Κεφάλαιο 4: Επιλογή σημείου παραγωγής

Κ4.1 Μέθοδος ανάλυσης νεκρού σημείου για την επιλογή διαδικασίας παραγωγής ή σημείου παραγωγής

Επιλογή διαδικασίας παραγωγής

Η μέθοδος ανάλυσης νεκρού για την επιλογή διαδικασίας παραγωγής αναγνωρίζει και επιλέγει την διαδικασία με το χαμηλότερο συνολικό κόστος για δεδομένο όγκο .

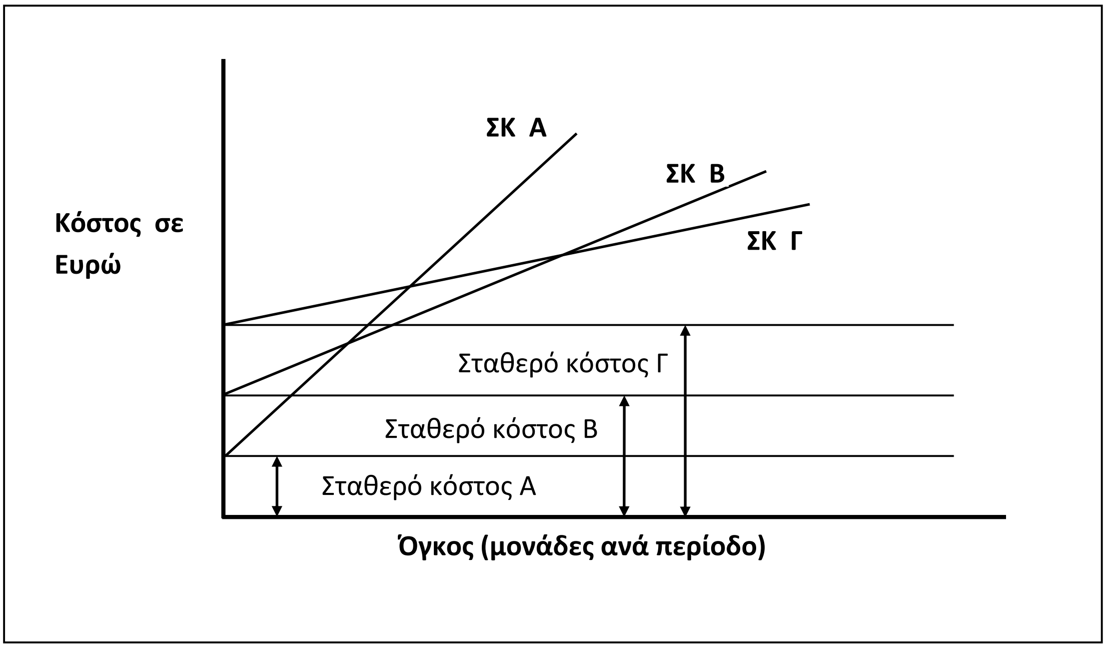
Αν για παράδειγμα έχουμε τρεις διαφορετικές διαδικασίες:

1) Διαδικασία Α: Μικρός όγκος, μεγάλη ποικιλία

2) Διαδικασία Β: Μέτριος όγκος, μέτρια ποικιλία

3) Διαδικασία Γ: Μεγάλος όγκος, μικρή ποικιλία

τότε αν και αναμένεται να έχουν τρία διαφορετικά κόστη για οποιονδήποτε όγκο, μόνο μία θα έχει το χαμηλότερο κόστος για δεδομένο όγκο, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



Επιλογή σημείου παραγωγής

Η μέθοδος ανάλυσης νεκρού για την επιλογή σημείου παραγωγής έχει τα εξής βήματα:

- Υπολογίζονται τα σταθερά και μεταβλητά κόστη κάθε εναλλακτικής θέσης εγκατάστασης του εργοστασίου,
- Σχεδιάζεται γραφική παράσταση με τα κόστη στον κάθετο άξονα και τον ετήσιο όγκο πωλήσεων στον οριζόντιο άξονα,
- Επιλέγεται η θέση με το χαμηλότερο συνολικό κόστος για τον αναμενόμενο όγκο πωλήσεων.

Αριθμητικό Παράδειγμα 4.1

Ένας παραγωγός καρμπυρατέρ εξετάζει τρεις θέσεις για την εγκατάσταση ενός νέου εργοστασίου, Α) στην Εθνική Οδό Αθηνών-Λαμίας στο ύψος της Κάτω Κηφισιάς, Β) στην Εθνική Οδό Αθηνών-Λαμίας στο ύψος των Οινοφύτων και Γ) στη Θήβα. Μελέτες έχουν δείξει ότι τα σταθερά ετήσια κόστη και τα μεταβλητά κόστη ανά μονάδα παραγωγής δίνονται από το παρακάτω πίνακα:

Θέση	Σταθερό κόστος (€/έτος)	Μεταβλητό κόστος (€/μονάδα)
Α	60.000	150
Β	120.000	90
Γ	220.000	50

Η αναμενόμενη τιμή πώλησης των καρμπυρατέρ είναι 240 € ανά μονάδα. Ο παραγωγός θέλει να επιλέξει την πιο οικονομικά συμφέρουσα θέση για το νέο εργοστάσιο για έναν αναμενόμενο όγκο πωλήσεων 2.000 μονάδων ανά έτος.

