<u>*Στοιχεία από τη Γεωμετρία του χώρου*</u>

(αναλυτικά στο βιβλίο: Ευκλείδεια Γεωμετρία Α΄και Β Ενιαίου Λυκείου)

Σχήματα των οποίων τα σημεία δεν βρίσκονται όλα στο ίδιο επίπεδο ονομάζονται **γεωμετρικά στερεά** (π.χ. σφαίρα, κύλινδρος, κύβος, κ.λ.π.) και είναι το αντικείμενο της γεωμετρίας του χώρου. Ο χώρος αποτελείται από **σημεία**. Οι **ευθείες** και τα **επίπεδα** είναι σχηματισμοί σημείων και αποτελούν μαζί με τα σημεία <u>*πρωταρχικές έννοιες*</u>, οι οποίες δεν ορίζονται από άλλες.

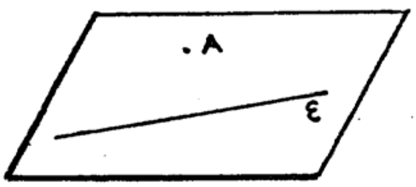
1. ΑΞΙΩΜΑΤΑ

(πέραν των αξιωμάτων της γεωμετρίας του επιπέδου)

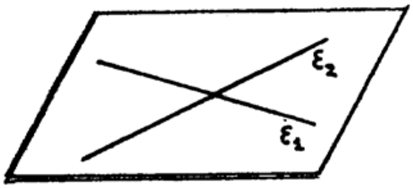
1. **Τρία σημεία που δεν είναι συνευθειακά ορίζουν ένα μοναδικό επίπεδο.**
2. **Σε κάθε επίπεδο υπάρχουν τουλάχιστον τρία σημεία μη συνευθειακά**
3. **Υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο που δεν ανήκει σε ένα δεδομένο επίπεδο.**
4. **Δύο σημεία ενός επιπέδου ορίζουν ευθεία τα σημεία της οποίας ανήκουν στο επίπεδο.**
5. **Κάθε επίπεδο χωρίζει τα σημεία του χώρου, που δεν ανήκουν σ' αυτό, σε δύο περιοχές ξένες μεταξύ τους.**
6. **Αν δύο διακεκριμένα επίπεδα έχουν ένα κοινό σημείο, τότε τέμνονται σε μία ευθεία, που περιέχει το σημείο.**

Συνέπειες:

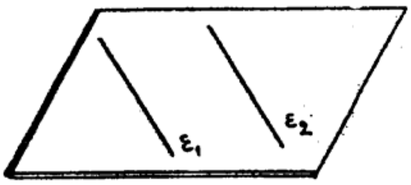
1. *Μία ευθεία ε και ένα σημείο Α που δεν ανήκει στην ευθεία ορίζουν ένα επίπεδο π=(ε ,Α) στο οποίο ανήκουν η ευθεία και το σημείο (σχ. 1).*
2. *Δύο τεμνόμενες ευθείες ορίζουν ένα επίπεδο π= (ε_1, ε_2) στο οποίο ανήκουν (σχ. 2).*
3. *Δύο παράλληλες ευθείες ορίζουν ένα επίπεδο π=(ε_1, ε_2) στο οποίο ανήκουν (σχ. 3).*



Σχ. 1



Σχ. 2

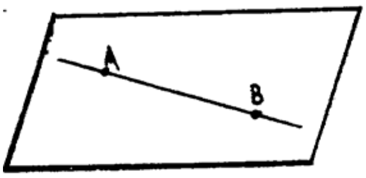


Σχ. 3

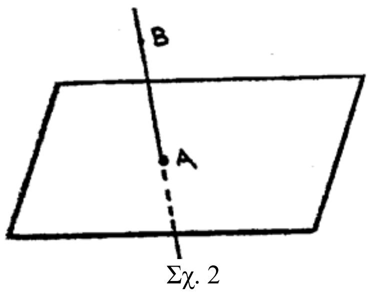
2. ΣΧΕΤΙΚΕΣ ΘΕΣΕΙΣ ΕΥΘΕΙΑΣ ΚΑΙ ΕΠΙΠΕΔΟΥ

1. *Μία ευθεία <u>ανήκει στο επίπεδο</u> αν έχει δύο κοινά σημεία με αυτό (αφού, από το αξίωμα 4, όλα τα σημεία της θα ανήκουν τότε στο επίπεδο) (σχ.1).*
2. *Η ευθεία που ορίζεται από δύο σημεία Β,Γ εκατέρωθεν ενός επιπέδου (αξίωμα 5) <u>τέμνει το επίπεδο</u> σε ένα μόνο σημείο Α (συνέπεια του αξιώματος 4) μεταξύ των Β και Γ. Το σημείο αυτό λέγεται **σημείο τομής** της ευθεία και του επιπέδου ή **ίχνος** της ευθείας με το επίπεδο (σχ. 2).*

