "ιδιότητες" με το $d\theta$

$$(1) \Rightarrow \left[(F_i' + F_i) - m_i \ddot{r}_i \right] \cdot \delta r_i = 0 \rightarrow \underbrace{F_i' \delta r_i}_{\substack{\text{Δυνατό έργο} \\ \text{εσωτερικών} \\ \text{δυνάμεων} \\ (= \delta W_{\varepsilon\sigma, i})}} + \underbrace{F_i \cdot \delta r_i}_{\substack{\text{Δυνατό έργο} \\ \text{εξωτερικών} \\ \text{δυνάμεων} \\ (= \delta W_{\varepsilon\xi, i})}} - \underbrace{m_i \ddot{r}_i \delta r_i}_{\substack{\text{Δυνατό έργο} \\ \text{αδρανειακών} \\ \text{δυνάμεων} \\ (= \delta W_{in, i})}} = 0.$$

Οπότε $\delta W_{\varepsilon\sigma, i} + \delta W_{\varepsilon\xi, i} + \delta W_{in, i} = 0$, $i = 1, 2, \dots, N$.

↳ Αρχή δυνατών έργων για το υλικό σημείο i.

$$\Rightarrow \underbrace{\sum_{i=1}^{N} \delta W_{\varepsilon\sigma,i}}_{\delta W_{\varepsilon\sigma}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{N} \delta W_{\varepsilon\xi,i}}_{\delta W_{\varepsilon\xi}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{N} \delta W_{in,i}}_{\delta W_{in}} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\delta W_{\varepsilon\sigma} + \delta W_{\varepsilon\xi} + \delta W_{in} = 0} \rightarrow \text{Αρχή των δυνατών Έργων}$$

(στην στατική δεν είχαμε κίνηση → δεν είχαμε τον όρο δW_{in}).

1. Περίπτωση Απαραμόρφωτου Σώματος

Απαραμόρφωτο σώμα : $|r_i - r_j| = \text{σταθερό} \Rightarrow \boxed{\delta W_{\varepsilon\sigma} = 0}$.

Απόδειξη: $\delta W_{\varepsilon\sigma} = \sum_{i=1}^{N} \delta W_{\varepsilon\sigma,i} = \sum_{i=1}^{N} \underset{\sim}{F_i'} \cdot \delta \underset{\sim}{r_i} = \sum_{i=1}^{N} \left(\sum_{j=1}^{N} f_{ij}\right) \cdot \delta \underset{\sim}{r_i} =$

$$= \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \underset{\sim}{f_{ij}} \cdot \delta \underset{\sim}{r_i} = \ldots + f_{ij} \cdot \delta \underset{\sim}{r_i} + \underset{\sim}{f_{ji}} \cdot \delta \underset{\sim}{r_j} + \ldots \overset{(f_{ji} = -f_{ij})}{=} \ldots + f_{ij}\,\delta \underset{\sim}{r_i} - f_{ij}\,\delta \underset{\sim}{r_j} + \ldots$$

$$= \ldots + \underset{\sim}{f_{ij}} (\delta r_i - \delta r_j) + \ldots \quad (*)$$

$$|r_i - r_j|^2 = \text{σταθ} \Rightarrow (r_i - r_j)\cdot(r_i - r_j) = \text{σταθ} \Rightarrow 2\,\delta(r_i - r_j)(\underset{\sim}{r_i} - \underset{\sim}{r_j}) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\delta(\underset{\sim}{r_i} - \underset{\sim}{r_j}) \cdot (\underset{\sim}{r_i} - \underset{\sim}{r_j}) = 0}. \rightarrow \text{τα 2 διανύσματα είναι κάθετα.}$$

$$\left.\begin{matrix} (\underset{\sim}{r_i} - \underset{\sim}{r_j}) \parallel \underset{\sim}{f_{ij}} \\ (\underset{\sim}{r_i} - \underset{\sim}{r_j}) \perp \delta(r_i - r_j) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \underset{\sim}{f_{ij}} \perp \delta(\underset{\sim}{r_i} - \underset{\sim}{r_j}) \Rightarrow \underset{\sim}{f_{ij}} \cdot \underbrace{\delta(r_i - r_j)}_{\delta r_i - \delta r_j} = 0 \Rightarrow f_{ij}(\delta r_i - \delta r_j) = 0$$

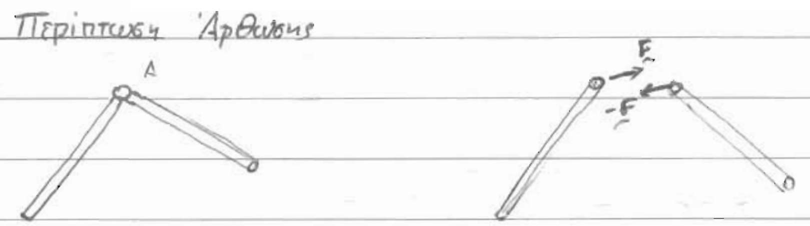
και $(*) \Rightarrow \boxed{\delta W_{\varepsilon\sigma} = 0}$, Τέλος απόδειξης.

Οπότε Αρχή Δυνατών Εργων για στερεά απαραμόρφωτα σώματα:

$$\boxed{\delta W_{\varepsilon\sigma} + \delta W_{in} = 0}.$$

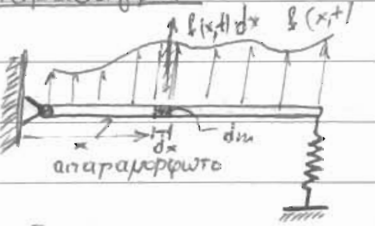
→ στα απαραμόρφωτα σώματα το δυνατό έργο των εσωτερικών δυνάμεων είναι ίσο με το μηδέν.

2. Περίπτωση Άρθρωσης



$\delta W_{\varepsilon\sigma} = \underset{\sim}{F} \cdot \delta \underline{r}_A + (-F)\, \delta r_A = 0.$ → οι δυνάμεις άρθρωσης (εσωτερικές) δεν έχουν δυνατό έργο

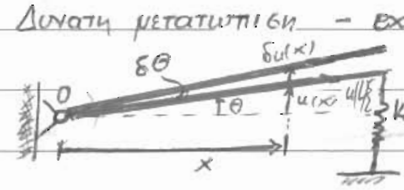
Παράδειγμα



Να γραφεί η εξίσωση κίνησης, με χρήση της Αρχής Δυνατών Έργων.