Λύση:

Τα συνολικά κόστη για έναν αναμενόμενο όγκο πωλήσεων 2.000 μονάδων ανά έτος για τις τρεις υποψήφιες θέσεις διαμορφώνονται ως εξής :

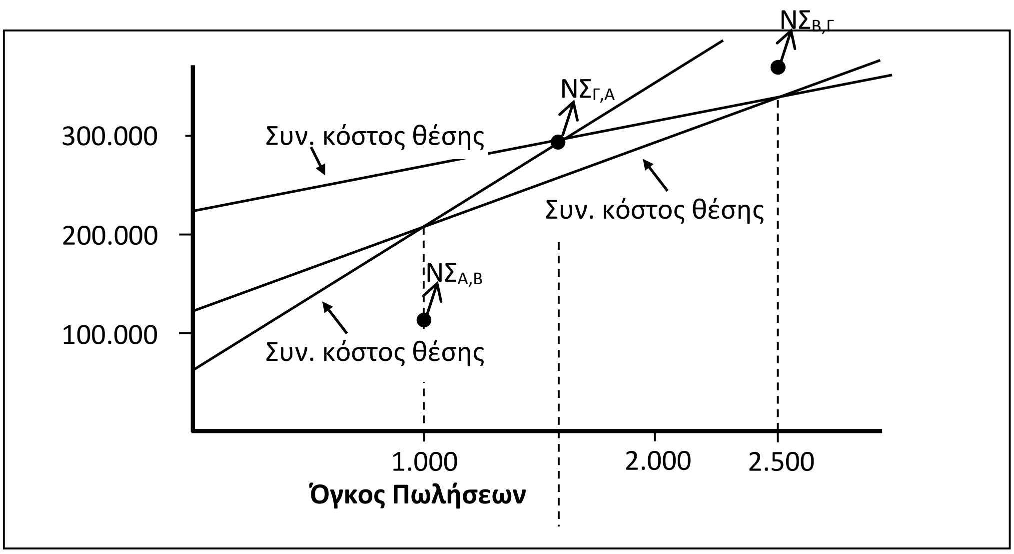
Θέση	Σταθερό + Μεταβλητό κόστος (€/έτος)
Α	60.000 + (150)(2.000) = 360.000
Β	120.000 + (90)(2.000) = 300.000
Γ	220.000 + (50)(2.000) = 320.000

Για έναν αναμενόμενο όγκο πωλήσεων 2.000 μονάδων ανά έτος η θέση Β έχει το χαμηλότερο αναμενόμενο συνολικό κόστος. Το αναμενόμενο κέρδος είναι:

Συνολικά έσοδα- Συνολικό κόστος=

240 (2.000) – 200.000 = 280.000 €/έτος

Η γραφική απεικόνιση τριών εναλλακτικών φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



1.600

Από το παραπάνω διάγραμμα φαίνεται ότι η επιλογή της θέσης εξαρτάται από τον όγκο πωλήσεων.

Στο παραπάνω διάγραμμα ορίζονται τρία διαφορετικά ΝΣ:

1. $ΝΣ_{Α,Β}$ που αντιστοιχεί στο ΝΣ των εναλλακτικών Α και Β,
2. $ΝΣ_{Α,Γ}$ που αντιστοιχεί στο ΝΣ των εναλλακτικών Α και Γ,
3. $ΝΣ_{Β,Γ}$ που αντιστοιχεί στο ΝΣ των εναλλακτικών Β και Γ.

Έτσι, ανάλογα με τον όγκο πωλήσεων η μια θέση υπερτερεί των υπολοίπων:

Προτιμάται η θέση Α αν $0 \leq$όγκος πωλήσεων < 1000 (που αντιστοιχεί στο $ΝΣ_{Α,Β}$),

Προτιμάται η θέση Β αν 1.000 $\leq$ όγκος πωλήσεων < 2.500 (που αντιστοιχεί στο $ΝΣ_{Β,Γ}$),

Προτιμάται η θέση Γ αν 2.500 $\leq$ όγκος πωλήσεων.

K4.2 Μέθοδος ελαχιστοποίησης κόστους μεταφοράς

Η μαθηματική τεχνική που εφαρμόζεται για να βρεθεί η θέση ενός εργοστασίου ή μίας αποθήκης που προμηθεύει έναν αριθμό καταναλωτικών κέντρων (ή/και προμηθεύεται από έναν αριθμό κέντρων προμήθειας πρώτων υλών) με στόχο την ελαχιστοποίηση του κόστους μεταφοράς από το εργοστάσιο στα καταναλωτικά κέντρα ονομάζεται μέθοδος ελαχιστοποίησης κόστους μεταφοράς.