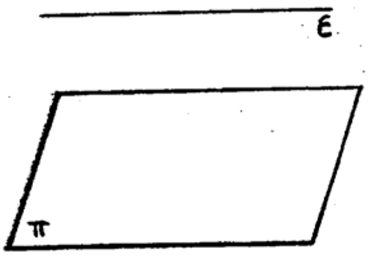
Ορισμός 2.1: *Μία ευθεία λέγεται **παράλληλη** σε ένα επίπεδο, αν η ευθεία και το επίπεδο δεν έχουν κοινό σημείο (σχ.3).*



Σχ. 1



Σχ. 2



Σχ. 3

1. *Αν μια ευθεία ε τέμνει ένα επίπεδο π, τότε δεν υπάρχει ευθεία του π παράλληλη στη ε.*
2. *Αν μια ευθεία ε΄είναι παράλληλη σε μια ευθεία ε ενός επιπέδου π και δεν ανήκει σε αυτό τότε είναι παράλληλη στο π.*
3. *Αν επίπεδο π τέμνει ευθεία ε τότε θα τέμνει κάθε ευθεία παράλληλη στην ε.*
4. *Αν δύο τεμνόμενες ευθείες ε και ε΄ είναι παράλληλες σε ένα επίπεδο π τότε και το επίπεδο (ε, ε ΄) είναι παράλληλο στο π.*

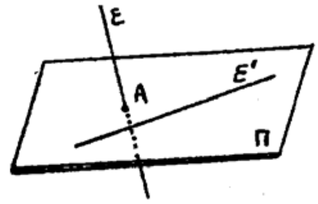
Συνέπειες:

1. *Από σημείο εκτός επιπέδου άγεται μοναδικό επίπεδο παράλληλο σε αυτό.*
2. *Δύο επίπεδα παράλληλα προς τρίτο είναι και μεταξύ τους παράλληλα.*
3. *Αν π και π ΄είναι δύο παράλληλα επίπεδα, τότε κάθε επίπεδο τ που τέμνει το ένα τέμνει και το άλλο και οι ευθείες τομής είναι παράλληλες μεταξύ τους*

3. ΣΧΕΤΙΚΕΣ ΘΕΣΕΙΣ ΔΥΟ ΕΥΘΕΙΩΝ

Θεώρημα 3.1: *Αν μια ευθεία ε ανήκει σε ένα επίπεδο π και ευθεία ε΄ τέμνει το π σε ένα σημείο Α εκτός της ε, τότε δεν υπάρχει επίπεδο που να περιέχει τις ε και ε΄.*

Ορισμός 3.2: Δύο ευθείες λέγονται **ασύμβατες,** αν δεν υπάρχει επίπεδο που να περιέχει και τις δύο (επομένως δεν έχουν κοινό σημείο και δεν είναι παράλληλες).



Άρα δύο διαφορετικές ευθείες του χώρου μπορεί να είναι:
1. **παράλληλες** ή **τεμνόμενες** (οπότε ανήκουν στο **ίδιο** επίπεδο), ή
2. **ασύμβατες.**

Πόρισμα 3.3: *Αν τρεις ευθείες τέμνονται ανά δύο τότε ανήκουν στο ίδιο επίπεδο ή διέρχονται από το ίδιο σημείο.*

4. ΣΧΕΤΙΚΕΣ ΘΕΣΕΙΣ ΔΥΟ ΕΠΙΠΕΔΩΝ

1. Τα επίπεδα ταυτίζονται (έχουν τουλάχιστον τρία μη συνευθειακά κοινά σημεία).
2. Τα επίπεδα τέμνονται κατά μία ευθεία.
3. Τα επίπεδα δεν έχουν κοινά σημεία (είναι **παράλληλα**).