Γενικευμένη συντεταγμένη: θ

Δυνατή μετατόπιση - extra στροφή : $\delta\theta$



("σαν" να παραγωγίζουμε)

$u = x \cdot \theta \Rightarrow \delta u = x\, \delta\theta.$

(εσωτερικό γινόμενο)

Γενικευμένη συντετ.: u
Δυνατή μετατ.: δu

- Δυνατό έργο δύναμης ελατηρίου : $\delta W_{\varepsilon\lambda} = \underset{\sim}{F_{\varepsilon\lambda}} \cdot \underset{\sim}{\delta u}(l) = -F_{\varepsilon\lambda}\, \delta u(l) = -k u(l) \cdot \delta u(l).$
$= -k\, l\theta \cdot L\, \delta\theta = -k L^2 \theta\, \delta\theta.$
- Δυνατό έργο των δυνάμεων $f(x,t)$: $\delta W_f = \int_0^L [f(x,t)\, dx\; \delta u(x)] = \int_0^L f(x,t) \cdot \delta u(x)\, dx =$
$= \int_0^L f(x,t) \cdot x\, \delta\theta\, dx = \left[\int_0^L f(x,t)\, x\, dx \right] \delta\theta$

↳ δυνατή ~~γενικευμένη~~ μετατόπιση

(η γενικευμένη ~~μετατόπιση~~ συντεταγμένη δεν είναι απαραίτητα μετατόπιση (u), μπορεί να είναι στροφή ή ακόμη και ορμή.)

- Δυνατό έργο αδρανειακών δυνάμεων : $\delta W_{in} = \int_0^L \overbrace{- \underset{\rho A\, dx}{dm}\, \ddot{u}\, \delta u(x)}^{\text{για το απειροστό κομμάτι}} =$

"-" επειδή είναι αντίρροπα (εσωτερικό γινόμενο)

$= \int_0^L \rho A\, \ddot{u}\, \delta u(x)\, dx = -\int_0^L \rho A\, x\, \ddot{\theta}\, x\, \delta\theta\, dx = -\rho A \underbrace{\int x^2 dx}_{L^3/3}\, \ddot{\theta}\, \delta\theta =$

$= -\frac{\rho A L^3}{3}\, \ddot{\theta}\, \delta\theta = -\underbrace{\frac{m L^2}{3}}_{\text{ροπή αδράνειας}}\, \ddot{\theta}\, \delta\theta$

$(-dm \cdot \ddot{u})$ → είναι η δύναμη αδράνειας για το απειροστό κομμάτι dm

Έπειτα ολοκληρώνουμε κατά μήκος της δοκού.

Αρχη δυνατών έργων

$$\delta W_{εσ} + \delta W_{εξ} + \delta W_{in} = 0. \;\to\; -\kappa L^2\theta\,\delta\theta + \left[\int_0^L f(x,t)\, x\, dx\right]\delta\theta - \frac{mL^2}{3}\ddot{\theta}\,\delta\theta = 0$$

$$\Rightarrow \left[-\kappa L^2\theta + \int_0^L f(x,t)\, x\, dx - \frac{mL^2}{3}\ddot{\theta}\right]\delta\theta = 0 \,, \quad \forall\delta\theta \qquad (\delta\theta = \text{αυθαιρετο}).$$

$$\Rightarrow -\kappa L^2\theta + \int_0^L f(x,t)\, x\, dx - \frac{mL^2}{3}\ddot{\theta} = 0$$

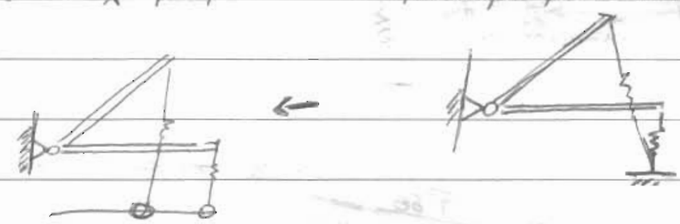
$$\Rightarrow \boxed{\frac{mL^2}{3}\ddot{\theta} + kL^2\theta = \int_0^L x\, f(x,t)\, dt} \quad \to \text{Εξίσωση ταλαντωτή}$$

Άσκηση 1 , να βρεθεί με εξισώσεις Euler το ίδιο.

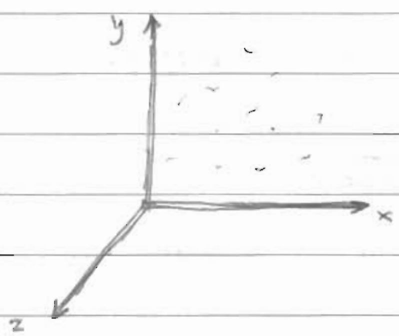
Άσκηση 2 , να γίνει για Θ όχι μικρό → προβλημα με το ελατηριο

↪ Να μην γίνει.

(το ελατηριο μπορει να ειναι σε οδηγο ωστε να παραμενει κατακορυφο.)

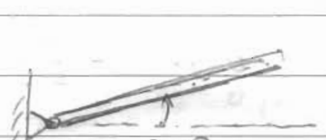


Εξισώσεις Lagrange



Ν υλικα σημεια

Παραδειγμα



$u_i = x_i\Theta$

$\downarrow$

q_1

Εισάγω γενικευμένες συντεταγμένες $q_1, q_2, \dots, q_n$

↪ $\underset{\sim}{r_i} = \underset{\sim}{r_i}(q_1, q_2, \dots q_n, t)$

Γενικά: $f(q_1, q_2, \dots, q_n, t)$ → οποιαδήποτε συνάρτηση → αποτέλεσμα είτε βαθμωτό είτε διάνυσμα είναι το ίδιο.

$$df = \frac{\partial f}{\partial q_1}dq_1 + \frac{\partial f}{\partial q_2}dq_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial q_n}dq_n + \frac{\partial f}{\partial t}dt = \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial q_j}q_j + \frac{\partial f}{\partial t}dt$$

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial q_1}\underset{\substack{\downarrow\\ dq_1/dt}}{\dot q_1} + \frac{\partial f}{\partial q_2}\dot q_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial q_n}\dot q_n + \frac{\partial f}{\partial t} = \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial q_j}\dot q_j + \frac{\partial f}{\partial t}$$

Θέτω $f = \underline{r}_i$:

$$\dot r_i = \underbrace{\frac{dr_i}{dt}}_{\text{τα χυτικά υλικού σημείου } i} = \boxed{\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial r_i}{\partial q_j}\dot q_j + \frac{\partial r_i}{\partial t}} \ (*) = \frac{\partial r_i}{\partial q_1}\dot q_1 + \dots + \frac{\partial r_i}{\partial q_j}\dot q_j + \dots + \frac{\partial r_i}{\partial q_n}\dot q_n + \frac{\partial r_i}{\partial t}$$

ανεξάρτητα του $\dot q_i$

Το $\underline{r}_i = \underline{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_n, t)$ → δεν εξαρτάται απ' τα $\dot q_i$, μόνο απ' τα q_j & t.