Ορίζουμε ως:

Θ: την θέση του εργοστασίου,

k_i: το καταναλωτικό κέντρο ή/και κέντρο προμηθειών *i*, *i*=1,2, ... ,*m*,

$d(\Theta, k_i)$: την απόσταση από το εργοστάσιο στο k_i,

V_i : τον όγκο των μεταφερόμενων προϊόντων ή/και πρώτων υλών προς/από το k_i,

C_i: το μοναδιαίο κόστος (ανά όγκο και απόσταση) μεταφοράς προϊόντων ή/και πρώτων υλών προς/από k_i,

w_i: ο συντελεστής που εκφράζει το κόστος μεταφοράς επί τον μεταφερόμενο όγκο

$(w_{\underset{=}{i}} = V_i * C_i)$ προς/από το k_j.

Το συνολικό κόστος υπολογίζεται από:

$$f(\Theta) = \sum_{i=1}^{m} w_i d(\Theta, k_i)$$

Υπάρχουν τρεις προσεγγιστικές μέθοδοι για τον υπολογισμό της βέλτιστης θέσης ενός εργοστασίου που βασίζονται στον υπολογισμό της απόστασης του εργοστασίου από τα σημεία κατανάλωσης ή/ και σημεία προμήθειας.

4.2.1 Περίπτωση Α : Υπολογισμός βέλτιστου σημείου με τις ορθογώνιες αποστάσεις

Οι ορθογώνιες αποστάσεις του βέλτιστου σημείου εγκατάστασης ενός εργοστασίου δίνονται από:

$$d(\Theta, k_i) = |x - a_i| + |y - b_i|$$

όπου:

(x, y) = οι συντεταγμένες του σημείου *Θ* που πρέπει να υπολογιστούν,

(a_i, b_i) = οι συντεταγμένες του k_i (καταναλωτικό κέντρο ή/και σημείο προμήθειας).

Το πρόβλημα ορίζεται ως:

$$\min f(x, y) = \min_{x} \sum_{i=1}^{m} w_i |x - a_i| + \min_{y} \sum_{i=1}^{m} w_i |y - b_i|$$

Μέθοδος επίλυσης του μισού αθροίσματος

Από τα παραπάνω προκύπτουν δύο ξεχωριστά προβλήματα ελαχιστοποίησης: ένα ως προς το x και ένα ως προς το y.

Ιδιότητες της βέλτιστης λύσης (x*,y*):

$(x^*,y^*) = (a_i,b_{i'})$ για κάποιο i,i', όπου $a_i,b_{i'}$ είναι κάποια τεταγμένη και κάποια τετμημένη που αντιστοιχούν σε αυτές των k_i,

(x^*,y^*) είναι θέση "μισού αθροίσματος" δηλαδή η θέση όπου όχι περισσότερη από τη μισή κίνηση (άθροισμα συντελεστών $\sum_i w_i$) είναι προς τα αριστερά (κάτω) της θέσης και όχι περισσότερη από τη μισή κίνηση είναι προς τα δεξιά (πάνω) της θέσης.

Αριθμητικό Παράδειγμα 4.2

Να βρεθεί η θέση εγκατάστασης ενός εργοστασίου που πρόκειται να τροφοδοτεί πέντε καταναλωτικά κέντρα με 5, 22, 41, 60 και 34 τόνους προϊόντων την ημέρα, αντίστοιχα. Οι συντεταγμένες σε χιλιόμετρα ορθογωνίων αποστάσεων των καταναλωτικών κέντρων είναι (0,0), (3,16), (18,2), (8,18) και (20,2) αντίστοιχα. Το κόστος C_i ανά τόνο και χιλιόμετρο είναι το ίδιο προς όλες τις κατευθύνσεις.

Λύση:

Υπολογισμός της βέλτιστης τετμημένη x^*:

Ταξινόμηση των καταναλωτικών κέντρων κατά αύξουσα τετμημένη a_i

Κέντρο i	a_i	V_i	w_i	Σw_i
1	0	5	$5*C_i$	$5*C_i$

2	3	22	22*C_i	27* C_i
3	8	60	60*C_i	87* C_i
4	18	41	41*C_i	128* C_i
5	20	34	34*C_i	162* C_i

Συνολική κίνηση μεταφερομένων τόνων = 162 τόνοι/ημέρα

Μισή συνολική κίνηση μεταφερομένων τόνων είναι 162 /2 = 81 τόνοι/ημέρα.

Έστω C_i = 1

Άρα, η βέλτιστη τετμημένη είναι x*=8 χιλιόμετρα, αφού το άθροισμα της κίνησης ξεπερνά το 81 για πρώτη φορά στο x = 8. Πράγματι, η κίνηση αριστερά του x = 8 είναι 5 + 22 = 27 < 81, ενώ η κίνηση δεξιά του x = 8 είναι 41 + 34 = 75 < 81.

Υπολογισμός της βέλτιστης τεταγμένης y*:

Ταξινόμηση των καταναλωτικών κέντρων κατά αύξουσα τεταγμένη b_i

Κέντρο *i*	b_i	V_i	w_i	$\Sigma\ w_i$
1	0	5	5* C_i	5* C_i
3,5	2	41+34	(41+34)* C_i	80* C_i
2	16	22	22* C_i	102* C_i
4	18	60	60* C_i	162* C_i

Με τη μέθοδο μισού αθροίσματος βρίσκουμε τη βέλτιστη τεταγμένη y*=16 χιλιόμετρα.

