Κεφάλαιο 2: Αξία του Χρήματος

K2.1 Βασικές έννοιες

<u>Μέθοδοι λήψης οικονομοτεχνικών αποφάσεων</u>

Οι βασικές μέθοδοι για να παρθεί μια απόφαση με βάση οικονομοτεχνικά κριτήρια είναι:

1. Η μέθοδος της παρούσας αξίας
2. Η μέθοδος της ετήσιας αξίας
3. Η μέθοδος του λόγου οφέλους-κόστους
4. Η μέθοδος του εσωτερικού βαθμού απόδοσης

<u>Εναλλακτικά σχέδια</u>

Γενικά υπάρχουν τρεις κατηγορίες εναλλακτικών σχεδίων ή λύσεων:

α. **Αμοιβαία αποκλειόμενες** μεταξύ τους

- Αμοιβαία αποκλειόμενες εναλλακτικές λύσεις είναι εκείνες που η επιλογή μιας λύσης αποκλείει όλες τις άλλες:
    - Ένα παράδειγμα αμοιβαία αποκλειόμενων εναλλακτικών λύσεων είναι η επιλογή ενός μαθήματος, ενώ όλα τα άλλα αυτόματα αποκλείονται,
    - Ένα καλύτερο ίσως παράδειγμα είναι η κατασκευή μιας γέφυρας. Η γέφυρα μπορεί να κατασκευαστεί από ατσάλι ή από ενισχυμένο σκυρόδεμα. Η γέφυρα θα κτιστεί μόνο από ένα υλικό και έτσι το άλλο αποκλείεται,
    - Πιο χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι αυτό της κατασκευής ενός κτιρίου, συνολικού εμβαδού 600 $μ^2$, το οποίο μπορεί να έχει είτε 2 ορόφους 300 $μ^2$ ο καθένας, είτε 3 ορόφους 200 $μ^2$ είτε, τέλος, 4 ορόφους 150 $μ^2$. Το τελικό κτίριο θα έχει ένα και μόνο αριθμό ορόφων.

β. **Ανεξάρτητες** εναλλακτικές επιλογές

- Ανεξάρτητες εναλλακτικές λύσεις είναι εκείνες που η επιλογή μιας λύσης δεν αποκλείει καμία άλλη, είτε για ταυτόχρονη επιλογή είτε για μελλοντική.
- Τέτοιο παράδειγμα αποτελεί η επένδυση ενός Δημοτικού Συμβουλίου σε προγράμματα ή έργα όπως για παράδειγμα:
    - Η βελτίωση του οδικού δικτύου,
    - Η δημιουργία χώρων αναψυχής,
    - Η βελτίωση του δημόσιου φωτισμού,
    - Η επεξεργασία των απορριμμάτων.

Ανάλογα με τον προϋπολογισμό του Δήμου μπορούν να υλοποιηθούν ένα ή περισσότερα έργα. Ακόμα και αν δεν χρηματοδοτηθούν όλα, υπάρχει η δυνατότητα να πραγματοποιηθούν στο μέλλον όταν βρεθούν τα χρήματα.

γ. **Αλληλοεξαρτώμενες** (εξαρτημένες).

- Οι αλληλοεξαρτώμενες λύσεις, όπως ορίζει και η ίδια η λέξη, είναι αυτές που έχουν άμεση εξάρτηση μεταξύ τους:
    - Η αγορά ενός μηχανήματος συσκευασίας, για παράδειγμα, προϋποθέτει την εξασφάλιση χώρου τοποθέτησης κοντά στη γραμμή παραγωγής.
- Οι εναλλακτικές λύσεις αυτού του τύπου υπάγονται σε ευρύτερες εναλλακτικές, είτε αμοιβαία αποκλειόμενες μεταξύ τους είτε ανεξάρτητες και έτσι ο χειρισμός τους ανάγεται τελικά σε μια από τις δύο άλλες κατηγορίες.

