



ανοικτά μαθήματα
opencourses

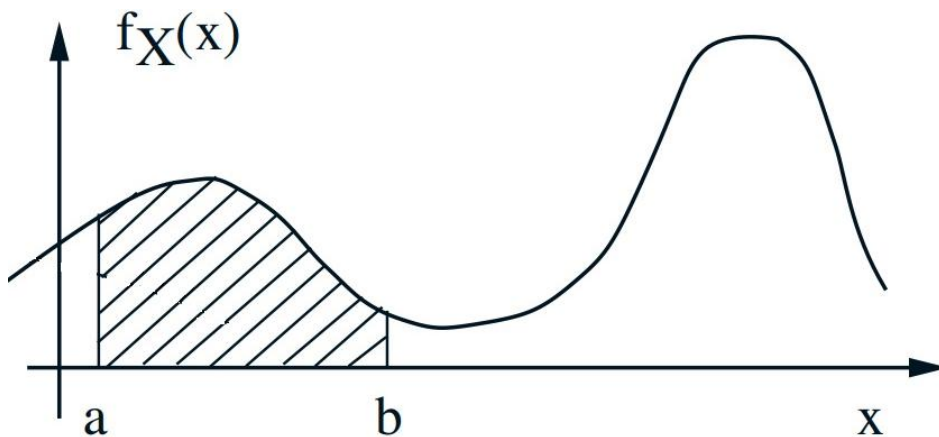
ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ Ι

Παντελής Δημήτριος
Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών



ΣΥΝΕΧΕΙΣ ΤΥΧΑΙΕΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ

- Μη αριθμήσιμο σύνολο τιμών (διάστημα)
- Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (pdf)
 - πιθανότητα για κάθε διάστημα



$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_X(x) dx$$

$$- \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = 1$$

– Για μικρό δ

$$P(x \leq X \leq x + \delta) \approx f_X(x) \cdot \delta$$

– $P(X = a) = 0$

ΜΕΣΗ ΤΙΜΗ ΚΑΙ ΔΙΑΣΠΟΡΑ

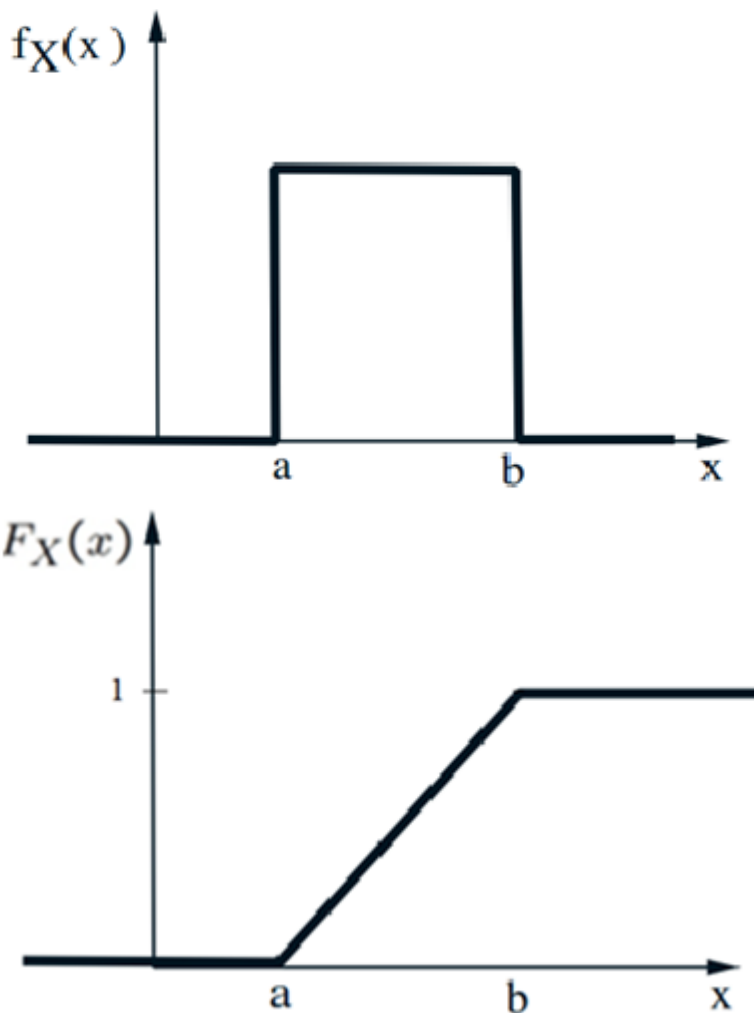
- $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x) dx$, κέντρο βάρους
- $E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot f_X(x) dx$
- $\text{var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x) dx - [E(X)]^2$
- Συνεχής ομοιόμορφη τυχαία μεταβλητή
 - $f_X(x) = \frac{1}{b-a}$, $a \leq x \leq b$
 - $E(X) = \frac{a+b}{2}$
 - $\text{var}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$
- Εκθετική τυχαία μεταβλητή
 - $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, $x \geq 0$
 - $E(X) = \frac{1}{\lambda}$
 - $\text{var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}$

ΑΘΡΟΙΣΤΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ

- Κοινός ορισμός για διακριτές και συνεχείς τυχαίες μεταβλητές

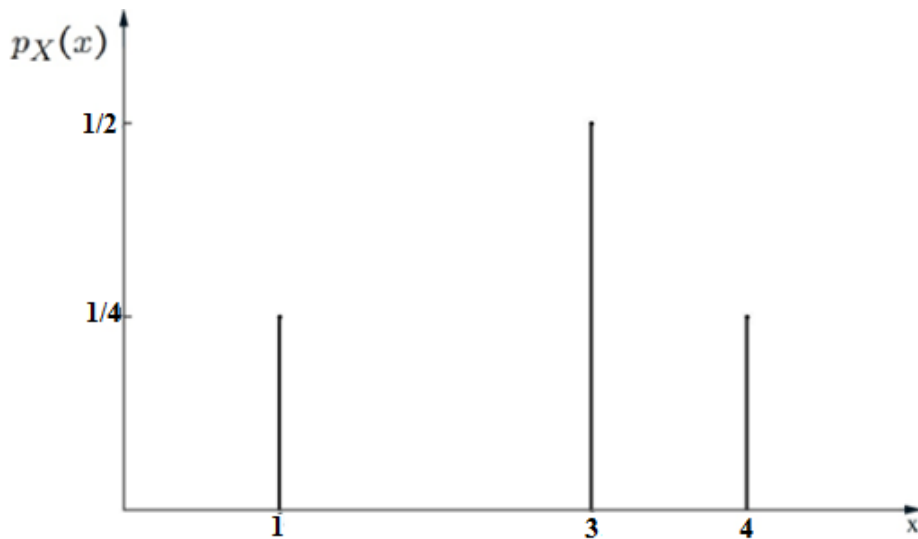
$$F_X(x) = P(X \leq x)$$

- Παράδειγμα συνεχούς τυχαίας μεταβλητής



ΑΘΡΟΙΣΤΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ

- Παράδειγμα διακριτής τυχαίας μεταβλητής



ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΕΚΘΕΤΙΚΗΣ ΤΥΧΑΙΑΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ

- Έλλειψη μνήμης
 - Αν ο χρόνος μεταξύ διαδοχικών γεγονότων είναι εκθετική τυχαία μεταβλητή, τα μελλοντικά γεγονότα δεν εξαρτώνται από τα προηγούμενα
 - $F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x} \Rightarrow P(X > x) = e^{-\lambda x}$
 - $P(X > t + x | X > t) = \frac{P(X > t + x)}{P(X > t)} = P(X > x)$
- Σχέση με τυχαία μεταβλητή Poisson
 - X : χρόνος μεταξύ διαδοχικών γεγονότων
 - N : αριθμός γεγονότων σε διάστημα T
 - X εκθετικός με μέση τιμή $\frac{1}{\lambda} \Leftrightarrow$
 N Poisson με μέση τιμή λT

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΤΥΧΑΙΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

- $Y = g(X)$
- X : τυχαία μεταβλητή με γνωστή pdf $f_X(x)$
- Ζητούμενο: pdf της Y , $f_Y(y)$
 - $g(X)$ 1-1, $h(y)$ αντίστροφη της $g(X)$

$$f_Y(y) = f_X(h(y)) \left| \frac{dh(y)}{dy} \right|$$

- Γενικά, αν $h_i(y)$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης $y = g(X)$

$$f_Y(y) = \sum_i f_X(h_i(y)) \left| \frac{dh_i(y)}{dy} \right|$$

- Παράδειγμα: X ομοιόμορφη στο $[0,1]$ $Y = \sqrt{X}$
 - Αντίστροφη συνάρτηση: $X = Y^2$
 - Για $0 < y < 1$,