Πόρισμα 4.1: *Αν τρία επίπεδα τέμνονται ανά δύο, τότε οι τομές τους διέρχονται από το ίδιο σημείο ή είναι παράλληλες.*

5. ΚΑΘΕΤΟΤΗΤΑ ΕΥΘΕΙΑΣ ΚΑΙ ΕΠΙΠΕΔΟΥ

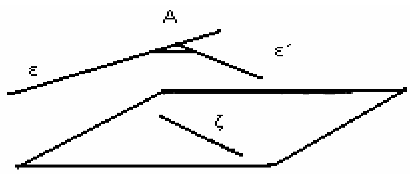
Ορισμός 5.1: Μια ευθεία ε λέγεται **κάθετη** σε ένα επίπεδο π, αν είναι κάθετη σε **κάθε** ευθεία του επιπέδου που διέρχεται από το ίχνος της (γράφουμε $\varepsilon \perp \pi$). Αν η ευθεία δεν είναι κάθετη, λέγεται **πλάγια**.

Θεώρημα 5.2. *Αν μία ευθεία είναι κάθετη σε δυο τεμνόμενες ευθείες ενός επιπέδου στο κοινό τους σημείο, τότε είναι κάθετη σε όλες τις ευθείες του επιπέδου που διέρχονται από το ίχνος της (και άρα είναι κάθετη στο επίπεδο π) (σχ. 1).*

<u>**Γωνία δύο ευθειών :**</u> Αν ε και ζ είναι δυο ευθείες του χώρου τότε:

I) Αν οι ευθείες είναι συνεπίπεδες η γωνία τους ορίζεται κατά τα γνωστά.

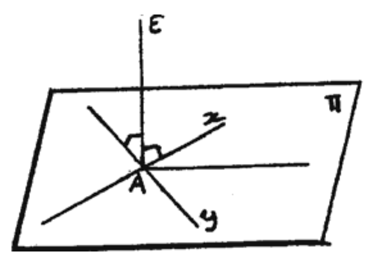
II) Αν οι ευθείες είναι ασύμβατες, από τυχαίο σημείο Α της ευθείας ε κατασκευάζουμε ευθεία ε΄ παράλληλη στην ζ. Οι ευθείες ε και ε΄ τέμνονται στο σημείο Α, άρα είναι συνεπίπεδες. Η γωνία που σχηματίζουν οι ευθείες ε και ε΄ λέγεται **γωνία των δύο ασύμβατων** ευθειών ε και ζ (η γωνία αυτή δεν εξαρτάται από το σημείο Α) (σχ. 3). Αν οι γωνία των ε και ζ είναι ορθή τότε οι ασύμβατες λέγονται **ορθογώνιες ή ασυμβάτως κάθετες.**



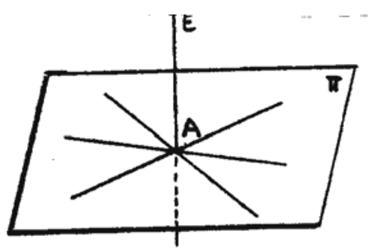
Σχ. 3

Θεώρημα 5.3. *Μία ευθεία ορθογώνια σε δύο τεμνόμενες ευθείες είναι κάθετη στο επίπεδο που αυτές ορίζουν.*
Θεώρημα 5.4. *Υπάρχει μοναδικό επίπεδο, που διέρχεται από σημείο Ο και είναι κάθετο σε ευθεία ε (δηλαδή από ένα σημείο Ο εκτός ευθείας ε άγεται ένα και μόνο επίπεδο κάθετο στην ευθεία) .*

Πρόταση 5.5. *Ο γεωμετρικός τόπος των ευθειών που είναι κάθετες σε μια ευθεία ε σε ένα σημείο Α είναι ένα επίπεδο κάθετο στην ε στο Α. (σχ. 2)*
Πόρισμα 5.6: Δύο επίπεδα κάθετα στην ίδια ευθεία είναι παράλληλα μεταξύ τους.
Πόρισμα 5.7: Δύο ευθείες κάθετες στο ίδιο επίπεδο είναι παράλληλες.



