ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ Ι

Παντελής Δημήτριος
Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

ΤΥΧΑΙΕΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ

- Σε κάθε αποτέλεσμα του πειράματος αντιστοιχεί μία αριθμητική τιμή

- Μαθηματικός ορισμός: Τυχαία μεταβλητή Χ είναι συνάρτηση με πεδίο ορισμού το δειγματικό χώρο Ω και πεδίο τιμών το σύνολο των πραγματικών αριθμών

$$X : \Omega \to R$$

  – Για $\omega \in \Omega$. $X(\omega)$είναι η τιμή που αντιστοιχει στο αποτέλεσμα ω του πειράματος

- Παραδείγματα
  – αριθμός Κ σε 3 ρίψεις νομίσματος (0, 1, 2, 3)
  – άθροισμα δύο ρίψεων ζαριού (2, 3, $\cdots$, 12)
  – χρόνος παραγωγής προϊόντων (τιμή σε κάποιο συνεχές διάστημα)

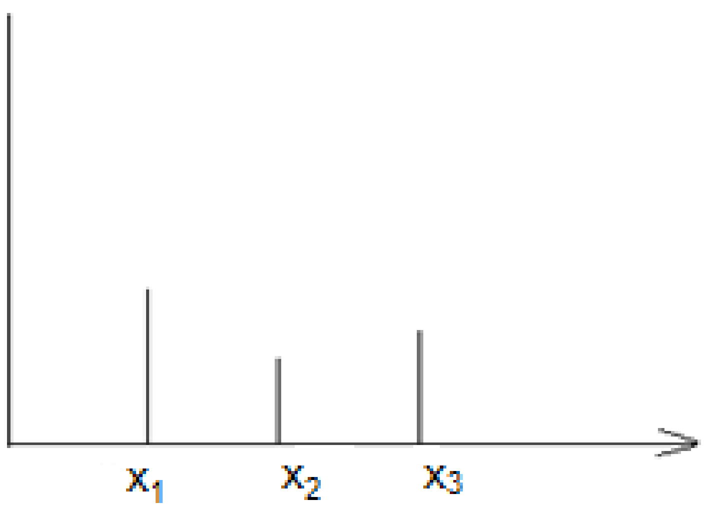
- Συμβολισμός

  X: τυχαία μεταβλητή

  x: αριθμητική τιμή

ΔΙΑΚΡΙΤΕΣ ΤΥΧΑΙΕΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ

- Πεπερασμένο ή αριθμήσιμο σύνολο τιμών
- Συνάρτηση μάζας πιθανότητας (pmf)
  - πιθανότητα για κάθε τιμή της X



  - σχήμα: πιθανότητα ως μάζα συγκεντρωμένη στην αντίστοιχη τιμή
  - $p_X(x) = P(X = x) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x\})$
  - $p_X(x) \geq 0, \ \sum_x p_X(x) = 1$

ΔΙΑΚΡΙΤΕΣ ΤΥΧΑΙΕΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ

- Παράδειγμα: $X =$ αριθμός K σε δύο ρίψεις νομίσματος
  $\Omega = \left\{ KK, K\Gamma, \Gamma K, \Gamma\Gamma \right\}$

$$p_X(0) = P(X=0) = P(\Gamma\Gamma) = \frac{1}{4}$$

$$p_X(2) = P(X=2) = P(KK) = \frac{1}{4}$$

$$p_X(1) = P(X=1) = P(K\Gamma) + P(\Gamma K) = \frac{1}{2}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΔΙΑΚΡΙΤΩΝ ΤΥΧΑΙΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

- Πείραμα με δύο αποτελέσματα
  “Επιτυχία” (Ε: πιθανότητα p)
  “Αποτυχία” (Α: πιθανότητα 1-p)

- Τυχαία μεταβλητή Bernoulli
  X: αριθμός επιτυχιών (0 ή 1)
  – $p_X(1) = p, \; p_X(0) = 1 - p$

- Δυωνυμική τυχαία μεταβλητή
  X: αριθμός επιτυχιών σε n ανεξάρτητες επαναλήψεις του πειράματος
  – $p_X(k) = P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad k=0,1,\cdots,n$