Οπότε: $$\boxed{\frac{\partial \dot r_i}{\partial \dot q_j} = \frac{\partial r_i}{\partial q_j}} \ (**)$$

ενώ η μετατόπιση $\underline{r}_j = \underline{r}_j(q_1, q_2, \dots, q_n, t)$ η δυνατή μετατόπιση αναφέρεται στο χώρο και όχι στο χρόνο (σε συγκεκριμένη χρονική στιγμή παίρνουμε τη δυνατή μεταβολή του $r_i \to \delta r_i$)

Θέτω f το $\underline{r}_i$

Δυνατές μετατοπίσεις : $$\delta \underline{r}_i = \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial r_i}{\partial q_j}\delta q_j + \frac{\partial r_i}{\partial t}\cancel{\delta t}^{\,0} \Rightarrow \boxed{\delta \underline{r}_i = \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial r_i}{\partial q_j}\delta q_j} \ (***)$$

Αρχή δυνατών έργων : $\delta W_{εσ} + \delta W_{εξ} + \delta W_{in} = 0$ ⇒

Για το δυνατό έργο εσωτερικών και εξωτερικών δυνάμεων ⇒ $$\delta W_{εσ} + \delta W_{εξ} = \sum_{i=1}^{N}\underbrace{(\underline{F}_i' + \underline{F}_i)}_{\underline{R}_i}\cdot \delta \underline{r}_i = \sum_{i=1}^{N}\underline{R}_i\cdot\delta\underline{r}_i$$

$\underline{R}_i$ → συνισταμένη εσωτερικών και εξωτερικών.

$$(***) \Rightarrow \delta W_{εσ} + \delta W_{εξ} = \sum_{i=1}^{N}\underline{R}_i\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial r_i}{\partial q_j}\delta q_j = \sum_{j=1}^{n}\underbrace{\sum_{i=1}^{N}\left(\underline{R}_i\frac{\partial r_i}{\partial q_j}\right)}_{Q_j}\delta q_j$$

Τελικά $$\underbrace{\delta W_{εσ} + \delta W_{εξ}}_{\text{δυνατό έργο εσ. \& εξ. δυνάμεων}} = \sum_{j=1}^{n} Q_j \underbrace{\delta q_j}_{\text{γενικευμένη μετατόπιση}}$$

, όπου $Q_j = \sum \underline{R}_i\cdot\frac{\partial r_i}{\partial q_j}$ = γενικευμένες δυνάμεις που αντιστοιχούν στις γενικευμένες μετατοπίσεις $(Q_j \to q_j)$

Στα επόμενα

Για το δυνατό έργο των αδρανειακών (ομοίως θα γίνει στο επόμενο μάθημα)

$$\delta W_{in} = \sum_{j=1}^{n}(\quad)\,\delta q_j$$

και $\delta W_{εσ} + \delta W_{εξ} + \delta W_{in} = 0 \Rightarrow \sum Q_j\delta q_j + \sum(\quad)\delta q_j = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \sum_{j=1}^{n}[Q_j - (\quad)]\,\delta q_j = 0$, όπου δq_j : αυθαίρετες ⇒ $\boxed{Q_j + (\quad) = 0}$

V — T — εξίσωση Lagrange

7/1/2015

Εξισώσεις Lagrange

Έχουμε βρεί: $\dfrac{\partial \dot{\underset{\sim}{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} = \dfrac{\partial \underset{\sim}{r}_i}{\partial q_j}$ (**)

$$\dot{\underset{\sim}{r}}_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \underset{\sim}{r}_i}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial \underset{\sim}{r}_i}{\partial t} \quad , \quad \delta \underset{\sim}{r}_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \underset{\sim}{r}_i}{\partial q_j}\delta q_j$$

Δυνατό έργο: των εσωτερικών και εξωτερικών δυνάμεων

$$\delta W = \sum_{i=1}^{N} \underset{\sim}{R}_i \cdot \delta \underset{\sim}{r}_i \Rightarrow \delta W = \sum Q_j \delta q_j$$

όπου: $Q_j = \sum_{i=1}^{N} R_i \dfrac{\partial r_i}{\partial q_i}$ → Γενικευμένες δυνάμεις.

Δυνατό έργο των Αδρανειακών Δυνάμεων

$$\delta W_{in} = \sum_{i=1}^{N} (-m_i \ddot{\underset{\sim}{r}}_i)\cdot \delta \underset{\sim}{r}_i = \sum_{i=1}^{N} (-m_i \ddot{\underset{\sim}{r}}_i)\cdot \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \underset{\sim}{r}_i}{\partial q_j}\delta q_j = \sum_{i=1}^{N} -m_i \sum_{j=1}^{r} \underbrace{\left(\ddot{r}_i \frac{\partial r_i}{\partial q_j}\right)}\delta q_i$$

$$\ddot{r}_i \frac{\partial r_i}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\left(\dot{r}_i \cdot \underbrace{\frac{\partial r_i}{\partial q_j}}_{\overset{(**)}{=}\ \frac{\partial \dot{r}_i}{\partial \dot{q}_j}}\right) - \dot{r}_i \underbrace{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial r_i}{\partial q_j}\right)}_{=\ \frac{\partial \dot{r}_i}{\partial q_j}}$$ (παράγωγος γινομένου)