Ιδιωτικές και δημόσιες επενδύσεις

Οι **επενδύσεις** μπορούν να χωριστούν σε **ιδιωτικές** και **δημόσιες**. Οι ιδιωτικές επενδύσεις χαρακτηρίζονται από την πηγή των κεφαλαίων που διατίθενται, που είναι ιδιώτες ή ιδιωτικές εταιρείες και αποσκοπούν σε προσωπικό κέρδος και όχι στην υποστήριξη της κοινωνικής λειτουργίας. Για παράδειγμα, μια επιχείρηση μελετά την αντικατάσταση ενός τόρνου παραγωγής με ένα νεότερο μοντέλο. Δεν τίθεται θέμα δημόσιου οφέλους ούτε και ζημίας. Το μόνο ζήτημα που τίθεται είναι το κέρδος της επιχείρησης. Οι δημόσιες επενδύσεις καλύπτουν ένα ευρύ πεδίο, από το δορυφορικό πρόγραμμα τηλεπικοινωνιών έως μια επαρχιακή γέφυρα. Κύριο χαρακτηριστικό τους είναι ότι η χρηματοδότηση είναι δημόσια και ότι από το επιθυμητό αποτέλεσμα ωφελείται το κοινωνικό σύνολο ή ένα μέρος του. Πολλές φορές μια δημόσια επένδυση περιλαμβάνει και ιδιωτικές. Η απόφαση της εκτροπής ενός ποταμού, για παράδειγμα, χρηματοδοτείται από το δημόσιο αλλά για να πραγματοποιηθεί αυτό πρέπει να συμβάλλουν οι ιδιωτικές εταιρείες που και αυτές με της σειρά τους επενδύουν, για δικό τους όφελος όμως.

Πληθωρισμός

Ο **πληθωρισμός** πρόκειται για μια γνώριμη έννοια στο δυτικό κόσμο και αναφέρεται στην αύξηση των τιμών των αγαθών και υπηρεσιών. Οι επενδύσεις έχουν ως αποτέλεσμα οφέλη και ζημίες, που υπολογίζονται σε χρήματα. Τα χρήματα αυτά υπολογίζονται σε αξία πραγματικού χρόνου και γι' αυτό το λόγο πρέπει να συνυπολογιστεί και ο πληθωρισμός. Αυτό που ενδιαφέρει τον επενδυτή είναι η αγοραστική αξία του χρήματος και όχι η ονομαστική του.

Οικονομική ζωή

Είναι προφανές ότι εφόσον κάποιος αναφέρεται στο μέλλον πρέπει να έχει ξεκαθαρίσει το πόσο μακριά προτίθεται να κοιτάξει. Με άλλα λόγια, πρέπει να προσδιορίσει τον **ορίζοντα του προγραμματισμού ή αλλιώς οικονομική ζωή**. Ο ορίζοντας προγραμματισμού προσδιορίζει το χρονικό διάστημα κατά την διάρκεια του οποίου μία επένδυση αναμένεται να χρησιμοποιηθεί, με άλλα λόγια την οικονομική ζωή της επένδυσης. Η οικονομική ζωή δεν είναι αναγκαστικά ταυτόσημη (ίδια) με την τεχνική της ζωή ή διάρκεια. Η τεχνική ζωή αναφέρεται στο πόσο τεχνικά είναι δυνατόν να διαρκέσει μία επένδυση. Επενδύοντας στην αγορά ενός Α-300 (Airbus) μια αεροπορική εταιρεία θα προσδιορίσει μια οικονομική ζωή τελείως διαφορετική από την τεχνική ζωή του αεροσκάφους. Μπορεί η τελευταία να εκτιμάται ότι υπερβαίνει τα 25 χρόνια. Όμως, από οικονομική σκοπιά και με βάση ανάλογες περιπτώσεις αεροσκαφών η οικονομική ζωή μπορεί να εκτιμηθεί ότι δεν υπερβαίνει τα 10 χρόνια. Παράγοντες που επηρεάζουν την διάρκεια της οικονομικής ζωής είναι:

- Η τεχνολογική ανταγωνιστικότητα,
- Το ετήσιο λειτουργικό κόστος,
- Η πιθανότητα εμφάνισης υποκατάστατου ή εναλλακτικού προϊόντος (ή εξαρτήματος),
- Οι δυνάμεις της αγοράς, η επίδραση στην συμπεριφορά του καταναλωτικού κοινού, κ.λ.π.

<u>Ανάλυση του Λογιστή & του Μάνατζερ</u>

Υπάρχουν σημαντικές διαφορές μεταξύ των επαγγελματικών στόχων και των μεθόδων, του λογιστή και του οικονομολόγου. Αυτές αντικατοπτρίζονται όχι μόνο στα ποσά που ανατίθενται σε κάποια αντικείμενα αλλά ακόμα και στον συνυπολογισμό του ίδιου του αντικειμένου. Ο λογιστής όπως και ο οικονομολόγος μπορεί να είναι ταυτόχρονα σωστοί όσον αφορά το χειρισμό μιας ανάλυσης. Οι διαφορές προκύπτουν λόγω διαφορετικών στόχων.