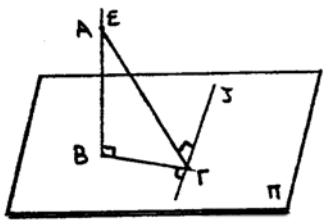
Σχ. 1



Σχ. 2

Θεώρημα 5.8:(τριών καθέτων): *Έστω ευθεία ε που τέμνει ένα επίπεδο π στο Β και ένα σημείο Α της ε . Αν ζ είναι μια ευθεία του π η οποία δεν διέρχεται από το Β και έστω Γ ένα σημείο της ζ , τότε ισχύουν: (Σχ. 4)*

1. *Αν* $AB \perp \pi$ *και* $B\Gamma \perp \zeta$, *τότε* $A\Gamma \perp \zeta$.
2. *Αν* $AB \perp \pi$ *και* $A\Gamma \perp \zeta$, *τότε* $B\Gamma \perp \zeta$.
3. *Αν* $A\Gamma \perp \zeta$ *και* $B\Gamma \perp \zeta$, $AB \perp B\Gamma$, *τότε* $AB \perp \pi$.

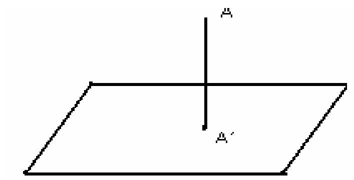


Σχ. 4

Πόρισμα 5.9: *Από ένα σημείο του χώρου διέρχεται ακριβώς μια ευθεία κάθετη σε ένα δεδομένο επίπεδο.*

6. ΑΠΟΣΤΑΣΗ ΣΗΜΕΙΟΥ ΑΠΟ ΕΠΙΠΕΔΟ. ΑΠΟΣΤΑΣΗ ΠΑΡΑΛΛΗΛΩΝ ΕΠΙΠΕΔΩΝ.

Αν Α είναι ένα σημείο εκτός ενός επιπέδου π, ορίζουμε ως **προβολή του Α στο επίπεδο** π το σημείο τομής Α΄του π με την κάθετη ευθεία από το Α στο π. Η προβολή ενός σχήματος του χώρου στο π είναι το σύνολο των προβολών των σημείων του σχήματος στο π.



Αποδεικνύεται ότι η προβολή μιας ευθείας σε ένα επίπεδο, που δεν είναι κάθετη σ΄αυτό, είναι ευθεία. Αν η ευθεία είναι κάθετη στο επίπεδο τότε η προβολή της σ΄αυτό είναι ένα σημείο, το ίχνος της.
Απόσταση του σημείου Α από το επίπεδο π λέγεται το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος ΑΑ΄, όπου Α΄η προβολή του Α στο επίπεδο π.
Απόσταση δύο παράλληλων επιπέδων λέγεται η απόσταση ενός σημείου του ενός από το άλλο.
Απόσταση δύο ασύμβατων ευθειών λέγεται το μήκος του τμήματος της κοινής καθέτου που περιλαμβάνεται μεταξύ τους.

Πόρισμα 6.1: *Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του χώρου που ισαπέχουν από δύο σημεία Α και Β είναι το επίπεδο π που είναι κάθετο στο ΑΒ στο μέσο του (**μεσοκάθετο επίπεδο**) .*
Πόρισμα 6.2: *Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του χώρου που ισαπέχουν από τις κορυφές ενός τριγώνου είναι η κάθετη ευθεία στο επίπεδο του τριγώνου που διέρχεται από το σημείο τομής των μεσοκαθέτων των πλευρών του.*

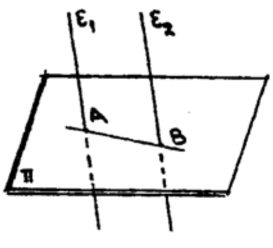
7. ΠΑΡΑΛΛΗΛΕΣ ΕΥΘΕΙΕΣ

***Πρόταση** 7. 1:* *Αν ένα επίπεδο τέμνει μια από δύο παράλληλες ευθείες, τότε τέμνει και την άλλη (σχ. 1).*
***Πρόταση** 7.2:* *Αν δύο διαφορετικές ευθείες είναι κάθετες σε ένα επίπεδο, τότε είναι παράλληλες. (σχ. 2 (βλέπε και πόρισμα 5.7).*