→ Θα δούμε παρακάτω γιατί

$$\Rightarrow \ddot{\underset{\sim}{r}}_i \frac{\partial \underset{\sim}{r}_i}{\partial q_j} = \underbrace{\frac{d}{dt}\left(\dot{r}_i \cdot \frac{\partial \dot{r}_i}{\partial \dot{q}_j}\right)}_{\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\left(\frac{1}{2}\dot{r}_i \dot{r}_i\right)} - \underbrace{\dot{\underset{\sim}{r}}_i \cdot \left(\frac{\partial \dot{r}_i}{\partial q_j}\right)}_{}$$

$$\frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{1}{2}\dot{\underset{\sim}{r}}_i \cdot \dot{\underset{\sim}{r}}_i\right) = \frac{1}{2}\frac{\partial \dot{r}_i}{\partial q_j}\cdot \dot{\underset{\sim}{r}}_i + \frac{1}{2}\dot{\underset{\sim}{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{r}_i}{\partial q_j}$$

$$\Rightarrow \ddot{\underset{\sim}{r}}_i \frac{\partial r_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\Big(\frac{1}{2}\underbrace{\dot{\underset{\sim}{r}}_i \cdot \dot{\underset{\sim}{r}}_i}_{v_i^2}\Big) - \frac{\partial}{\partial q_j}\Big(\frac{1}{2}\underbrace{\dot{\underset{\sim}{r}}_i \cdot \dot{\underset{\sim}{r}}_i}_{v_i^2}\Big) = \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\left(\frac{1}{2}v_i^2\right)\right] - \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{1}{2}v_i^2\right)$$

v_i : η ταχύτητα του υλικού σημείου i

Άρα: $$\delta W_{in} = \sum_{i=1}^{N} -m_i \sum_{j=1}^{n}\left[\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\left(\frac{1}{2}v_i^2\right) - \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{1}{2}v_i^2\right)\right]\delta q_i =$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\left[\frac{-d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\underbrace{\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}m_i v_i^2}_{} + \frac{\partial}{\partial q_j}\underbrace{\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}m_i v_i^2}_{}\right]\delta q_j$$

Εισάγοντας την Κινητική Ενέργεια του συστήματος : $T = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i v_i^2$

Προκύπτει: $\delta W_{in} = \sum_{j=1}^{n} \left[-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) + \frac{\partial T}{\partial q_j} \right] \delta q_j$

εφαρμογή της Αρχής Δυνατών Έργων:

$\delta W + \delta W_{in} = 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} Q_j \delta q_j + \sum_{j=1}^{n} \left[-\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} + \frac{\partial T}{\partial q_j} \right] \delta q_j \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{\sum_{j=1}^{n} \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j \right] \delta q_j = 0}$$

• Περίπτωση I: $q_1, q_2, \dots, q_n$: ανεξάρτητα (Γενικευμένες Συντεταγμένες).

Δηλαδή: $k = 0$ (ο # των κινηματικών περιορισμών) και $\#BE = n - k = n$.

δq_j είναι αυθαίρετες δυνατές μετατοπίσεις (είναι ανεξάρτητες).

$\sum_{j=1}^{n} \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j \right] \delta q_j = 0$, για οποιαδήποτε δq_j. $\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j \quad , j = 1, \dots, n}$

↳ Εξισώσεις Lagrange.

Χωρίζουμε τις $\underset{\sim}{R_i}$ (δυνάμεις) σε: (εσωτερ. & εξωτερ.)
- μη-συντηρητικές (Non Conservative)
- συντηρητικές (Conservative).

↳ $\underset{\sim}{R_i} = \underset{\sim}{R_i}^{(nc)} + \underset{\sim}{R_i}^{(c)}$

Έχουμε: $\underset{\sim}{R_i}^{(c)} = -\underset{\sim}{\nabla} V_i$ V_i = δυναμική ενέργεια (του υλικού σημείου i)

όπου: $\underset{\sim}{\nabla} V_i = \frac{\partial V_i}{\partial x_i} \underset{\sim}{e_x} + \frac{\partial V_i}{\partial y_i} \underset{\sim}{e_y} + \frac{\partial V_i}{\partial z_i} \underset{\sim}{e_z}$, $\underset{\sim}{e_x}, \underset{\sim}{e_y}, \underset{\sim}{e_z}$: μοναδιαία διανύσματα

Οπότε $Q_j = \sum_{i=1}^{n} \underset{\sim}{R_i} \cdot \frac{\partial r_i}{\partial q_j} = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} R_i^{(nc)} \frac{\partial r_i}{\partial q_j}}_{Q_j^{(nc)}} + \sum_{i=1}^{n} R_i^{(c)} \frac{\partial r_i}{\partial q_j} = Q_j^{(nc)} - \sum_{i=1}^{n} \underset{\sim}{\nabla} V_i \cdot \frac{\partial r_i}{\partial q_j}$

$\underset{\sim}{r_i} = x_i \underset{\sim}{e_x} + y_i \underset{\sim}{e_y} + z_i \underset{\sim}{e_z} \Rightarrow \frac{\partial r_i}{\partial q_j} = \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \underset{\sim}{e_x} + \frac{\partial y_i}{\partial q_j} \underset{\sim}{e_y} + \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \underset{\sim}{e_z}$

$$\nabla V_i \cdot \frac{\partial r_i}{\partial q_j} = \frac{\partial V_i}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial q_j} + \frac{\partial V_i}{\partial y_i}\frac{\partial y_i}{\partial q_j} + \frac{\partial V_i}{\partial z_i}\frac{\partial z_i}{\partial q_j} = \frac{\partial V_i}{\partial q_j}$$ → όπου $V_i = V_i(x_i, y_i, z_i)$ και $x_i, y_i, z_i = \varphi(q_j)$ συναρτήσεις

Άρα

$$Q_j = Q_j^{(nc)} - \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial V_i}{\partial q_j} = Q_j^{(nc)} - \frac{\partial}{\partial q_j}\Big(\underbrace{\sum_{i=1}^{N} V_i}\Big)$$

V = συνολική δυναμική ενεργεια.

$$\Rightarrow Q_j = Q_j^{(nc)} - \frac{\partial V}{\partial q_j}$$

Αντικατασταση στις Εξ. Lagrange:

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} + \frac{\partial V}{\partial q_j} = Q_j^{(nc)} \quad , \quad j = 1, \dots, n}$$ → Εξισωσεις Lagrange

$T = T(q_1, q_2, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n)$ → Κινητική Ενέργεια

$V = V(q_1, q_2, \dots, q_n)$ → Δυναμική Ενέργεια

$\delta W = \sum_{j=1}^{n} Q_j^{(nc)} \delta q_j$ → το εργο ολων των μη-συντηρητικων δυναμεων.

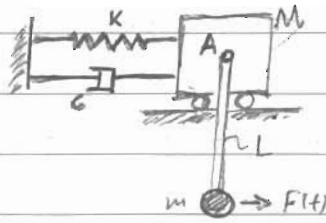
Απόδειξη του: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial r_i}{\partial q_j}\right) = \frac{\partial \dot{r}_i}{\partial q_j}$

$$\frac{df}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial f}{\partial t} \quad , \quad \forall f = f(q_1, q_2, \dots, q_n).$$

Θέτω $f = \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \longrightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial r_i}{\partial q_j}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial q_k}\left(\frac{\partial r_i}{\partial q_j}\right)\dot{q}_k + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial r_i}{\partial q_j}\right)$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{\partial r_i}{\partial q_k}\right)\dot{q}_k + \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{\partial r_i}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial q_j}\Big[\underbrace{\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial r_i}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial r_i}{\partial t}}_{= \dot{r}_i = \frac{dr_i}{dt}}\Big] = \frac{\partial \dot{r}_i}{\partial q_j}$$

Παράδειγμα



M : κινειται αριστερα - δεξια

m : εκκρεμες , περιστρεφεται γυρω απ' το A.