Ο **λογιστής** είναι υπεύθυνος για την παραγωγή υλικού που θα περιγράφει την κατάσταση μιας εταιρείας, μιας κυβερνητικής υπηρεσίας ή ακόμα και ενός ατόμου. Ένας ισολογισμός, μια δήλωση κέρδους - ζημίας, ένας πίνακας αποτελέσματος χρήσεως, όλα αυτά μαζί με άλλα, αντιπροσωπεύουν μια οικονομική κατάσταση. Η παρουσίαση αυτή είναι καρπός συμβατικών λογιστικών μεθόδων, μεθόδων δηλαδή που προήλθαν από συμφωνία μεταξύ των λογιστών. Το αν αυτές συμφωνούν με τις αντίστοιχες άλλων επαγγελματικών ομάδων είναι θέμα διαφορετικό.

Ο **οικονομολόγος** - διευθύνων σύμβουλος ή όπως αλλιώς μπορεί κανείς να τον αποκαλέσει, έχει στην ανάλυσή του διαφορετικό στόχο από ότι ο λογιστής, με την έννοια ότι καλείται να πάρει κάποια απόφαση. Πρέπει να καθοδηγείται από τη λογική, συνήθως αυτή της αγοράς, βάσει της οποίας είναι επιθυμητό το μέγιστο κέρδος και όχι από συμβάσεις που προέρχονται από κάποια συμφωνία. Έτσι οι διαφορές μεταξύ της δικής του άποψης για μια κατάσταση και της άποψης ενός συναδέλφου λογιστή είναι αναπόφευκτες.

Ο οικονομολόγος θα αγνοήσει το βυθισμένο κόστος μιας ενέργειας στο παρελθόν σε μια προ-φόρων ανάλυση. Ο λογιστής θα το συμπεριλάβει σαν κόστος στοιχείου του ενεργητικού. Ο οικονομολόγος δεν θα θεωρήσει την απόσβεση ως κόστος σε αντίθεση με τον λογιστή. Ο οικονομολόγος δε θα λάβει υπ' όψη του κόστη τα οποία ο λογιστής δε μπορεί να κατατάξει σε συγκεκριμένο τμήμα της εταιρείας. Ο λογιστής αδιαφορεί για τη «χρονική» αξία του χρήματος, πράγμα που σημαίνει ότι π.χ. 10.000 Ευρώ που λαμβάνονται σήμερα και άλλα 10.000 Ευρώ που θα ληφθούν ένα χρόνο μετά αντιμετωπίζονται σαν το ίδιο ποσό. Ο οικονομολόγος αναγνωρίζει ότι το χρήμα έχει δυο είδη αξίας (λογιστική – ονομαστική και την πραγματική αξία σε σχέση με την χρονική στιγμή). Αυτή και μόνο η διαφορά έχει ως αποτέλεσμα μεγάλες αποκλίσεις στους υπολογισμούς τους σε μια οικονομική ανάλυση.

Συνοψίζοντας πρέπει να πούμε ότι ο λογιστής κατανέμει κόστη σε κέντρα ενώ ο οικονομολόγος τα κατανέμει σε αποφάσεις. Θα πρέπει να δοθεί ακόμα μια φορά έμφαση στο γεγονός ότι και ο λογιστής και ο οικονομολόγος συμπεριφέρονται σωστά σύμφωνα με τις αντιλήψεις τους. Κανενός η θεώρηση δεν είναι λανθασμένη διότι διαφέρουν μεταξύ τους.

Κ2.2 Διττή αξία του χρήματος

Το χρήμα έχει διττή αξία, ήτοι την αριθμητική-ονομαστική τιμή του καθώς και την αξία της χρονικής στιγμής στην οποία αναφερόμαστε. Γύρω από αυτό το οπτικό πρίσμα θα γίνει, μέσω μαθηματικών τύπων, η ανάλυση της έννοιας του επιτοκίου και των βασικών αρχών της διαχρονική αξίας του χρήματος.

Σύμβαση: Θα χρησιμοποιηθεί η μέθοδος αναγωγής κάθε γεγονότος στο τέλος του έτους. Δηλαδή όλες οι συνέπειες κατά τη διάρκεια του έτους θα ανάγονται στο τέλος της περιόδου.

Απλό επιτόκιο: Στο τέλος της κάθε περιόδου το ποσό που θα πληρωθεί ισούται με το αρχικό ποσό στο οποίο αναφερόμαστε συν το ποσοστό του επιτοκίου πολλαπλασιασμένο επί το αρχικό ποσό επί τον συνολικό αριθμό των περιόδων N που ενδιαφερόμαστε.