- Γεωμετρική τυχαία μεταβλητή
  X: αριθμός επαναλήψεων του πειράματος έως την πρώτη επιτυχία
  – $X = k \Rightarrow k\text{-}1$ αποτυχίες και μία επιτυχία
  – $p_X(k) = P(X = k) = (1-p)^{k-1} p, \quad k=1,2,3,\cdots$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΔΙΑΚΡΙΤΩΝ ΤΥΧΑΙΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

- Τυχαία μεταβλητή Poisson
  - $p_X(k) = P(X = k) = e^{-\lambda} \cdot \dfrac{\lambda^k}{k!}, \quad k=0,1,2,\cdots$
  - Προσεγγίζει ικανοποιητικά τη διωνυμική τυχαία μεταβλητή για μεγάλο n, μικρό p και np=λ
  - Παράδειγμα : 100 συσκευές, πιθανότητα βλάβης 0,01 για κάθε μία

    $P(5 \text{ παθαίνουν βλάβη}) = ;$

    X= αριθμός μηχανών που παθαίνουν βλάβη

    X: διωνυμική με n=100, p=0,01

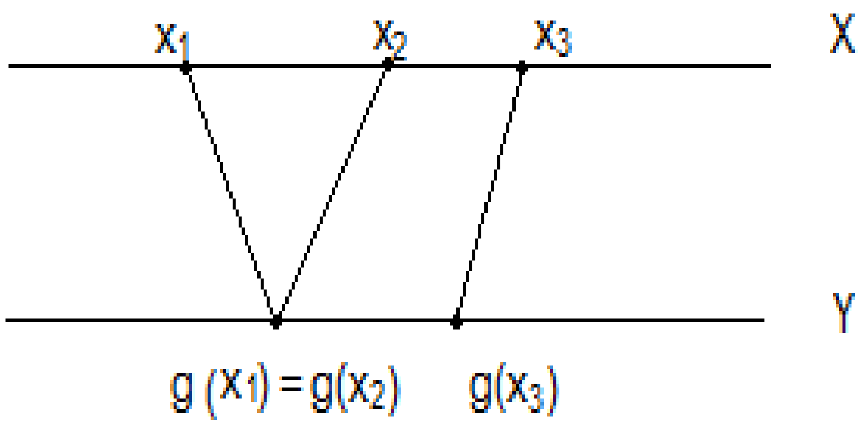
    $$P(X=5) = \binom{100}{5} \cdot 0{,}01^5 \cdot (1\text{-}0{,}01)^{95} = 0{,}0029$$

    Προσεγγιστικά, X: Poisson με λ=100•0,01=1

    $$P(X=5) = \frac{e^{-1} \cdot 1^5}{5!} = 0{,}00306$$

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΤΥΧΑΙΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

- $Y = g(X)$



- X : τυχαία μεταβλητή με γνωστή pmf $p_X(x)$

- Ζητούμενο: pmf της Y, $p_Y(y)$

- $p_Y(y) = P(Y = y) = P\big(g(X) = y\big) = \sum_{x:g(x)=y} p_X(x)$

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΤΥΧΑΙΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

- Παράδειγμα

$$p_X(x) = \frac{1}{9}, \quad x = -4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4$$

$$Y = |X|$$

$$p_Y(0) = p_X(0) = \frac{1}{9}$$

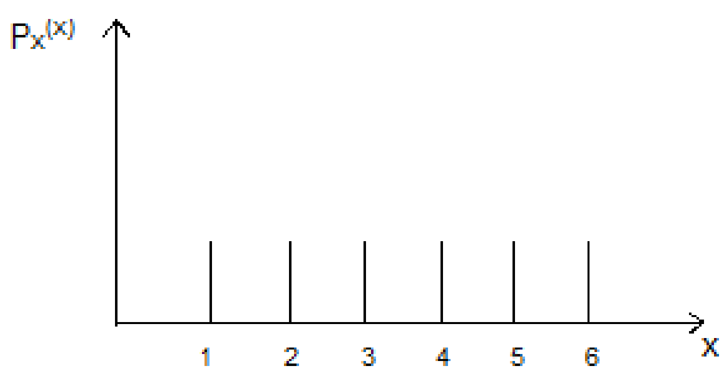
Για k=1,2,3,4, $p_Y(k) = p_X(k) + p_X(-k) = \frac{2}{9}$