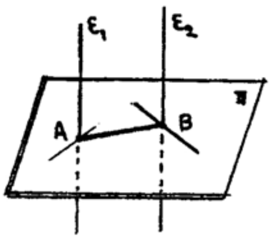
***Πρόταση** 7.3:* *Αν μια ευθεία διέρχεται από ένα σημείο που δεν ανήκει σε ένα επίπεδο είναι παράλληλη προς μια ευθεία του επιπέδου, τότε είναι παράλληλη προς το επίπεδο αυτό (σχ. 3).*

***Πρόταση** 7.4:* *Αν μια ευθεία ε είναι παράλληλη προς ένα επίπεδο, τότε κάθε ευθεία που διέρχεται από ένα σημείο του επιπέδου και είναι παράλληλη προς την ε περιέχεται στο επίπεδο (σχ. 4).*

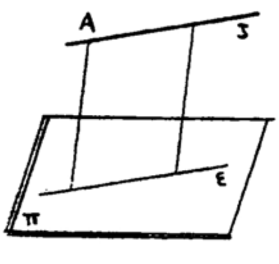
***Πρόταση** 7.5:* *Αν μια ευθεία είναι παράλληλη προς δύο τεμνόμενα επίπεδα τότε είναι παράλληλη προς την τομή τους (σχ. 5).*



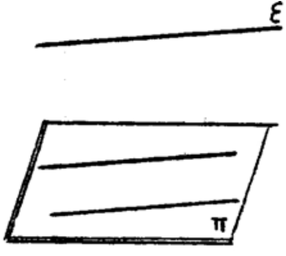
Σχ. 1



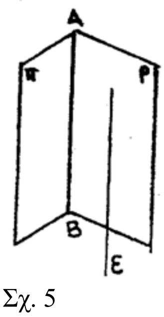
Σχ. 2



Σχ. 3



Σχ. 4



Σχ. 5

Πορισμα 7.6:

1. *Από κάθε σημείο του χώρου, που δεν ανήκει σε καμιά από τις δύο ασύμβατες ευθείες διέρχεται ένα μόνο επίπεδο παράλληλο προς αυτές.*
2. *Δίνονται δύο ασύμβατες ευθείες. Από καθεμιά διέρχεται μόνο ένα μόνο επίπεδο παράλληλο προς την άλλη.*

8. ΠΑΡΑΛΛΗΛΑ ΕΠΙΠΕΔΑ

Πρόταση 8.1: *Δυο επίπεδα κάθετα στην ίδια ευθεία σε διαφορετικά σημεία της είναι παράλληλα (βλέπε και πόρισμα 5.6).*

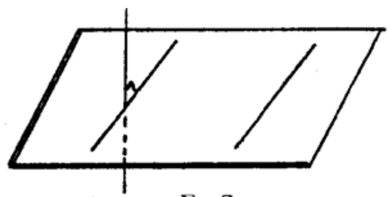
Πρόταση 8.2: *Αν μια ευθεία τέμνει ένα επίπεδο τότε τέμνει και κάθε άλλο επίπεδο ρ παράλληλο προς το π.*
Πρόταση 8.3: *Αν δύο τεμνόμενες ευθείες είναι παράλληλες προς ένα επίπεδο π, τότε και το επίπεδο που ορίζουν είναι παράλληλο προς το π.*

9. ΓΩΝΙΕΣ

Α). <u>Γωνία δύο ευθειών :</u> (Βλέπε Παράγραφο 5)

Β). <u>Γωνία ευθείας και επιπέδου:</u> Είναι η γωνία που σχηματίζεται από την ευθεία και την προβολή της στο επίπεδο, αν η ευθεία δεν είναι κάθετη στο επίπεδο. Αν η ευθεία είναι κάθετη στο επίπεδο ως γωνία ορίζεται η ορθή