Αριθμητικό Παράδειγμα 2.1

Το ποσοστό του επιτοκίου θεωρούμε ότι δε διαφοροποιείται. Για αρχικό κεφάλαιο π.χ. 10.000 Ευρώ και απλό επιτόκιο 20% ποιές χρηματοροές θα προκύψουν;

Λύση:

Χρόνος N	Τόκος (Ευρώ)	Πληρωτέο ποσό F_N
0		10.000
1	2.000	12.000
2	2.000	14.000
3	2.000	16.000
4	2.000	18.000

ΟΙ χρηματοροές με βάση το απλό επιτόκιο δίνονται από τον τύπο: $F_N = P + i \times P \times N$

όπου:

- F_N: χρηματικό ποσό πληρωτέο N περιόδους μετά το δανεισμό (και γενικότερα, ποσό που αναμένεται να είναι διαθέσιμο σε N χρονικές περιόδους από σήμερα, (*F* από το Future),

- P: σημερινό πληρωτέο ποσό (και γενικά κεφάλαιο διαθέσιμο σήμερα, σε παρόντα χρόνο

  P από το Present),

- N: αριθμός χρονικών περιόδων,
- i: ποσοστό επιτοκίου.

Ανατοκισμός: Ο ανατοκισμός διαφέρει από τον απλό τόκο διότι το επιτόκιο πληρώνεται στο αρχικό επαυξημένο με τον τόκο της προηγούμενης περιόδου.

<u>Αριθμητικό Παράδειγμα 2.2</u>

Για το ίδιο αρχικό κεφάλαιο (10.000 Ευρώ) του παραδείγματος και επιτόκιο ανατοκισμού 20% ποιές χρηματοροές προκύπτουν;

<u>Λύση:</u>

Για παράδειγμα 2.400 Ευρώ (για το δεύτερο χρόνο) = 12.000 × (20/100), άρα το πληρωτέο

Χρόνος N	**Τόκος (Ευρώ)**	**Πληρωτέο ποσό F_N**
0		10.000
1	2.000	12.000
2	2.400	14.400
3	2.880	17.280
4	3.456	20.736

ποσό στο τέλος του δεύτερου χρόνου είναι: 12.000 + 2.400 = 14.400 Ευρώ.

Έστω $F_1 = P + I \times P = P \times (1 + i)$

τότε $F_2 = P \times (1 + i) + i \times P \times (1 + i) = P \times (1 + i) \times (1 + i) = P \times (1 + i)^2$

και $F_3 = P \times (1 + i)^2 + I \times P \times (1 + i)^2 = p \times (1 + i)^2 \times (1 + i) = p \times (1 + i)^3$

και $F_4 = P \times (1 + i)^3 + I \times p \times (1 + i)^3 = P \times (1 + i)^3 \times (1 + i) = p \times (1 + i)^4$

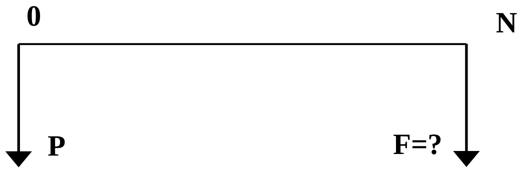
Γενικεύοντας $F_N = P \times (1 + i)^N$ ή $F_N = P \times (F/P,i,N)$ όπου $(F/P,i,N) = (1 + i)^N$ (1)

Ο τύπος αυτός συμβολίζεται ως (*F/P,i,N*) και είναι ο τύπος του ανατοκισμού όπου δοθέν είναι η παρούσα αξία ενός ποσού χρηματικού (*P*) και υπολογίζεται η μελλοντική του αξία μετά από *N* περιόδους και επιτόκιο ανατοκισμού *i*.

Κ2.3 Αναπαράσταση Υπολογισμού Βασικών Μετασχηματιστών

Στις γραφικές αναπαραστάσεις εισροών και εκροών σε ένα χρηματο-χρονοδιάγραμμα, τα βέλη με φορά προς τα πάνω δείχνουν εισροή χρήματος, ενώ προς τα κάτω δείχνουν εκροή. Η οριζόντια γραμμή δηλώνει χρόνο (τον χρονικό ορίζοντα της αναπαριστώμενης επένδυσης). Να σημειωθεί ότι οι Εισροές και Εκροές εμφανίζονται πάντα στο τέλος του χρόνου.

Το παρακάτω διάγραμμα δείχνει την αναπαράσταση ενός αρχικού ποσού *P* από το οποίο προσπαθούμε να υπολογίσουμε το ισοδύναμό του μελλοντικό ποσό *F*, μετά την πάροδο *N* χρονικών περιόδων.