Άρα, το βέλτιστο σημείο εγκατάστασης του εργοστασίου για την τροφοδότηση των 5 καταναλωτικών κέντρων είναι το (8,16).

4.2.2 Περίπτωση Β : Υπολογισμός βέλτιστου σημείου με βάση τις ευθείες αποστάσεις

Οι ευθείες αποστάσεις του βέλτιστου σημείου εγκατάστασης ενός εργοστασίου δίνονται από:

$$d_i = \mathrm{d}(\Theta, \mathrm{k_i}) = [(\mathrm{x}-\mathrm{a_i})^2 + (\mathrm{y}-\mathrm{b_i})^2]^{1/2}$$

Το πρόβλημα ορίζεται ως:

$$\min \mathrm{f}(\mathrm{x},\mathrm{y}) = \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{m}} \mathrm{w_i}[(\mathrm{x}-\mathrm{a_i})^2 + (\mathrm{y}-\mathrm{b_i})^2]^{1/2}$$

<u>Μέθοδος λύσης με διαδοχικές προσεγγίσεις (Cooper, 1963):</u>

Για την ελαχιστοποίηση θέτουμε τις παραγώγους της f(x,y) ίσες με το μηδέν:

$$\frac{\partial \mathrm{f}(\mathrm{x},\mathrm{y})}{\partial \mathrm{x}} = \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{m}} \frac{\mathrm{w_i}(\mathrm{x}-\mathrm{a_i})}{\mathrm{d_i}} = 0$$

$$\frac{\partial \mathrm{f}(\mathrm{x},\mathrm{y})}{\partial \mathrm{y}} = \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{m}} \frac{\mathrm{w_i}(\mathrm{x}-\mathrm{b_i})}{\mathrm{d_i}} = 0$$

Η λύση του παραπάνω συστήματος εξισώσεων είναι:

$$\mathrm{x} = \frac{\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{m}} \frac{\mathrm{w_i a_i}}{\mathrm{d_i}}}{\sum_{i=1}^{m} \frac{\mathrm{w_i}}{\mathrm{d_i}}} \text{ και } \mathrm{y} = \frac{\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{m}} \frac{\mathrm{w_i b_i}}{\mathrm{d_i}}}{\sum_{i=1}^{m} \frac{\mathrm{w_i}}{\mathrm{d_i}}}$$

Για να λύσουμε ως προς *x* *και* *y* χρησιμοποιούμε τον εξής επαναληπτικό αλγόριθμο του Cooper:

1. Ξεκινώντας από δύο οποιεσδήποτε τιμές των *x* και *y* βρίσκονται τα d_i, i=1,2, ... ,*m.*

2. Δεδομένων των d_i, *i*=1,2, ... ,*m*, ξαναϋπολογίζονται τα *x* και *y*.

3. Επαναλαμβάνεται το 1ο βήμα του αλγόριθμου Cooper μέχρις ότου οι διαφορές ανάμεσα στις διαδοχικές τιμές του *x* και *y* είναι αμελητέες.

<u>Αριθμητικό Παράδειγμα 4.3</u>

Να λυθεί το παράδειγμα 4.2 χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των ευθείων αποστάσεων.

<u>Λύση:</u>

Έστω αρχικά (*x,y*)=(4,4). Γι’ αυτές τις τιμές υπολογίζουμε τα d_i:

$$d_1 = [(4-0)^2 + (4-0)^2]^{1/2} = 5{,}66$$

$$d_2 = [(4-3)^2 + (4-16)^2]^{1/2} = 12{,}04$$

$$d_3 = [(4-8)^2 + (4-2)^2]^{1/2} = 4.47$$

$$d_4 = [(4-18)^2 + (4-18)^2]^{1/2} = 19{,}79$$

$$d_5 = [(4-20)^2 + (4-2)^2]^{1/2} = 16{,}12$$

Δεδομένων των παραπάνω τιμών των d_i, ξαναϋπολογίζονται οι τιμές των *x* και *y* και βρίσκεται (x,y) = (11,87, 10,43). Συνεχίζοντας τη διαδικασία καταλήγουμε ότι για τα νέα (x,y) = (9,98, 13,27), τα επόμενα (x,y) = (9,97, 13,29). Επειδή η διαφορά των τελευταίων δύο διαδοχικών τιμών είναι μικρή σταματάμε τον αλγόριθμο Cooper στις τιμές (*x*,y**) = (9,97, 13,29).

4.2.3 Περίπτωση Γ : Υπολογισμός βέλτιστου σημείου με βάση τα τετράγωνα αποστάσεων (κέντρο βάρους)

Τα τετράγωνα των αποστάσεων του βέλτιστου σημείου εγκατάσταση ενός εργοστάσιου από τα κέντρα κατανάλωσης ή προμήθειας δίνονται από:

$$d(\Theta, k_i) = (x - a_i)^2 + (y - b_i)^2$$

Το πρόβλημα ορίζεται ως:

$$\min f(x,y) = \sum_{i=1}^{m} w_i[(x - a_i)^2 + (y - b_i)^2]$$

Μέθοδος υπολογισμού του κέντρου βάρους:

$$x^* = \frac{\sum_{i=1}^{m} w_i a_i}{\sum_{i=1}^{m} w_i} \quad \text{και} \quad y^* = \frac{\sum_{i=1}^{m} w_i b_i}{\sum_{i=1}^{m} w_i}$$

Αριθμητικό Παράδειγμα 4.4

Να λυθεί το παράδειγμα της σελίδας 65-66 όταν το κόστος μεταφοράς από το εργοστάσιο στα καταναλωτικά κέντρα είναι το κέντρο βάρους των τετραγώνων των αποστάσεων της θέσης του εργοστασίου από τα καταναλωτικά κέντρα.