, η F(t) παραμενει παντα οριζοντια

Εξισωσεις κινησης , μεθοδοι εξαγωγης : α) Εξισωσεις Euler (ή Νευτωνα) → Στη στατική: Εξισωσεις Ισορροπιας
(3 τροποι)
β) Αρχη των Δυνατων Εργων → Αρχη Δυνατων Εργων
γ) Εξισωσεις Lagrange. (με $\delta W_{nc} = 0$) ?

οι Lagrange στη στατικη : $\frac{\partial V}{\partial q_j} = Q_j^{(nc)}$

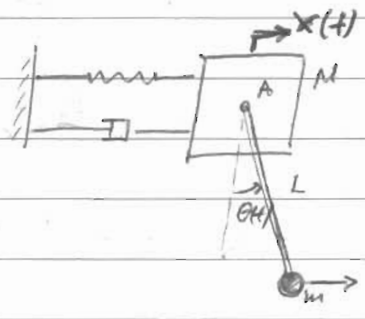
, αν δεν υπαρχουν μη-συντηρητικες δυναμεις $\frac{\partial V}{\partial q_j} = 0$ → ελαχιστοποιηση της Δυναμικης Ενεργειας

Εξαγωγη των εξ. κινησης , απο εξ. Lagrange.

Επιλεγω γενικευμενες συντεταγμενες ($n=2$, $k=0$, $BE = n-k = 2$).

↳ $q_1 = x(t)$, $q_2 = \theta(t)$

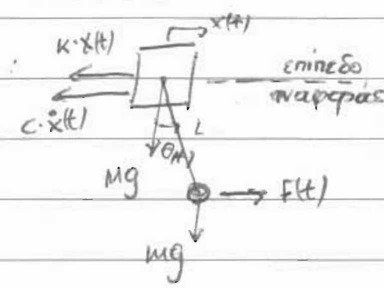
Μετατοπιζω ολες τις μαζες :



Υποθετω μεγαλες μετατοπισεις και στροφες

↳ (αν το συστημα προκυψει μη-γραμμικο , παμε σε μικρες). !

ΔΕΣ :



επιπεδο αναφορας

Συντηρητικες	Μη-Συντηρητικες
mg	$-c\dot{x}$
Mg	$f(t)$.
$K \cdot x(t)$	

Δυναμική Ενέργεια ($\forall$ συντηρητική δύναμη).

Ορίζω επίπεδο αναφοράς , z: η απόσταση απ' το επίπεδο αναφοράς. (ε.α)

$V_1 = Mg\cancel{z}^{0} = Mg0 = 0$

$V_2 = -Mgz = -mgL\cos\theta$ — Επειδή είναι κάτω απ' το ε.α.

$V_3 = \frac{1}{2}kx^2$

$$\Rightarrow V = Mg0 - mgL\cos\theta + \frac{1}{2}kx^2 \Rightarrow \boxed{V = -mgL\cos\theta + \frac{1}{2}kx^2}$$

Κινητική Ενέργεια ($\forall$ σώμα-μάζα)

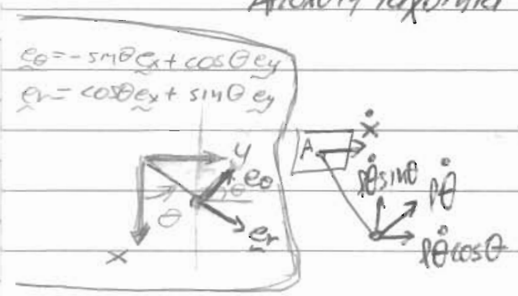
Μάζα M: $T_1 = \frac{1}{2}M\dot{x}^2$

Μάζα m: T_2: το σώμα m περιστρέφεται αλλά κινείται και οριζόντια λόγω της κίνησης του M.

η ταχύτητα σε πολικό ΣΣ $\rightarrow \underset{\sim}{v} = \underbrace{\dot{r}}_{0}\underset{\sim}{e_r} + \underbrace{r\dot{\theta}}_{l\dot{\theta}}\underset{\sim}{e_\theta} \rightarrow l\dot{\theta}\underset{\sim}{e_\theta}$ η σχετική ταχύτητα του m ως προς το A.

Απόλυτη ταχύτητα: Ταχύτητα του A + Σχετική ταχύτητα ως προς A

$= \dot{x}\,\underset{\sim}{e_x} + l\dot{\theta}\,\underset{\sim}{e_\theta}$



Αναλύουμε σε συνιστώσες: $V_x = l\dot{\theta}\cos\theta + \dot{x}$

$V_y = l\dot{\theta}\sin\theta$

και $V^2 = V_x^2 + V_y^2$.

Τελικά $T = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\left[(l\dot{\theta}\cos\theta + \dot{x})^2 + (l\dot{\theta}\sin\theta)^2\right] \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{T = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\left[l^2\dot{\theta}^2 + 2l\dot{\theta}\dot{x}\cos\theta + \dot{x}^2\right]}$$

$\cancel{T_{περιστροφική} = \frac{1}{2}I\omega^2} = \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2$

$= \frac{1}{2}mV_{περ}^2 = \cancel{\frac{1}{2}m(l\dot{\theta})^2} = \frac{1}{2}\underbrace{(ml^2)}_{I}\dot{\theta}^2$

Εξισώσεις Lagrange (n=2).

- $j=1$: $q_1 = x \rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial x} = Q_1^{(nc)}$.

- $\frac{\partial V}{\partial x} = kx$

O (υλικό σημείο)

$T_2 = T_{μεταφορική} + T_{περιστροφική} = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 \cancel{+ \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2}$

- $\frac{\partial T}{\partial x} = 0$

(Ένα υλικό σημείο εκτελεί μόνο μεταφορική κίνηση)

• Ολική παράγωγος → όλα όσα είναι μέσα (το $\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}$) εξαρτώνται μόνο απ' το t.