Πρόκειται για τον μετασχηματιστή που υπολογίσαμε προηγουμένως, τον οποίο ονομάζουμε «συντελεστή μελλοντικής συσσώρευσης μοναδικού ποσού» ή πιο απλά μετασχηματιστή *F/P* (*F* δοθέντος *P*).

Αντίστοιχα, στο παρακάτω διάγραμμα προσπαθούμε να υπολογίσουμε το ισοδύναμο σημερινό ποσό *P*, ενός δοθέντος μελλοντικού ποσού F που είναι διαθέσιμο μετά από *N* χρονικές περιόδους.

Προσπαθούμε δηλαδή να μετασχηματίσουμε ένα μελλοντικό ποσό, σε ένα ισοδύναμο σημερινό ποσό, διαδικασία που θα γίνεται στο εξής μέσω του μετασχηματιστή με την ονομασία «συντελεστής παρούσας αξίας μοναδικού ποσού» ή μετασχηματιστής *P/F* (*P* δοθέντος *F*).

Προκύπτει από τον τύπο (1) ότι:

$P = F_N \times [\ 1/(1 + i\ )^N\ ]$ *ή* $P = F_N \times (P/F,i,N)$ όπου $(P/F,i,N) = \ 1/(1 + i\ )^N$ (2)

Ο μετασχηματιστής αυτός συμβολίζεται τυπικά με (*P/F,i,N*) και βρίσκεται είτε από πίνακες είτε υπολογίζεται αναλυτικά.

Αριθμητικό Παράδειγμα 2.3

Αν θέλατε να συγκεντρωθεί ποσό 100.000 Ευρώ μετά την πάροδο 5 χρόνων σε λογαριασμό που αποδίδει τόκο 12% ετησίως πόσα χρήματα πρέπει να καταθέσετε σήμερα;

Λύση α:

F = 100.000 Ευρώ, *i* = 0,12, *N* = 5 από τους πινάκες μετασχηματιστών έχουμε

P = F × (P/F,i,N) = 100.000 × (0,5674) Ευρώ.

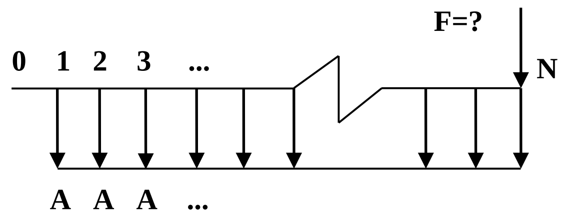
Άρα, το ποσό που πρέπει σήμερα να καταθέσει είναι 56.740 Ευρώ

Λύση β:

Μέσω του τύπου $P = F_N \times (\frac{1}{1+i})^N$ = 56.740 Ευρώ

Ομοιόμορφα κατανεμημένο ποσό A

Το παρακάτω διάγραμμα δείχνει πως πρέπει να υπολογιστεί ένα ισοδύναμο μελλοντικό ποσό *F* διαθέσιμο μετά από *N* περιόδους, για ένα γνωστό ετήσιο ομοιόμορφα κατανεμημένο ποσό *A*.



Ο υπολογισμός αυτός θα αντιστοιχεί, στο μετασχηματιστή με την ονομασία «συντελεστής μελλοντικής συσσώρευσης σειριακά κατανεμημένου ομοιόμορφου ποσού», ή πιο απλά του μετασχηματιστή *F/A*. Ο τύπος αυτός μετράει τον αριθμό των ισόποσων δόσεων καταβολών που θα συγκεντρωθούν αν κάθε υπόλειμμα συγκεντρωθεί σε *i*% επιτόκιο χωρίς να αποσυρθεί καθόλου κεφάλαιο. Κάθε δόση πληρωμής καθώς και το περιοδικό της επιτόκιο εξακολουθούν να επενδύονται με επιτόκιο *i.*

Η μελλοντική αξία θα δίνεται αναδρομικά ως:

$F_N = P_1 \times (1 + i)^{N-1} + P_2 \times (1 + i)^{N-2} + \ldots + P_{N-1} \times (1 + i)^{N-(N-1)} + P_N \times (1 + i)^{N-N}$

και αφού $P_1 = P_2 = \ldots = P_N = A$ *καταλήγουμε:*

$F_N = A \times [((1 + i)^N - 1)/i]$ *(3)*

Η παράσταση μέσα στην αγκύλη συμβολίζεται τυπικά ως *(F/A,i,N).*

<u>Αριθμητικό Παράδειγμα 2.4</u>

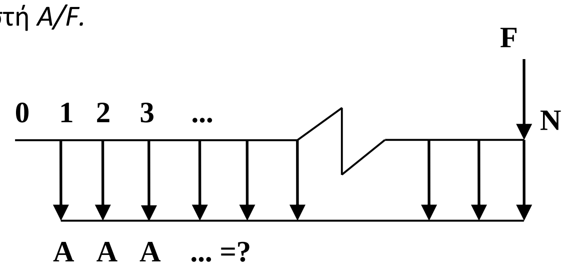
Καταθέτοντας 200.000 Ευρώ κάθε 1η Ιουλίου για τα επόμενα 15 χρόνια σε λογαριασμό που αποδίδει 12% ετησίως, πόσα χρήματα θα έχουν συγκεντρωθεί μέχρι την 1η Ιουλίου σε 15 χρόνια;