Λύση:

$$x^* = \frac{\sum_{i=1}^{m} w_i a_i}{\sum_{i=1}^{m} w_i} = 12{,}12 \quad \text{και} \quad y^* = \frac{\sum_{i=1}^{m} w_i b_i}{\sum_{i=1}^{m} w_i} = 9{,}76$$

4.3 Μέθοδος προτύπου μεταφοράς

Ο σκοπός του προβλήματος προτύπου μεταφοράς είναι να ελαχιστοποιηθεί το κόστος μεταφοράς προϊόντων από έναν αριθμό κέντρων παραγωγής, π.χ. εργοστασίων, σε έναν αριθμό κέντρων κατανάλωσης, όταν κάθε κέντρο παραγωγής έχει μία ορισμένη παραγωγή προϊόντων και κάθε κέντρο κατανάλωσης έχει μία ορισμένη ζήτηση για προϊόντα.

4.3.1 Μορφοποίηση του προβλήματος προτύπου μεταφοράς

$$\min f(x) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

υπό τους περιορισμούς:

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \quad j = 1,2,\dots,n$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \quad i = 1,2,\dots,m$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad i = 1,2,\dots,m \quad j = 1,2,\dots,n$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

όπου:

a_i = η παραγωγή του εργοστασίου *i*, *i*=1,2, … ,*m*,

b_j = η ζήτηση του κέντρου κατανάλωσης *j*, *j*=1,2, … *n*,

c_{ij} = το κόστος μεταφοράς και παραγωγής μίας μονάδας προϊόντος από το εργοστάσιο *i* στο κέντρο κατανάλωσης *j*,

x_{ij} = οι μονάδες προϊόντων που μεταφέρονται από το εργοστάσιο *i* στο κέντρο κατανάλωσης ***j***.

4.3.2 Μέθοδος λύσης του προτύπου μεταφοράς

Χρησιμοποιούμε την τροποποιημένη μέθοδο κατανομής που έχει τα εξής βήματα:

1. Οργανώνουμε τα στοιχεία του προβλήματος σε ένα πίνακα σαν τον παρακάτω, κάθε κελί το χωρίζουμε σε δύο μέρη. Στο πρώτο βάζουμε την μεταβλητή απόφασης $x_{i,j}$ για κάθε κέντρο παραγωγής *i* και κάθε κέντρο κατανάλωσης *j*. Στο δεύτερο μέρος βάζουμε το κόστος μεταφοράς και παράγωγης $C_{i,j}$. Στην τελευταία γραμμή βάζουμε τη ζήτηση από κάθε κέντρο κατανάλωσης και στην τελευταία στήλη βάζουμε την παραγωγική ικανότητα κάθε εργοστασίου.

i \ j	1	2	…	n	a_i
1	x_{11}/c_{11}	x_{12}/c_{12}	…	x_{1n}/c_{1n}	a_1
2	x_{21}/c_{21}	x_{22}/c_{22}	…	x_{2n}/c_{2n}	a_2
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
m	x_{m1}/c_{m1}	x_{m2}/c_{m2}	…	x_{mn}/c_{mn}	a_m
b_j	b_1	b_2	…	b_n	$\sum a_i = \sum b_j$

2. Αφού φτιάξουμε τον πίνακα, ξεκινάμε με μία αρχική λύση. Για να βρεθεί μια αρχική λύση, συχνά χρησιμοποιούμε τον κανόνα της "βορειοδυτικής γωνίας" που έχει ως εξής: Επιλέγουμε σαν βασική μεταβλητή (δηλαδή μεταβλητή που παίρνει τιμή μη μηδενική) τη μεταβλητή x_{11} (δηλαδή ξεκινάμε από τη "βορειοδυτική γωνία" του πίνακα). Στη συνέχεια, αν η x_{ij} ήταν η τελευταία βασική μεταβλητή που επιλέχτηκε, τότε η επόμενη μεταβλητή που επιλέγεται είναι η $x_{i,j+1}$, δηλαδή μετακινούμαστε μία στήλη δεξιότερα, αν το εργοστάσιο *i* έχει κάποια υπόλοιπη παραγωγή να διαθέσει. Αλλιώς, η επόμενη μεταβλητή που επιλέγεται είναι $x_{i+1,j}$, δηλαδή μετακινούμαστε μια γραμμή πιο κάτω.