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = M\dot{x} + ml\dot{\theta}\cos\theta + m\dot{x} \qquad , \theta=\theta(t),\ x=x(t).$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) = M\ddot{x} + ml\cdot\ddot{\theta}\cos\theta + ml\dot{\theta}(-\sin\theta)\dot{\theta} + m\ddot{x} =$$
$$= (M+m)\ddot{x} + ml\ddot{\theta}\cos\theta - ml\dot{\theta}^2\sin\theta$$

Αντικατάσταση στην εξίσωση Lagrange:

$$(M+m)\ddot{x} + ml\ddot{\theta}\cos\theta - ml\dot{\theta}^2\sin\theta + kx = Q_1^{(nc)}.$$

• $j=2$ $\quad q_2=\theta$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \theta} + \frac{\partial V}{\partial \theta} = Q_2^{(nc)}$$

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = mgL\sin\theta$$

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = -ml\dot{\theta}\dot{x}\cdot\sin\theta$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = ml^2\dot{\theta} + ml\dot{x}\cos\theta.$$

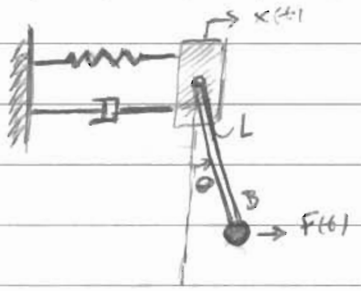
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right) = ml^2\ddot{\theta} + ml\ddot{x}\cos\theta + ml\dot{x}(-\sin\theta)\cdot\dot{\theta} =$$
$$= ml^2\ddot{\theta} + ml\ddot{x}\cos\theta - ml\dot{x}\cdot\dot{\theta}\sin\theta$$

Αντικατάσταση στην εξίσωση Lagrange.

$$ml^2\ddot{\theta} + ml\ddot{x}\cos\theta - \underline{ml\dot{x}\dot{\theta}\sin\theta} + \underline{ml\dot{\theta}\dot{x}\sin\theta} + mgl\sin\theta = Q_2^{(nc)}$$
$$\Rightarrow ml^2\ddot{\theta} + ml\ddot{x}\cos\theta + mgl\sin\theta = Q_2^{(nc)}$$

Και οι 2 εξισώσεις είναι μη-γραμμικές, αφού οι όροι $\ddot{x}\cos\theta$, $\dot{\theta}^2$, $\dot{\theta}^2\sin\theta$ είναι μη-γραμμικοί

~ 12/1/2014 ~



$q_1 = x \quad , \quad q_2 = \theta .$

$n = 2.$

Εξισώσεις Κίνησης

$\ldots = Q_1^{(nc)}$

$\ldots = Q_2^{(nc)}$

$$\delta W^{(nc)} = \sum_{j=1}^{n} Q_j^{(nc)} \delta q_j = Q_1^{(nc)} \delta q_1 + Q_2^{(nc)} \delta q_2 \quad \text{ή} \quad Q_1^{(nc)} \delta x + Q_2^{(nc)} \delta \theta . \quad (1)$$

Δυνατό Έργο των μη-Συντηρητικών Δυνάμεων $\quad (F(t) \;,\; c\dot{x})$

- $\delta W_{\alpha\pi}^{(nc)}$ → δυνατό έργο δύναμης απόσβεσης

Μετακίνηση x → η δυνατή μετατόπιση του σημείου εφαρμογής της μη-συντηρητικής δύναμης $c\dot{x}$ είναι δx, και το έργο: $\delta W_{\alpha\pi}^{(nc)} = -c\dot{x}\,\delta x$.

- Για τη δύναμη $F(t)$ → η μετακίνηση (δυνατή) του σημείου εφαρμογής της δύναμης $F(t)$. (B)

$x_B = x + L\sin\theta \xrightarrow{\text{(εάν να παραγωγίζουμε)}} \delta x_B = \delta x + L\cos\theta \cdot \delta\theta$ (το δ χρησιμοποιείται όπως το d)

$y_B = L\cos\theta$

Αν F ήταν πλάγια αναλύουμε σε F_x & F_y → $\delta W_F^{(nc)} = F_x \delta x + F_y \delta y$

$F(t)$, dr, φ

$\underline{F(t)} \cdot \underline{dr} = F(t) \cdot dr \cdot \cos\varphi = F(t) \cdot dx$

Δυνατό έργο: $\delta W_F^{(nc)} = F(t) \cdot \delta x_B = F(t) \cdot \left[\delta x + L\cos\theta\, \delta\theta \right]$

- Το συνολικό $\delta W^{(nc)}$:

$$\delta W^{(nc)} = \delta W_{\alpha\pi}^{(nc)} + \delta W_F^{(nc)} =$$

$$= -c\dot{x}\delta x + F(t)\left[\delta x + L\cos\theta \cdot \delta\theta \right] =$$

$$= \underbrace{\left[-c\dot{x} + F(t) \right]}_{Q_1^{(nc)}} \delta x + \underbrace{\left[L\cos\theta \cdot F(t) \right]}_{Q_2^{(nc)}} \delta\theta$$

→ από σύγκριση με την (1).

Αντικαθιστώντας τα $Q_1^{(nc)}$ και $Q_2^{(nc)}$, οι εξισώσεις Lagrange είναι:

$$\begin{cases} (M+m)\ddot{x} + ml\cos\theta\,\ddot{\theta} - ml\sin\theta\,\dot{\theta}^2 + kx = -c\dot{x} + F(t) \\ ml^2\ddot{\theta} + ml\ddot{x}\cos\theta + mgl\sin\theta = l\cos\theta \cdot F(t) \end{cases}$$

Πάμε στο 1° μέλος τις αγνώστους:

$$\hookrightarrow \begin{cases} (M+m)\ddot{x} + ml\cos\theta\,\ddot{\theta} - ml\sin\theta\,\dot{\theta}^2 + c\dot{x} + kx = F(t) \\ ml^2\ddot{\theta} + ml\ddot{x}\cos\theta + mgl\sin\theta = l\cos\theta \cdot F(t) \end{cases} \Rightarrow$$ Μη-Γραμμικό σύστημα ΔΕ 2ης τάξης

Γραμμικοποίηση $\Rightarrow$ Για μικρά θ $(\theta \ll 1)$ $\Rightarrow$ Από ανάπτυγμα Taylor: $\begin{vmatrix} \cos\theta \approx 1 \\ \sin\theta \approx \theta \end{vmatrix}$

Επίσης: x^2 ή $\dot{x}^2$, θ^2 ή $\dot{x}\dot{\theta} \ll \dot{x}, \dot{\theta}$ (οι μη-γραμμικοί όροι).

Άρα για μικρά $\theta \ll 1$ και $x \ll 1$, οι όροι αυτοί αγνοούνται.