<u>Λύση:</u>

A = 200.000 Ευρώ, *N* = 15 και *i = 0,12*

Αντικαθιστώντας στον τύπο (3) θα βρούμε 7.456.000 Ευρώ.

Αντίστροφα, το παρακάτω διάγραμμα δείχνει τον μετασχηματισμό ενός γνωστού μελλοντικού ποσού *F* διαθέσιμου μετά από *N* έτη, σε ένα ισόποσο ετήσιο ομοιόμορφα κατανεμημένο ποσό (π.χ. στην ισοδύναμη ετήσια δόση του ποσού *F).* Πρόκειται για την αναπαράσταση του μετασχηματιστή *A/F.*



Αντιστρέφοντας τον τύπο του μετασχηματιστή *F/A* βρίσκουμε τον τύπο του μετασχηματιστή *A/F*. Ο τύπος αυτός λοιπόν, ουσιαστικά απαντά στην απλή ερώτηση: Τι ποσό πρέπει να καταθέτω περιοδικά με επιτόκιο *i*, για *N* χρονικές περιόδους, προκειμένου να επιτύχω ένα τελικό ποσό ύψους *F* Ευρώ;

$A = F_N \times [i /((1 + i)^N - 1)]$ (4)

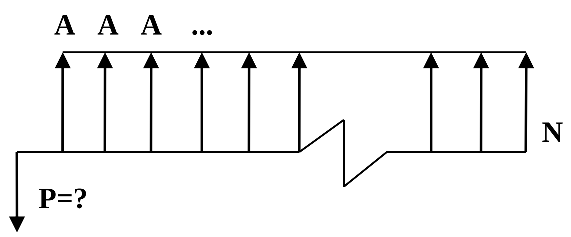
<u>Αριθμητικό Παράδειγμα 2.5</u>

Επιθυμείτε να καταθέσετε σε τραπεζικό λογαριασμό που αποδίδει ετησίως τόκο 12% ένα ποσό χρημάτων που θα σας επιτρέπει να αποσύρετε 2.000.000 Ευρώ μετά από 4 χρόνια. Πόσο πρέπει να καταθέσετε ετησίως για να επιτευχθεί αυτό;

<u>Λύση:</u>

$F = 2.000.000$, $N = 4$ και $i = 0,12$ αντικαθιστώντας στον τύπο (4) έχουμε: $A = 418.400$ Ευρώ (ετησίως).

Το παρακάτω διάγραμμα δείχνει πως από ένα γνωστό ισόποσο ετήσιο ομοιόμορφα κατανεμημένο ποσό *A* υπολογίζουμε το ισοδύναμό του σημερινό ποσό *P*. Πρόκειται για τον μετασχηματιστή *P/A*.



Φανταστείτε στην περίπτωση αυτή ότι ζητείται να βρεθεί η παρούσα αξία σειράς πληρωμών ποσού *A*.

Από την εξίσωση $F_N = P \times (1 + i)^N$ (1) αντικαθιστούμε στην $F_N = A \times [(1 + i)^N - 1/i]$ (3) και έχουμε :

$P \times (1 + i)^N = A \times [((1 + i)^N - 1)/i] =>$

$P = A \times [(1 + i)^N - 1] / [i \times (1 + i)^N]$ (5)

Η παράσταση εντός της αγκύλης τυπικά συμβολίζεται με (*P/A,i,N*)

Αριθμητικό Παράδειγμα 2.6

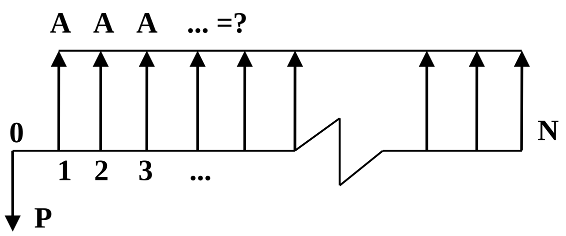
Βρείτε την παρούσα αξία καταθέσεων 250.000 Ευρώ ετησίως για τα προσεχή 10 χρόνια αν το επιτόκιο είναι 12%.