ΜΕΣΗ ΤΙΜΗ

- Ορισμός: $E(X) = \sum_x x \cdot p_X(x)$
- Ερμηνείες
  - Μέσος όρος αποτελεσμάτων σε μεγάλο αριθμό επαναλήψεων του πειράματος
  - Κέντρο βάρους της συνάρτησης μάζας πιθανότητας
- Παράδειγμα

  X: αποτέλεσμα ρίψης ζαριού

  $p_X(x) = \frac{1}{6}, \quad x=1,2,3,4,5,6$



$$E(X) = (1+2+3+4+5+6) \cdot \frac{1}{6}$$

ΜΕΣΗ ΤΙΜΗ

- Λόγω συμμετρίας το κέντρο βάρους βρίσκεται στο μέσον του διαστήματος [1,6]: $\frac{1+6}{2}=3,5$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ

- X τυχαία μεταβλητή με γνωστή pmf, $Y = g\left(X\right)$
- $E\left(Y\right) = \sum_{y} y \cdot p_Y(y)$
  - Εύρεση $p_Y\left(y\right)$ δεν είναι απαραίτητη
  - $E\left(Y\right) = E\left(g\left(X\right)\right) = \sum_{x} g(x) \cdot p_X\left(x\right)$
- Παράδειγμα

  V: ταχύτητα (km/h), $P(V = 5) = 0,6$, $P(V = 30) = 0,4$

  T: χρόνος για απόσταση 2 km

  $$E\left(T\right) = E\left(\frac{2}{V}\right) = \frac{2}{5} \cdot 0,6 + \frac{2}{30} \cdot 0,4 = \frac{4}{15}$$

- Γενικά, $E\left(g\left(X\right)\right) \neq g\left(E\left(X\right)\right)$
  - Εξαίρεση: γραμμικές συναρτήσεις

    $$E\left(\alpha X + \beta\right) = \alpha E\left(X\right) + \beta$$

ΔΙΑΣΠΟΡΑ

- $\mathrm{var}(X) = E\left[\left[X - E(X)\right]^2\right]$
  - Μέτρο δικύμανσης των τιμών της X
- Ιδιότητες
  - $\mathrm{var}(X) \geq 0$
  - $\mathrm{var}(\alpha X + \beta) = \alpha^2 \,\mathrm{var}(X)$

    Η σταθερά β μετατοπίζει τις τιμές της τυχαίας μεταβλητής χωρίς να αλλάζει τη διακύμανσή τους
- Για ευκολότερο υπολογισμό

$$\mathrm{var}(X) = E\left(X^2\right) - \left[E(X)\right]^2$$

- Τυπική απόκλιση

$$\sigma_X = \sqrt{\mathrm{var}(X)}$$

ΔΙΑΣΠΟΡΑ

- Παράδειγμα

  X: αποτέλεσμα ρίψης ζαριού

  $$\mathrm{E}\left(\mathrm{X}\right)=\frac{7}{2}$$

  $$\mathrm{E}\left(\mathrm{X}^2\right)=\left(1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2\right)\cdot\frac{1}{6}=\frac{91}{6}$$

  $$\mathrm{var}\left(\mathrm{X}\right)=\frac{91}{6}-\left(\frac{7}{2}\right)^2=\frac{35}{12}$$

ΜΕΣΗ ΤΙΜΗ ΚΑΙ ΔΙΑΣΠΟΡΑ BERNOULLI, POISSON

- Bernoulli

$$p_X(0) = 1 - p,\ p_X(1) = p$$

$$E(X) = 0 \cdot (1 - p) + 1 \cdot p = p$$

$$E(X^2) = 0^2 \cdot (1 - p) + 1^2 \cdot p = p$$

$$\operatorname{var}(X) = p - p^2 = p \cdot (1-p)$$

- Poisson

$$p_X(k) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!},\ k = 0,1,2,\ldots$$

$$E(X) = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} = \lambda$$

$$E(X^2) = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \cdot e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} = \lambda \cdot (\lambda+1)$$

$$\operatorname{var}(X) = \lambda \cdot (\lambda+1) - \lambda^2 = \lambda$$

ΑΠΟ ΚΟΙΝΟΥ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΜΑΖΑΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ