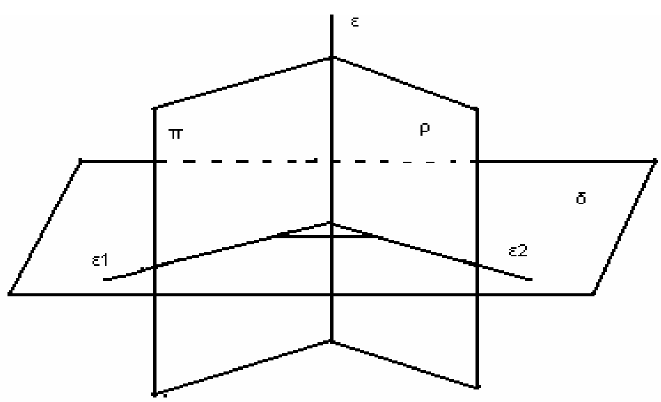
Θεώρημα 9.1: *Αν μια ευθεία ε είναι κάθετη σε ένα επίπεδο τότε είναι ορθογώνια προς κάθε ευθεία του επιπέδου (σχ. 2).*
Θεώρημα 9.1: *Η γωνία που σχηματίζει μια ευθεία ε, η οποία τέμνει ένα επίπεδο π, με την προβολή της ε΄, είναι η μικρότερη από τις γωνίες που σχηματίζει με κάθε άλλη ευθεία του επιπέδου, που την τέμνει.*



Σχ. 2

Γ). <u>Γωνία δυο επιπέδων.</u> Θεωρούμε δύο ημιεπίπεδα π και ρ που τέμνονται κατά την ευθεία ε. Το σχήμα λέγεται **δίεδρη γωνία** με ακμή ε και συμβολίζεται με ε(π,ρ) (σχ. 3). Τα επίπεδα λέγονται **έδρες** της δίεδρης γωνίας και η αρχική ευθεία ε λέγεται **ακμή** της δίεδρης γωνίας.
Η δίεδρη γωνία χωρίζει το χώρο σε κυρτό (κυρτή δίεδρη γωνία) και μη κυρτό μέρος (μη κυρτή δίεδρη γωνία) (για λεπτομέρειες βλέπε στο σχολικό βιβλίο).

Θεωρούμε ένα επίπεδο δ κάθετο στην ακμή ε και τις τομές ε_1 και ε_2 του δ με τα π και ρ. Οι ημιευθείες ε_1 και ε_2 ορίζουν στο επίπεδο δ μια κυρτή και μια μη κυρτή γωνία, οι οποίες ονομάζονται **αντίστοιχες επίπεδες γωνίες** της κυρτής και μη κυρτής δίεδρης γωνίας. Το μέτρο της αντίστοιχης επίπεδης γωνίας λέγεται μέτρο της δίεδρης γωνίας. Συνήθως ως «δίεδρη γωνία» θεωρούμε την κυρτή.
Δίεδρη γωνία δύο τεμνομένων επιπέδων λέγεται η μικρότερη ή ίση της ορθής δίεδρη γωνία που σχηματίζουν τα δύο επίπεδα.
Γωνία δύο επιπέδων λέγεται η αντίστοιχη επίπεδη της δίεδρης των δύο επιπέδων.



Σχ. 3

Αν η γωνία δύο επιπέδων είναι ορθή τα επίπεδα λέγονται **κάθετα**.

Θεώρημα 9.1: *Αν μία ευθεία ε είναι κάθετη σε ένα επίπεδο π, τότε κάθε επίπεδο που περιέχει την ε είναι κάθετο στο π.*
Θεώρημα 9.2: *Αν δύο επίπεδα είναι κάθετα, κάθε ευθέα του ενός που είναι κάθετη στην τομή τους είναι κάθετη στο άλλο.*

Ασκήσεις:

1. <u>Κοινή κάθετη ασύμβατων ευθειών</u>

Έστω ε_1 ε_2 δύο ασύμβατες ευθείες. Να αποδειχθεί ότι:

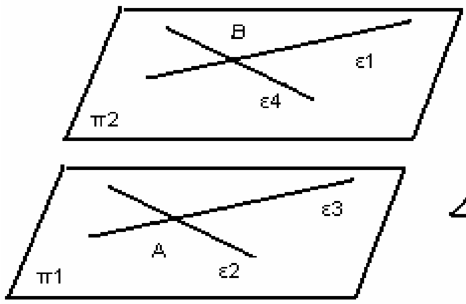
a. Υπάρχουν δύο επίπεδα, ένα που περιέχει την ε_1 και ένα που περιέχει την ε_2, τα οποία είναι παράλληλα.

b. Υπάρχει ακριβώς μία ευθεία που είναι κάθετη στις ε_1 και ε_2 (**κοινή κάθετη**) και το τμήμα της κοινής κάθετης μεταξύ των ε_1 και ε_2 είναι το μικρότερο από κάθε άλλο τμήμα με άκρα στις ευθείες αυτές.