Λύση:

A = 250.000, N = 10, i = 0,12 από των τύπο (5) βρίσκουμε ($P/A,i,N$) = 5,560 άρα :

$P = A \times (P/A, i,N)$ = 250.000 × (5,6502) = 1.412.550 Ευρώ.

Το παρακάτω διάγραμμα δείχνει πως υπολογίζουμε γραφικά ένα ισόποσο ομοιόμορφα κατανεμημένο στο χρόνο, ποσό A (πχ. ετήσια δόση), από το ισοδύναμό του σημερινό ποσό P που είναι σε εμάς γνωστό. Πρόκειται για τον «συντελεστή ανάκτησης κεφαλαίου» ή απλούστερα για τον μετασχηματιστή A/P.



Η μετατροπή της παρούσας πληρωμής σε μια σειρά ισόποσων μελλοντικών δόσεων, γίνεται από την σχέση:

$A = P \times [[i \times (1 + i)^N] / [(1 + i)^N - 1]]$(6)

Η παράσταση εντός της αγκύλης συμβολίζεται με ($A/P,i,N$) και είναι η ζητούμενη, για τον αναλυτικό προσδιορισμό του μετασχηματιστή A/P.

Αριθμητικό Παράδειγμα 2.7

Η τράπεζά σας προθυμοποιείται να σας δανείσει το ποσό που χρειάζεστε για να αγοράσετε ένα διαμέρισμα. Στην τράπεζά σας πρέπει να πληρώνετε την ετήσια δόση αποπληρωμής συν τους τόκους με ετήσιο επιτόκιο 12% για 30 χρόνια. Αν το ποσό δανεισμού είναι 10.000.000 Ευρώ, ποιο είναι το ετήσιο ποσό προς πληρωμή;

Λύση:

P = 10.000.000, N = 30, i = 0,12.

Από την εξίσωση (6) βρίσκουμε τις ομοιόμορφες σειρές ανάκτησης κεφαλαίου δηλαδή τον συντελεστή ($A/P,i,N$), για N = 30 έχουμε 0,1241. Άρα :

$A = P \times (A/P,i,N)$ = 10.000.000 × (0,1241) = 1.241.000 Ευρώ.

Κ2.4 Διαχωρισμό τόκου κεφαλαίου

Συχνά η περιοδική αποπληρωμή ενός δανείου πρέπει να διαχωριστεί σε δύο μερίδια, στο ποσό που αντιστοιχεί στην καταβολή τόκου και στην αποπληρωμή μέρους του αρχικά δανεισθέντος κεφαλαίου. Πρακτικά, η ανάγκη αυτή διαχωρισμού σχετίζεται άμεσα με το γεγονός ότι η καταβολή τόκου είναι (ή καλύτερα θεωρείται από την εφορία) έξοδο. Δηλαδή, συνυπολογισμός του τόκου συμβάλλει στην διαμόρφωση ευνοϊκότερων συνθηκών φορολόγησης.

Ας υποθέσουμε ότι ένα δάνειο 1.000 Ευρώ πρόκειται να πληρωθεί (ή καλύτερα εξοφληθεί) σε τρία χρόνια (τρεις ισόποσες δόσεις) με επιτόκιο i = 10%. Προφανώς, το ύψος της κάθε δόσης (A) υπολογίζεται ως εξής:

$A = P\times(A/P,i,N)=$ 1.000 (A/P,10,3) = 1.000× (0,40211) = 402,11 Ευρώ

Με κάθε δόση ξεπληρώνεται μέρος του κεφαλαίου και καταβάλλεται και τόκος. Αν συμβολίσουμε την αποπληρωμή του κεφαλαίου με R_y *(Y είναι ο δείκτης του χρόνου, Π.χ. Στο* παράδειγμα που εξετάζουμε $1 \leq y \leq 3$*) και με* I_Y *το ποσό καταβολής τόκου, τότε:* $A = R_y + I_Y$ *με* $1 \leq y \leq 3$.

Ας δούμε τα πράγματα αναλυτικά:

α. Πρώτος χρόνος (Y = 1)

A = 402,11 I_1 = 1.000 × (0,10) = 100 άρα R1 = 402,11 - 100 = 302,11

β. Δεύτερος χρόνος (Y = 2) Α = 402,11 I_2 = (1.000 – 302,11) × (0,10) = 69,79 R2 = 402,11 – 69,79 = 332,32

γ. Τρίτος (και τελευταίος) χρόνος (Y = 3) A = 402,11 I_3 = (1.000 – 302,11 – 332,32) × (0,10) = 36,56 R3= 402,11 – 36,56 = 365,55.