Οι εξισώσεις Lagrange γίνονται:

$$\begin{cases} (m+M)\ddot{x} + ml\ddot{\theta} + c\dot{x} + kx = F(t) \\ ml^2\ddot{\theta} + ml\ddot{x} + mgl\theta = l\,F(t) \end{cases} \Rightarrow$$ Γραμμικό Σύστημα ΔΕ 2ης Τάξης

Μητρωϊκή Μορφή:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} m+M & ml \\ ml & ml^2 \end{bmatrix}}_{\substack{M=M^T \\ (\text{συμμετρικό})}} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\substack{C=C^T \\ (\text{διαγώνιο} \Rightarrow \text{συμμετρικό})}} \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & mgl \end{bmatrix}}_{K=K^T} \underbrace{\begin{Bmatrix} x \\ \theta \end{Bmatrix}}_{\underline{u}} = \begin{Bmatrix} 1 \\ l \end{Bmatrix} F(t).$$

$$M\underline{\ddot{u}} + C\underline{\dot{u}} + K\underline{u} = \underline{f}(t)$$

[H/W] Να γίνει με Αρχή Δυνατών Έργων και να προσπαθήσουμε να το κάνουμε και με εξ. Euler.

©NEXT

Περίπτωση II : Οι γενικευμενες συντετ. $q_1, q_2, \dots, q_n$ ειναι εξαρτημενες.

Εχουμε κ κινηματικούς περιορισμούς

$$f_i(q_1, \dots, q_n, t) = 0 \quad , \; i = 1, \dots, k \qquad (1)$$

Αρα εχω η γενικευμενες συντεταγμενες , κ κινηματικους περιορισμους , επομενως

$\rightarrow$ $\# BE = n - k$

Ισχυει : $$\sum_{j=1}^{n} \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j \right] \delta q_j = 0 \qquad (2)$$ (μετα απ' αυτο ειχαμε χρησιμοποιησει την ανεξαρτησια).

$$(1) \rightarrow \quad df_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \underbrace{\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial q_j} dq_j + \frac{\partial f_i}{\partial t} dt}_{df_i} = 0$$

Εισαγω τις εξης ποσοτητες : $a_{ij} = \dfrac{\partial f_i}{\partial q_j}$, $a_{i0} = \dfrac{\partial f_i}{\partial t}$

j : γενικευμένη συντεταγμένη
i : κινηματικός περιορισμός.

Οπότε $$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, dq_j + a_{i0}\, dt = 0$$

Επαναλαμβανω για δ αντι για d (για δυνατες μεταβολές).
(το δt δεν εχει νοημα, στις δυνατες μεταβολες ο χρονος ειναι σταθερος).

$$\Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial q_j} \delta q_j = 0 \quad ή \quad \boxed{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, \delta q_j = 0} \quad (3) \quad , \; i = 1, \dots, k$$

Εχω πλεον τις εξισωσεις (2) και (3).

Εισαγω αυθαιρετους συντελεστες λ_i , $i = 1, \dots, k$.

$$(3) \Rightarrow \lambda_i \cdot \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, \delta q_j = 0 \quad , \; i = 1, \dots, k$$

Προσθέτοντας κατά μέλη

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, \delta q_j = 0 \quad \rightarrow \quad \sum_{j=1}^{n} \left[\sum_{i=1}^{k} \lambda_i a_{ij} \right] \delta q_j = 0 \qquad (4)$$

$$(2) - (4) : \quad \sum_{j=1}^{n} \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j - \sum_{i=1}^{k} \lambda_i a_{ij} \right] \delta q_j = 0 . \qquad (5)$$

Έστω ότι $q_1, q_2, \dots, q_{n-k}$ είναι οι ανεξάρτητες γενικευμένες συντεταγμένες (τις αναδιατάσω).

Επιλέγω τους συντελεστές λ_i, $i=1,\dots,k$, έτσι ώστε:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j - \sum_{i=1}^{k} \lambda_i a_{ij} = 0 \quad , \; j = n-k+1, \dots, n \qquad (6)$$

έχω κ τέτοιες περιπτώσεις

έχω # κ, λi

Οπότε η (5) γράφεται:

$$\sum_{j=1}^{n-k} \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j - \sum_{i=1}^{k} \lambda_i a_{ij}\right] \delta q_j = 0 \quad , \forall \delta q_j$$

οπότε επειδή οι $q_1, \dots, q_{n-k}$ είναι ανεξάρτητες, θα πρέπει:

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j - \sum_{i=1}^{k} \lambda_i a_{ij} = 0 \quad , \; j = 1, \dots, n-k \qquad (7)$$

Απ' τις (6) και (7) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j - \sum_{i=1}^{k} \lambda_i a_{ij} \quad , \; j = 1, \dots, n \quad \Rightarrow$$ Εξισώσεις Lagrange.

Χωρίζω τις δυνάμεις σε συντηρητικές και μη-συντηρητικές.

$$Q_j = -\frac{\partial V}{\partial q_j} + Q_j^{(nc)}$$

⁝ (έχει γίνει είναι το ίδιο)

<u>Άρα</u> οι <u>εξισώσεις Lagrange</u> είναι:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} + \frac{\partial V}{\partial q_j} = Q_j^{(nc)} + \underbrace{\sum_{i=1}^{k} \lambda_i a_{ij}}_{Q_j'} \quad , \; j = 1, \dots, n.$$

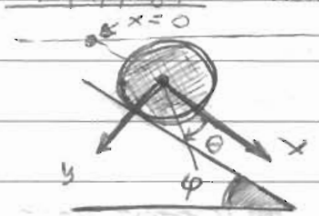
Έχω n εξισώσεις με n+k αγνώστους: $q_1, \dots, q_n, \lambda_1, \dots, \lambda_k$.

Έχω άλλες κ εξισώσεις απ' τους <u>κινηματικούς περιορισμούς</u>

$$f_i(q_1, \dots, q_n, t) = 0 \quad , \; i = 1, \dots, k$$

Ο όρος Q_j': παριστά την αντίδραση λόγω κινηματικών περιορισμών στην κατεύθυνση της γενικευμένης μετατόπισης.

Εφαρμογή Κύλιση στερεού σε κεκλιμένο επίπεδο.