3. Για κάθε γραμμή *i* του πίνακα υπολογίζουμε μία τιμή u_i και για κάθε στήλη ***j*** του πίνακα υπολογίζουμε μία τιμή v_j . Οι υπολογισμοί αυτοί γίνονται ως εξής:

Θέτουμε $u_i + v_j = c_{ij}$ για εκείνα τα κελιά που είναι σε χρήση δηλαδή σε κελιά που αντιστοιχούν σε βασικές μεταβλητές x_{ij}

Αφού σημειώσουμε τις παραπάνω εξισώσεις, θέτουμε για οποιαδήποτε μεταβλητή $u_i = 0$ (Επιλέγουμε μια τυχαία). Ο λόγος που θέτουμε τυχαία $u_i = 0$ είναι ότι οι εξισώσεις $u_i + v_j = c_{ij}$ που έχουμε δημιουργήσει είναι λιγότερες από τις άγνωστες μεταβλητές u_i , v_j.

Λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων για τις u_i και τις v_j .

Υπολογίζουμε τον συντελεστή βελτίωσης για κάθε τετράγωνο σε αχρησία (που αντιστοιχεί σε μη βασική μεταβλητή x_{ij}). Ο συντελεστής βελτίωσης υπολογίζεται από τον τύπο: Συντελεστής = $c_{ij}-u_i-v_j$.

4. Αν όλοι οι συντελεστές είναι μεγαλύτεροι ή ίσοι του μηδενός, έχουμε φτάσει στην βέλτιστη λύση και ο αλγόριθμος σταματάει αλλιώς πάμε στο βήμα 5.

5. Επιλέγουμε μία μη βασική μεταβλητή για να εισέλθει στη βάση και μία βασική μεταβλητή για να εξέλθει από τη βάση.

Η μη βασική μεταβλητή που εισέρχεται στη βάση αντιστοιχεί στο κελί με τον μεγαλύτερο αρνητικό συντελεστή. Αν υπάρχουν παραπάνω από μία με τον μεγαλύτερο αρνητικό συντελεστή, επιλέγουμε αυτή που έχει το μικρότερο μοναδιαίο κόστος μεταφοράς και παραγωγής.

Στη μεταβλητή που εισέρχεται στη βάση δίνουμε τη μεγαλύτερη δυνατή τιμή θ, διορθώνοντας ταυτόχρονα τις τιμές των άλλων μεταβλητών που επηρεάζονται από αυτή την τιμή, έτσι ώστε να μην ξεπεράσουμε την παραγωγική ικανότητα των εργοστασίων, ενώ παράλληλα συνεχίζουμε να ικανοποιούμε την ζήτηση. Η διόρθωση αυτή γίνεται αφαιρώντας και προσθέτοντας διαδοχικά την τιμή θ από τις τιμές των βασικών μεταβλητών που αντιστοιχούν σε τετράγωνα που σχηματίζουν ένα κλειστό βρόγχο που ξεκινάει και καταλήγει στο τετράγωνο της μη βασικής μεταβλητής που εισέρχεται στη βάση. Με τη διόρθωση αυτή μία βασική μεταβλητή μηδενίζεται. Η μεταβλητή που μηδενίζεται είναι αυτή που εξέρχεται από τη βάση.

Αν δύο ή παραπάνω βασικές μεταβλητές μηδενίζονται επιλέγουμε εκείνη με το μεγαλύτερο μοναδιαίο κόστος μεταφοράς για να εξέλθει απο την βάση, ενώ οι υπόλοιπες θεωρούνται εκφυλισμένες βασικές μεταβλητές με μηδενική τιμή.

Ανά πάσα στιγμή ο αριθμός των βασικών μεταβλητών είναι $m+n-1$.

4.3.3 Εφαρμογή του προτύπου μεταφοράς στο πρόβλημα προσθήκης εργοστασίου

Ο σκοπός του προβλήματος προσθήκης εργοστασίου είναι να προσδιορισθεί η θέση εγκατάστασης ενός νέου εργοστασίου ανάμεσα σε κάποιες εναλλακτικές θέσεις, που συνδιαζόμενη με τις θέσεις άλλων υπαρχόντων εργοστασίων να ελαχιστοποιήσει το κόστος διανομής των προϊόντων από τα εργοστάσια σε έναν αριθμό κέντρων κατανάλωσης.

Η μέθοδος λύσης του προβλήματος προσθήκης εργοστασίου περιλαμβάνει τα παρακάτω δύο βήματα:

1. Για κάθε εναλλακτική θέση εγκατάστασης του νέου εργοστασίου διαμορφώνεται το αντίστοιχο πρόβλημα προτύπου μεταφοράς και βρίσκεται η βέλτιστη λύση του και το αντίστοιχο ελάχιστο συνολικό κόστος διανομής προϊόντων.

2. Επιλέγεται η θέση που δίνει το ελάχιστο συνολικό κόστος διανομής των προϊόντων.

Αριθμητικό Παράδειγμα 4.5

Μία εταιρεία έχει δύο εργοστάσια, ένα στην Αθήνα και ένα στη Θεσσαλονίκη, από τα οποία προμηθεύει καταναλωτικά κέντρα στις πόλεις Πάτρα, Λάρισα, Βόλο, Κοζάνη και Καβάλα. Επειδή έχει αυξηθεί η ζήτηση, η εταιρεία έχει αποφασίσει να δημιουργήσει ένα τρίτο εργοστάσιο η πιθανή θέση εγκατάστασης του οποίου έχει περιοριστεί σε δύο επιλογές, στην Κατερίνη και στη Λαμία.