Συνοψίζοντας έχουμε:

Χρόνος (***y***)	**Δόση** (***A***)	**Καταβολή Τόκου** (I_y)	**Αποπληρωμή Κεφαλαίου** (R_y)	**Υπόλοιπο Κεφαλαίου Δανείου**
0				1000=P
1	402,11	100	302,11	697,89
2	402,11	69,79	332,32	365,57
3	402,11	36,56	365,55	0

Θυμίζουμε ότι i = 10%.

Παρατηρείστε ότι το Ry (Αποπληρωμή κεφαλαίου) είναι ίσο με την διαφορά του Υπολοίπου Κεφαλαίου Δανείου (τελευταία κολώνα) από τον προηγούμενο χρόνο.

Έστω Υπόλοιπο Κεφαλαίου Δανείου στον χρόνο Y: YKy με y = 0,1,2,3.

$YK_0 = P = 1000 = A(P/A,10,3) = 402.11\ (2.487)$

YK_3 = 0 αφού πρέπει στο τέλος της τριετίας να έχει ξεπληρωθεί το δάνειο.

Επίσης, $R_y = YK_y\text{-}1 - YK_y$, με $1 \le y \le 3$

$YK_0 = A(P/A,i,N)$ όλο το οφειλόμενο ποσό

$YK_1 = A(P/A,i,N - 1)$ έχει γίνει ήδη μια πληρωμή

$YK_t = A(P/A,i,N - t)$ με $1 \le t \le N$

Άρα:

$R_y = A(P/A,i,N - (y - 1)) - A(P/A,i,N - y)) =>$

$R_y = A[(P/A,i,N - y + 1)) - (P/A,i,N - y))]$

Όμως, $(P/A,i,N) = sum(t=1,\dots,N)[P/F,i,t]$ άρα:

$(P/A,i,N – y + 1) - (P/A,i,N - y)= (P/F,i,N - y + 1)$ οπότε:

$R_y = A(P/F,i,N - y + 1)$ και

$I_y = A- R_y =A[1 - (P/F,i,N - y + 1)]$

Αριθμητικό Παράδειγμα 2.8

Ο Γενικός Διευθυντής μιας κατασκευαστικής εταιρείας θέλει να μάθει σε ποιο σημείο η καταβολή τόκου θα είναι ίση με την αποπληρωμή του κεφαλαίου, ενός δανείου 100.000.000 Ευρώ, με επιτόκιο 16% και περίοδο αποπληρωμής 20 χρόνων.

Λύση:

Ετήσια δόση:

A=100.000.000(A/P,16,20) = 100.000.000(0,16867)=16.867.000

$A= R_y + I_y$

Ζητάμε να προσδιορίσουμε το Y (με $1 \le Y \le 20$) ώστε $I_y = R_y$ δηλαδή:

$A = 2 R_y$ ή R_y / A = ½= 0,5

Το Y θα προσδιορισθεί από την σχέση:

$(P/F,16,20 – y + 1) = 0,5$

Υπολογίζοντας τιμές του *P/F,i,N* με δοκιμή και σφάλμα έχουμε:

(*P/F*,16,4) = 0,5523 και (*P/F*,16,5) = 0,4761, οπότε *y* =17 ή *y* =16.

<u>Αριθμητικό Παράδειγμα 2.9</u>

Δανεισθήκατε 10.000.000 Ευρώ για 5 χρόνια με επιτόκιο 12% ετησίως. Επειδή ο τόκος που καταβάλλεται κατά την αποπληρωμή του ποσού αυτού είναι αφορολόγητος σύμφωνα με τη νομοθεσία, θέλετε να ξέρετε πόσο τόκο θα πληρώνετε κάθε χρόνο.

<u>Λύση:</u>

$A = P \times (A/P,i,N)$ = 10.000.000 × (*A/P*,12,5) = 10.000.000 (0,27741) = 2.774.100 Ευρώ τον χρόνο.

Το ποσό αυτό είναι η ολική πληρωμή, το άθροισμα δηλαδή του μεριδίου του αρχικού ποσού και του τόκου. Για τον υπολογισμό του υπολειπόμενου ποσού έχουμε $P_y = A(P/F,i,N - y + 1)$ άρα

$I_y = A - R_y = A\,[1 - (P/F,\ i,\ N - y + 1)]$

Για παράδειγμα ο τόκος του 3^{ου} χρόνου (για y=3) είναι:

$I_3 = A\,[1 - (P/F,12,5 - 3 + 1)] = 2.774.100\,[1 - (P/F,12,3)] = 799.600$.