- Ταυτόχρονη μελέτη δύο ή περισσότερων τυχαίων μεταβλητών
  - Για δύο τυχαίες μεταβλητές X, Y

    $$p_{X,Y}(x,y) = P(X = x \text{ και } Y = y)$$

  - $\sum_{x,y} p_{X,Y}(x,y) = 1$
  - $p_X(x) = P(X = x) = \sum_{y} P(X = x \text{ και } Y = y) = \sum_{y} p_{X,Y}(x,y)$
  - $p_Y(y) = \sum_{x} p_{X,Y}(x,y)$

ΑΠΟ ΚΟΙΝΟΥ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΜΑΖΑΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ

- Παράδειγμα

Y					
4	0	1/20	1/20	1/20	
3	1/20	2/20	3/20	1/20	
2	1/20	2/20	3/20	1/20	
1	1/20	1/20	1/20	0	
	1	2	3	4	X

$$p_X(2) = p_{X,Y}(2,1) + p_{X,Y}(2,2) + p_{X,Y}(2,3) + p_{X,Y}(2,4) = \frac{6}{20}$$

$$p_Y(4) = p_{X,Y}(1,4) + p_{X,Y}(2,4) + p_{X,Y}(3,4) + p_{X,Y}(4,4) = \frac{3}{20}$$

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΤΥΧΑΙΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

- $Z = g(X, Y)$
  - $p_Z(z) = P(g(X,Y) = z) = \sum_{(x,y):g(x,y)=z} p_{X,Y}(x,y)$
  - $E[g(X,Y)] = \sum_x \sum_y g(x,y) \cdot p_{X,Y}(x,y)$
  - Γενικά $E[g(X,Y)] \neq g(E(X), E(Y))$
  - Εξαίρεση: γραμμικές συναρτήσεις
    $E(\alpha X + \beta Y + \gamma) = \alpha E(X) + \beta E(Y) + \gamma$
- Παράδειγμα: $Z = X + 2Y$

Y \ X	1	2	3	4
4	0	1/20	1/20	1/20
3	1/20	2/20	3/20	1/20
2	1/20	2/20	3/20	1/20
1	1/20	1/20	1/20	0

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΤΥΧΑΙΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

(συνέχεια παραδείγματος)

$$\mathrm{E}(\mathrm{Z}) = \mathrm{E}(\mathrm{X}) + 2\mathrm{E}(\mathrm{Y})$$

$$p_X(1) = \frac{3}{20}, \quad p_X(2) = \frac{6}{20}, \quad p_X(3) = \frac{8}{20}, \quad p_X(4) = \frac{3}{20}$$

$$\mathrm{E}(\mathrm{X}) = 1 \cdot \frac{3}{20} + 2 \cdot \frac{6}{20} + 3 \cdot \frac{8}{20} + 4 \cdot \frac{3}{20} = 2{,}55$$

$$p_Y(1) = \frac{3}{20}, \quad p_Y(2) = \frac{7}{20}, \quad p_Y(3) = \frac{7}{20}, \quad p_Y(4) = \frac{3}{20}$$

$$\mathrm{E}(\mathrm{Y}) = 1 \cdot \frac{3}{20} + 2 \cdot \frac{7}{20} + 3 \cdot \frac{7}{20} + 4 \cdot \frac{3}{20} = 2{,}5$$

$$\mathrm{E}(\mathrm{Z}) = 2{,}55 + 2 \cdot 2{,}5 = 7{,}55$$

ΠΟΛΛΕΣ ΤΥΧΑΙΕΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ

- Γενίκευση για περισσότερες από δύο τυχαίες μεταβλητές
  - Για 3 τυχαίες μεταβλητές

$$p_{X,Y,Z}(x,y,z) = P(X = x \text{ και } Y = y \text{ και } Z = z)$$

$$p_{X,Y}(x,y) = \sum_{z} p_{X,Y,Z}(x,y,z)$$

$$p_{X}(x) = \sum_{y}\sum_{z} p_{X,Y,Z}(x,y,z)$$

$$E(g(X,Y,Z)) = \sum_{x}\sum_{y}\sum_{z} g(x,y,z)\cdot p_{X,Y,Z}(x,y,z)$$

- $E(\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \cdots + \alpha_n X_n) = \alpha_1 E(X_1) + \alpha_2 E(X_2) + \cdots + \alpha_n E(X_n)$
  - Μέση τιμή διατηρεί την γραμμικότητα της συνάρτησης