Ο παρακάτω πίνακας δίνει τα κόστη παραγωγής στα εργοστάσια Αθήνας και Θεσσαλονίκης (προτελευταία στήλη) και το κόστος μεταφοράς προς τα καταναλωτικά κέντρα στην Πάτρα, Λάρισα, Βόλο, Κοζάνη και Καβάλα από Αθήνα και Θεσσαλονίκη καθώς και την παραγωγική ικανότητα των υπαρχόντων εργοστασίων (τελευταία στήλη).

	Πάτ.	Λάρ.	Βόλ.	Κόζ.	Κάβ.	Μοναιαίο κόστος παραγ.	Μηνιαία ικανότ. παραγ.
Αθ.	12	16	16	20	24	52	50
Θεσ	20	20	16	8	12	48	75

Ο παρακάτω πίνακας δίνει προβλέψεις της ζήτησης των πέντε καταναλωτικών κέντρων, των κοστών παραγωγής, μεταφοράς καθώς και την παραγωγική ικανότητα των δύο νέων εργοστασίων στη Λαμία και στην Κατερίνη.

	Πάτ.	Λάρ.	Βόλ.	Κόζ.	Κάβ.	Μοναιαίο κόστος παραγ.	Μηνιαία ικανότ. παραγ.
Λαμ.	12	12	8	8	12	56	60
Κατ.	16	12	8	8	16	52	60
Μην. ζήτηση	45	35	40	35	30		

Για να επιλέξουμε μία από τις δύο θέσεις λύνουμε δύο προβλήματα προτύπου μεταφοράς, το πρώτο με εργοστάσια στην Αθήνα, Θεσσαλονίκη και νέο εργοστάσιο στη Λαμία, και το δεύτερο με εργοστάσια στην Αθήνα, Θεσσαλονίκη και νέο εργοστάσιο στην Κατερίνη. Επιλέγουμε τη θέση της οποίας το αντίστοιχο πρόβλημα προτύπου μεταφοράς δίνει το χαμηλότερο κόστος.

Λύση:

Πιθανό εργοστάσιο στη Λαμία

Αρχική λύση του προβλήματος είναι:

i\j	1	2	3	4	5	Ικαν. Παρ.	u_i
1	$^{45}/_{64}$	$^{5}/_{68}$	$/_{68}$	$/_{72}$	$/_{76}$	50	0
2	$/_{68}$	$^{30}/_{68}$	$^{40}/_{64}$	$^{5}/_{56}$	$/_{60}$	75	0
3	$/_{68}$	$/_{68}$	$/_{64}$	$^{30}/_{64}$	$^{30}/_{68}$	60	8
Ζήτ.	45	35	40	35	30	185	-
v_j	64	68	64	56	60	-	

Υπολογισμός των u_i και v_j:

$u_1 = 0$

$v_1 = c_{11} - u_1 = 64 - 0 = 64$

$v_2 = c_{12} - u_1 = 68 - 0 = 68$

$u_2 = c_{22} - v_2 = 68 - 68 = 0$

$v_4 = c_{24} - u_2 = 56 - 0 = 56$

$u_3 = c_{34} - v_4 = 64 - 56 = 8$

$v_5 = c_{35} - u_3 = 68 - 8 = 60$

Υπολογισμός συντελεστών για κάθε μη βασική μεταβλητή:

i\j	1	2	3	4	5
1			4	16	16
2	4				0

3	-4	-8	-8		

Τον μεγαλύτερο αρνητικό συντελεστή τον έχουν οι μεταβλητές x_{32} και x_{33} . Επιλέγεται η μεταβλητή x_{33} για να εισέλθει στη βάση γιατί έχει το μικρότερο κόστος μεταφοράς $(68 = c_{32} > c_{33} = 64)$ και επιλέγεται η μεταβλητή x_{34} για να βγει από τη βάση γιατί είναι η πρώτη μεταβλητή που μηδενίζεται.

i\j	1	2	3	4	5	Ικαν. Παρ.	u_i
1	$^{45}/_{64}$	$^{5}/_{68}$	$/_{68}$	$/_{72}$	$/_{76}$	50	0
2	$/_{68}$	$^{30}/_{68}$	$^{40-\theta}/_{64}$	$^{5+\theta}/_{56}$	$/_{60}$	75	0
3	$/_{68}$	$/_{68}$	$^{+\theta}/_{64}$	$^{30-\theta}/_{64}$	$^{30}/_{68}$	60	8
Ζήτ.	45	35	40	35	30	185	-
v_j	64	68	64	56	60	-	

2η λύση 1ου προβλήματος

i\j	1	2	3	4	5	Ικαν. Παρ.	u_i
1	$^{45}/_{64}$	$^{5}/_{68}$	$/_{68}$	$/_{72}$	$/_{76}$	50	0
2	$/_{68}$	$^{30}/_{68}$	$^{10-\theta}/_{64}$	$^{35}/_{56}$	$^{+\theta}/_{60}$	75	0
3	$/_{68}$	$/_{68}$	$^{30+\theta}/_{64}$	$/_{64}$	$^{30-\theta}/_{68}$	60	0
Ζήτ.	45	35	40	35	30	185	-
v_j	64	68	64	56	68	-	