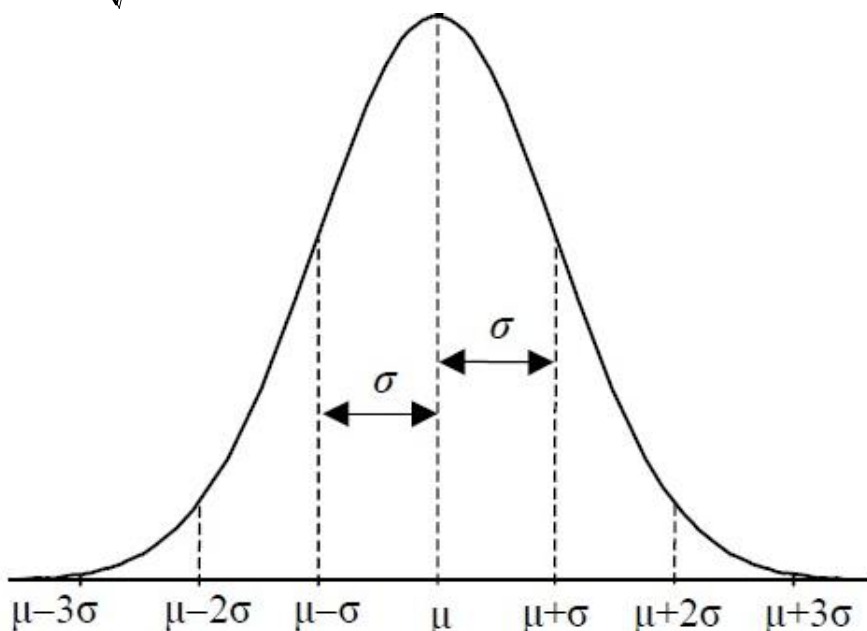
$$f_Y(y) = f_X(y^2) \cdot \left| \frac{dy^2}{dy} \right| = 1 \cdot 2y = 2y$$

- Γραμμικές συναρτήσεις, $Y = aX + b$

$$f_Y(y) = f_X\left(\frac{y-b}{a}\right) \cdot \frac{1}{|a|}$$

ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΤΥΧΑΙΑ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗ

- $$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$



$$E(X) = \mu, \text{ var}(X) = \sigma^2$$

- Συμβολισμός $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΤΥΧΑΙΑ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗ

- $X \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow aX + b \sim N(a\mu + b, a^2 \sigma^2)$
 - $Y = aX + b$
 - $f_Y(y) = \frac{1}{|a|} f_X\left(\frac{y-b}{a}\right) = \frac{1}{|a|\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-b-a\mu}{a\sigma}\right)^2}$
 - $Y = \frac{X - \mu}{\sigma}$: τυποποιημένη κανονική μεταβλητή
- $E(Y) = 0, \quad \text{var}(Y) = 1$

ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΤΥΧΑΙΑ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗ

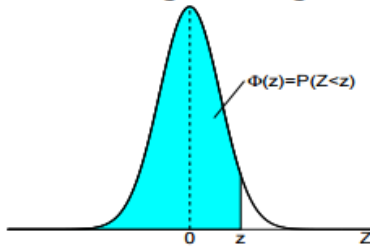
ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ

- $\Phi(z)$: αθροιστική συνάρτηση κατανομής τυποποιημένης κανονικής τυχαίας μεταβλητής
 - Τιμές της $\Phi(z)$ στον πίνακα της επόμενης σελίδας (11)
- $X \sim N(\mu, \sigma^2)$
 - $F_X(x) = P(X \leq x) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{x-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$
- Παράδειγμα: $X \sim N(60, 20^2)$
 $P(X \geq 80) = ;$
$$P(X \geq 80) = 1 - F_X(80) = 1 - \Phi\left(\frac{80 - 60}{20}\right)$$
$$= 1 - \Phi(1) = 1 - 0,8413 = 0,1587$$

ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΤΥΧΑΙΑ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗ

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ

Στατιστικός Πίνακας Τυπικής Κανονική Κατανομής



Παράδειγμα:

$$z = 1.28 \iff \Phi(z) = 0.90$$

$$z = 1.65 \iff \Phi(z) = 0.95$$

$$z = 2.33 \iff \Phi(z) = 0.99$$

$$z = 3.08 \iff \Phi(z) = 0.999$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998