- Μέση τιμή διωνυμικής τυχαίας μεταβλητής

$$E(X) = \sum_{k=0}^{n} k \cdot \binom{n}{k} p^{k}(1-p)^{n-k}$$

Πιο εύκολα, $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$

– $X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ Bernoulli

$$E(X) = E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_n) = n \cdot p$$

ΔΕΣΜΕΥΜΕΝΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΜΑΖΑΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ

- Δέσμευση από γεγονός A

$$p_{X|A}(x) = P(X = x \mid A) = \frac{P(\{X = x\} \cap A)}{P(A)}$$

- Δέσμευση από άλλη τυχαία μεταβλητή

$$p_{X|Y}(x \mid y) = P(X = x \mid Y = y) = \frac{P(X = x \text{ και } Y = y)}{P(Y = y)} = \frac{p_{X,Y}(x,y)}{p_Y(y)}$$

- Πολλαπλασιαστικός κανόνας

$$p_{X,Y}(x,y) = p_Y(y) \cdot p_{X|Y}(x,y)$$

- Θεώρημα συνολικής πιθανότητας

$$p_X(x) = \sum_y p_{X,Y}(x,y) = \sum_y p_{X|Y}(x,y) \cdot p_Y(y)$$

ΔΕΣΜΕΥΜΕΝΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΜΑΖΑΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ

- Δεσμευμένη μέση τιμή

$$E(X|A) = \sum x \cdot p_{X|A}(x)$$

$$E(X|Y=y) = \sum_x x \cdot p_{X|Y}(x|y)$$

- Θεώρημα συνολικής μέσης τιμής
  - $A_1, A_2, \cdots, A_n$: διαμέριση δειγματικού χώρου

$$E(X) = \sum_i E(X|A_i) \cdot P(A_i)$$

  - $E(X) = \sum_y E(X|Y=y) \cdot p_Y(y)$

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΤΥΧΑΙΑ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗ

- Μέση τιμή
  - $E(X) = \sum_{x=1}^{\infty} x(1-p)^{x-1} p$
  - Με χρήση δεσμευμένων μέσων τιμών

$$E(X) = E(X \mid X=1) \cdot P(X=1) + E(X \mid X>1) \cdot P(X>1)$$

$$= 1 \cdot p + (1 + E(X)) \cdot (1-p) \Rightarrow E(X) = \frac{1}{p}$$

- Διασπορά

$$E(X^2) = E(X^2 \mid X=1) \cdot P(X=1) + E(X^2 \mid X>1) \cdot P(X>1)$$

$$= 1 \cdot p + E\left[(1+X)^2\right] \cdot (1-p) \Rightarrow E(X^2) = \frac{2}{p^2} - \frac{1}{p}$$

$$\operatorname{var}(X) = \frac{2}{p^2} - \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} = \frac{1-p}{p^2}$$

ΑΝΕΞΑΡΤΗΣΙΑ ΤΥΧΑΙΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

- Από κοινού συνάρτηση μάζας πιθανότητας ισούται με το γινόμενο των επιμέρους συναρτήσεων μάζας πιθανότητας
  - π.χ. X, Y, Z ανεξάρτητες αν
    $p_{X,Y,Z}(x, y, z) = p_X(x) \cdot p_Y(y) \cdot p_Z(z)$ για κάθε x, y, z

- Παράδειγμα

Y					
4	0	1/20	1/20	1/20	
3	1/20	2/20	3/20	1/20	
2	1/20	2/20	3/20	1/20	
1	1/20	1/20	1/20	0	
	1	2	3	4	X

- Είναι οι X, Y ανεξάρτητες;
  - Όχι: $p_{X,Y}(2,4) = \frac{1}{20} \neq p_X(2) \cdot p_Y(4) = \frac{18}{400}$
  - Εναλλακτικά, $p_{X|Y}(1|4) = 0 \neq p_X(1)$

ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΕΣ ΤΥΧΑΙΕΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ

- Αν X, Y ανεξάρτητες
  - $E(XY) = E(X) \cdot E(Y)$
  - $E\left[g(X)h(Y)\right] = E\left[g(X)\right] \cdot E\left[h(Y)\right]$
  - $\operatorname{var}(X+Y) = \operatorname{var}(X) + \operatorname{var}(Y)$
- Παράδειγμα

  X, Y ανεξάρτητες, $Z = X - 4Y$

  $$\operatorname{var}(Z) = \operatorname{var}(X) + \operatorname{var}(-4Y) = \operatorname{var}(X) + (-4)^2 \operatorname{var}(Y) = \operatorname{var}(X) + 16\operatorname{var}(Y)$$

- Γενίκευση: Αν $X_1, X_2, \cdots, X_n$ ανεξάρτητες

  $$\operatorname{var}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = \operatorname{var}(X_1) + \operatorname{var}(X_2) + \cdots + \operatorname{var}(X_n)$$

- Διασπορά διωνυμικής τυχαίας μεταβλητής

  $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$
  - $X_1, X_2, \cdots, X_n$ ανεξάρτητες Bernoulli

  $$\operatorname{var}(X) = \operatorname{var}(X_1) + \operatorname{var}(X_2) + \cdots + \operatorname{var}(X_n) = n \cdot p \cdot (1 - p)$$

ΣΥΝΔΙΑΣΠΟΡΑ

- $\mathrm{cov}(X,Y) = E\big[\big[X - E(X)\big]\cdot\big[Y - E(Y)\big]\big]$
  - Θετική: μεγάλες(μικρές) τιμές της X συνήθως αντιστοιχούν σε μεγάλες (μικρές) τιμές της Y
  - Αρνητική: μεγάλες(μικρές) τιμές της X συνήθως αντιστοιχούν σε μικρές(μεγάλες) τιμές της Y
  - Μηδενική: δεν υπάρχει τέτοιου είδους συσχέτιση, X, Y ασυσχέτιστες

- $\mathrm{cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$
  - X,Y ανεξάρτητες $\Rightarrow \mathrm{cov}(X,Y) = 0$

    (Το αντίθετο δεν ισχύει απαραίτητα)

- Παράδειγμα: $p_{X,Y}(1,0) = p_{X,Y}(0,1) = p_{X,Y}(-1,0) = p_{X,Y}(0,-1) = \frac{1}{4}$

$$\left.\begin{array}{l} XY = 0 \text{ πάντα} \Rightarrow E(XY) = 0 \\ E(X) = E(Y) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \mathrm{cov}(X,Y) = 0$$

X, Y δεν είναι ανεξάρτητες διότι

$X \neq 0 \Rightarrow Y = 0$ (X δίνει πληροφορία για το Y)

ΣΥΝΔΙΑΣΠΟΡΑ

- Διασπορά αθροίσματος τυχαίων μεταβλητών

$$\operatorname{var}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{var}(X_i) + \sum_{(i,j):\, i \neq j} \operatorname{cov}(X_i, X_j)$$

ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΣ ΣΥΣΧΕΤΙΣΗΣ

- Αδιάστατη μορφή της συνδιασποράς

$$\rho\left(X,Y\right)=\frac{\operatorname{cov}\left(X,Y\right)}{\sqrt{\operatorname{var}\left(X\right)\operatorname{var}\left(Y\right)}}$$

- $-1\leq\rho\leq1$
  - $\left|\rho\right|=1\Leftrightarrow Y=\alpha X+\beta$ (γραμμική σχέση)
  - $\rho=0$: X,Y ασυσχέτιστες

- Παράδειγμα: ρίψη νομίσματος n φορές

  X: αριθμός Κ, Y: αριθμός Γ

  $\rho\left(X,Y\right)=;$

  $X+Y=n\Rightarrow Y=n-X$ (γραμμική σχέση)

  Άρα $\rho\left(X,Y\right)=-1$ (αρνητική κλίση)