3η λύση 1ου προβλήματος

i\j	1	2	3	4	5	Ικαν. Παρ.	u_i
1	$^{45}/_{64}$	$^{5}/_{68}$	$/_{68}$	$/_{72}$	$/_{76}$	50	0

2	$^{}/_{68}$	$^{30-\theta}/_{68}$	$^{}/_{64}$	$^{35}/_{56}$	$^{10+\theta}/_{60}$	75	0
3	$^{}/_{68}$	$^{+\theta}/_{68}$	$^{40}/_{64}$	$^{}/_{64}$	$^{20-\theta}/_{68}$	60	8
Ζήτ.	45	35	40	35	30	185	-
v_j	64	68	56	56	60	-	

4η και βέλτιστη λύση 1ου προβλήματος

i\j	1	2	3	4	5	Ικαν. Παρ.	u_i
1	$^{45}/_{64}$	$^{5}/_{68}$	$^{}/_{68}$	$^{}/_{72}$	$^{}/_{76}$	50	0
2	$^{}/_{68}$	$^{10}/_{68}$	$^{}/_{64}$	$^{35}/_{56}$	$^{30}/_{60}$	75	0
3	$^{}/_{68}$	$^{20}/_{68}$	$^{40}/_{64}$	$^{}/_{64}$	$^{}/_{68}$	60	0
Ζήτ.	45	35	40	35	30	185	-
v_j	64	68	64	56	60	-	

Άρα η ικανοποίηση της ζήτησης με εργοστάσιο στη Λαμία συνεπάγεται μηνιαίο κόστος (45)(64)+(5)(68)+(10)(68)+(35)(56)+(30)(60)+(20)(68)+(40)(64)=11.580 Ευρώ.

<u>Πιθανό νέο εργοστάσιο στην Κατερίνη</u>

Αρχική λύση του προβλήματος είναι:

i\j	1	2	3	4	5	Ικαν. Παρ.	u_i
1	$^{45}/_{64}$	$^{5}/_{68}$	$^{}/_{68}$	$^{}/_{72}$	$^{}/_{76}$	50	0
2	$^{}/_{68}$	$^{30}/_{68}$	$^{40-\theta}/_{64}$	$^{5+\theta}/_{56}$	$^{}/_{60}$	75	0
3	$^{}/_{68}$	$^{}/_{64}$	$^{+\theta}/_{60}$	$^{30-\theta}/_{60}$	$^{30}/_{68}$	60	4
Ζήτ.	45	35	40	35	30	185	-

v_j	64	68	56	56	64	-	

$2^η$ λύση $2^{ου}$ προβλήματος

i\j	1	2	3	4	5	Ικαν. Παρ.	u_i
1	$^{45}/_{64}$	$^{5}/_{68}$	$/_{68}$	$/_{72}$	$/_{76}$	50	0
2	$/_{68}$	$^{30}/_{68}$	$^{10-\theta}/_{64}$	$^{35}/_{56}$	$^{+\theta}/_{60}$	75	0
3	$/_{68}$	$/_{64}$	$^{30+\theta}/_{60}$	$/_{60}$	$^{30-\theta}/_{68}$	60	-4
Ζήτ.	45	35	40	35	30	185	-
v_j	64	68	64	56	72	-	

$3^η$ λύση $2^{ου}$ προβλήματος

i\j	1	2	3	4	5	Ικαν. Παρ.	u_i
1	$^{45}/_{64}$	$^{5}/_{68}$	$/_{68}$	$/_{72}$	$/_{76}$	50	0
2	$/_{68}$	$^{30-\theta}/_{68}$	$/_{64}$	$^{35}/_{56}$	$^{10+\theta}/_{60}$	75	0
3	$/_{68}$	$^{+\theta}/_{64}$	$^{40}/_{60}$	$/_{60}$	$^{20-\theta}/_{68}$	60	8
Ζήτ.	45	35	40	35	30	185	-
v_j	64	68	52	56	60	-	

$4^η$ και βέλτιστη λύση $2^{ου}$ προβλήματος

i\j	1	2	3	4	5	Ικαν. Παρ.	u_i
1	$^{45}/_{64}$	$^{5}/_{68}$	$/_{68}$	$/_{72}$	$/_{76}$	50	0
2	$/_{68}$	$^{10}/_{68}$	$/_{64}$	$^{35}/_{56}$	$^{30}/_{60}$	75	0
3	$/_{68}$	$^{20}/_{64}$	$^{40}/_{60}$	$/_{60}$	$/_{68}$	60	-4

Ζήτ.	45	35	40	35	30	185	-
v_j	64	68	64	56	60	-	

Άρα η ικανοποίηση της ζήτησης με εργοστάσιο στην Κατερίνη συνεπάγεται μηνιαίο κόστος 11.340 Ευρώ.

Συνεπώς για τη θέση του 3ου εργοστασίου προτιμάται η Κατερίνη.