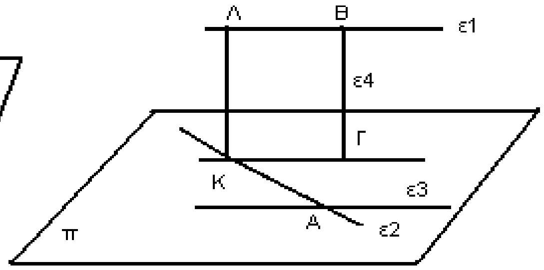
Απόδειξη:

a. Από τυχόν σημείο Α (σχ. 1) της ε_2 φέρουμε την ευθεία ε_3 παράλληλη προς την ε_1. Αν $\pi_1 = (\varepsilon_2, \varepsilon_3)$, τότε $\pi_1 // \varepsilon_1$. Με όμοια κατασκευή φέρουμε από σημείο Β της ευθείας ε_1 μια ευθεία $\varepsilon_4 // \varepsilon_2$ και έστω $\pi_2 = (\varepsilon_1, \varepsilon_4)$. Τότε $\pi_2 // \varepsilon_2$. επίπεδο που περιέχει την ε_1 και είναι παράλληλο στην ε_2. Τα επίπεδα π_1, π_2 είναι παράλληλα και ανεξάρτητα των τυχαίων σημείων Α και Β που επιλέχθηκαν.

b. Έστω $\pi = (\varepsilon_2, \varepsilon_3)$ το επίπεδο (σχ. 2) που περιέχει την ε_2 και είναι παράλληλο προς την ε_1 όπως πριν. Από τυχόν



Σχ. 1



Σχ. 2

σημείο Β της ε_1 φέρουμε ευθεία ε_4 κάθετη στο π. Έστω Γ το ίχνος της. Από το σημείο Γ φέρουμε ευθεία παράλληλη προς την ευθεία ε_3 που τέμνει την ε_2 στο σημείο Κ. Από το σημείο Κ φέρουμε παράλληλη προς την ε_4 που τέμνει την ε_1 στο σημείο Λ. Αποδεικνύεται ότι τα σημεία Κ και Λ είναι μοναδικά καθορισμένα και ανεξάρτητα από την τυχαία επιλογή των σημείων Α και Β και ότι το ευθύγραμμο τμήμα ΚΛ είναι κάθετο στα επίπεδα π_1, π_2 (άρα στις ε_1 και ε_2) και άρα έχει το μικρότερο μήκος από όλα τα άλλα ευθύγραμμα τμήματα με άκρα στις ε_1 και ε_2.

2. Να κατασκευασθεί ευθεία που να τέμνει δύο ασύμβατες ευθείες ε_1 και ε_2 και να διέρχεται από δεδομένο σημείο Ο.

Λύση: Έστω π_1=(ε_1,Ο) και π_2=(ε_2,Ο). Τότε τα π_1 και π_2 τέμνονται κατά μία ευθεία ε (Αξίωμα 6). Αν υπάρχει η ζητούμενη ευθεία τότε αυτή περιέχει το Ο και σημείο της ε_1, άρα ανήκει στο π_1. Όμοια ανήκει στο π_2. Άρα θα είναι η τομή ε των π_1 και π_2. Αν $\varepsilon // \varepsilon_1$ ή $\varepsilon // \varepsilon_2$, τότε το πρόβλημα δεν έχει λύση.

3. Αν μια ευθεία ε τέμνει πλάγια επίπεδο π στο σημείο Α, να αποδειχθεί ότι υπάρχει ακριβώς μια ευθεία του π που διέρχεται οπό το Α και είναι κάθετη στην ε.

Λύση: Αν υπάρχει τέτοια ευθεία, αυτή θα είναι μοναδική διότι αν υπήρχαν δύο, από το θεώρημα 5.2, θα ήταν κάθετη στο π. Αν Β σημείο της ε που δεν ανήκει στο π και ΒΓ είναι η κάθετη από το Β στο π, τότε η ζητούμενη ευθεία είναι η ευθεία του π που διέρχεται από το Α και είναι κάθετη στην ΑΓ (Θεώρημα τριών καθέτων).