θ: δίνει τον προσανατολισμό του σώματος όταν αυτό περιστρέφεται

Κύλιση Χωρίς Ολίσθηση $\rightarrow$ $n=2$

Γενικευμένες συντεταγμένες : $q_1 = x$, $q_2 = \theta$. $\Rightarrow \begin{cases} \delta q_1 = \delta x \\ \delta q_2 = \delta\theta \end{cases}$

Κινηματικοί Περιορισμοί : $\dot{x} = R\dot{\theta} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = R\frac{d\theta}{dt}$

$dx = R\,d\theta \Rightarrow dx - R\,d\theta = 0$. (1)

$$f_k(q_1,\dots,q_n,t)=0 \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\,dq_j + a_{i0}\,dt = 0 \quad , \quad a_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial q_j} \, , \; a_{i0} = \frac{\partial f_i}{\partial t}$$

Και για τα δ $\Rightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\,\delta q_j = 0$ (*)

και (1) $\boxed{\delta x - R\,\delta\theta = 0}$

$k=1$, και # ΒΕ $= 2-1 = 1$.

(*) $\Rightarrow a_{11}\,\delta q_1 + a_{12}\,\delta q_2 = 0 \rightarrow \boxed{a_{11}\,\delta x + a_{12}\,\delta\theta = 0}$

Συγκρίνοντας έχουμε : $a_{11} = 1$ & $a_{12} = -R$

- Δυναμική Ενέργεια : $V = -mgx\sin\varphi$.

  (ή $-mg(L-x)\sin\varphi \rightarrow$ το ίδιο (η σταθερά δεν παίζει ρόλο).)
- Κινητική Ενέργεια : $T = \underbrace{\frac{1}{2}m\dot{x}^2}_{\text{μεταφοράς}} + \underbrace{\frac{1}{2}I_0\dot{\theta}^2}_{\text{περιστροφή}}$

Εξισώσεις Lagrange.

- Η 1η ($j=1$) : $q_1 = x$

$$\frac{\partial V}{\partial q_1} = \frac{\partial V}{\partial x} = -mg\sin\varphi$$

$$\frac{\partial T}{\partial q_1} = \frac{\partial T}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) = m\ddot{x}$$

Οπότε η εξίσωση Lagrange : $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial x} = Q_1^{(nc)} + \lambda_1 a_{11} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{m\ddot{x} - mg\sin\varphi = Q_1^{(nc)} + \lambda_1}$$

- Η 2η $(j=2)$: $q_2 = \theta$

$$\frac{\partial V}{\partial q_2} = \frac{\partial V}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial q_2} = \frac{\partial T}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} = \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = I_0 \dot{\theta}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right) = I_0 \ddot{\theta}$$

Οπότε η εξίσωση Lagrange : $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \theta} + \frac{\partial V}{\partial \theta} = Q_2^{(nc)} + \lambda_1 a_{12}$

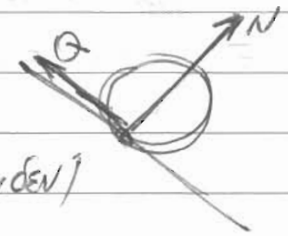
$$\Rightarrow I_0 \ddot{\theta} = Q_2^{(nc)} + \lambda_1 (-R) \Rightarrow \boxed{I_0 \ddot{\theta} = Q_2^{(nc)} - \lambda_1 R}$$

- Δυνατό έργο μη-συντηρητικών δυνάμεων

$N \rightarrow$ έργο $= 0$

$Q \rightarrow$ έργο $= 0$

(διότι το σημείο εφαρμογής τους έχει ταχύτητα μηδέν)



$$\delta W = \underbrace{(\quad)}_{0}\delta x + \underbrace{(\quad)}_{0}\delta\theta$$

$$\Rightarrow Q_1^{(nc)} = 0 \ , \ Q_2^{(nc)} = 0 .$$

Οπότε οι εξισώσεις Lagrange :

$$m\ddot{x} - mg\sin\varphi = \lambda_1 \quad (1)$$
$$I_0 \ddot{\theta} = -\lambda_1 R \quad (2)$$

2 εξισώσεις με 3 αγνώστους x, θ, λ_1.

Κινηματικος περιορισμος : $\dot{x} = R\dot{\theta} \rightarrow \ddot{x} = R\ddot{\theta}$ (3) $\rightarrow$ η 3η εξίσωση.

$(1),(3) \rightarrow mR\ddot{\theta} - mg\sin\varphi = \lambda_1 \overset{(2)}{\rightarrow} -mR\dfrac{\lambda_1 R}{I_0} - mg\sin\varphi = \lambda_1 \rightarrow$

$\rightarrow \lambda_1\left(1 + m\dfrac{R^2}{I_0}\right) = -mg\sin\varphi$ $\rightarrow$ συντελεστης Lagrange

(καθε κινηματικος περιορισμος εισαγει ενα συντελεστη Lagrange)

<u>Για δίσκο</u>: $I_0 = mR^2$

$\hookrightarrow$ οπότε: $\lambda_1(1+1) = -mg\sin\varphi \rightarrow \lambda_1 = -\dfrac{m}{2}g\sin\varphi$

και στη συνεχεια μπορουμε να βρουμε και $\left\| \begin{array}{l} \ddot{x} = \ldots \\ \ddot{\theta} = \ldots \end{array} \right.$

$Q_1' = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i a_{i1} = \lambda_1 \overset{1}{a_{11}} = \lambda_1 = -\dfrac{m}{2} g \cdot \sin\varphi$

$Q_2' = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i a_{i2} = \lambda_1 \overset{-R}{a_{12}} = -R\lambda_1 = \dfrac{mR}{2} g \cdot \sin\varphi$

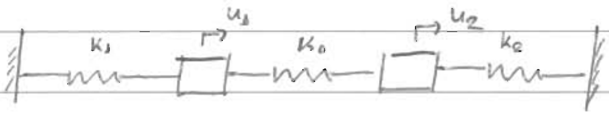
Q_1' = Γενικευμενη Δυναμη που προερχεται απ' τον κινηματικο περιορισμο στην κατευθυνση της γενικευμενης συντεταγμενης (x). $\rightarrow$ η γενικευμενη δυναμη μπορει να ειναι και ροπη.

$\equiv$ Δυναμη τριβης Q.

Q_2' = Γενικευμενη δυναμη που προερχεται απ' το κινηματικο περιορισμό στην κατευθυνση της γενικευμενης συντεταγμενης (θ).

$\equiv$ Ροπη της δυναμης τριβης Q $(= -Q \cdot R)$

Εφαρμογή



Να γραφούν οι εξισώσεις κινήσεις με Lagrange.

$$V = \frac{1}{2} k_1 u_1^2 + \frac{1}{2} k_2 u_2^2 + \frac{1}{2} k_0 (u_1 - u_2)^2$$

$$T = \frac{1}{2} m \dot{u}_1^2 + \frac{1}{2} m \dot{u}_2^2$$

Πρέπει να βρούμε αυτό που είχαμε βρεί με Euler.