Διαφορικές Εξισώσεις

Εξαναγκασμένες ταλαντώσεις, Ιδιοτιμές με πολλαπλότητα, Ατελείς ιδιοτιμές Εκθετικά πινάκων

Μανόλης Βάβαλης

Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών & Μηχανικών Υπολογιστών
Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

28 Μαρτίου 2015, Βόλος

Εξαναγκασμένες Ταλαντώσεις

$$\vec{x}'' = A\vec{x} + \vec{F}\cos\omega t. \tag{1}$$

Εξαναγκασμένες Ταλαντώσεις

$$\vec{x}'' = A\vec{x} + \vec{F}\cos\omega t. \tag{1}$$

Μαντεψιά

$$\vec{x}_p = \vec{c}\cos\omega t,$$

Εξαναγκασμένες Ταλαντώσεις

$$\vec{x}'' = A\vec{x} + \vec{F}\cos\omega t. \tag{1}$$

Μαντεψιά

$$\vec{x}_p = \vec{c}\cos\omega t,$$

$$\vec{x}_p{}'' = -\omega^2\vec{c}\cos\omega t.$$

Εξαναγκασμένες Ταλαντώσεις

$$\vec{x}'' = A\vec{x} + \vec{F}\cos\omega t. \tag{1}$$

Μαντεψιά

$$\vec{x}_p = \vec{c}\cos\omega t,$$

$$\vec{x}_p{}'' = -\omega^2\vec{c}\cos\omega t.$$

$$-\omega^2\vec{c}\cos\omega t = A\vec{c}\cos\omega t + \vec{F}\cos\omega t$$

Εξαναγκασμένες Ταλαντώσεις

$$\vec{x}'' = A\vec{x} + \vec{F}\cos\omega t. \tag{1}$$

Μαντεψιά

$$\vec{x}_p = \vec{c}\cos\omega t,$$

$$\vec{x}_p{}'' = -\omega^2\vec{c}\cos\omega t.$$

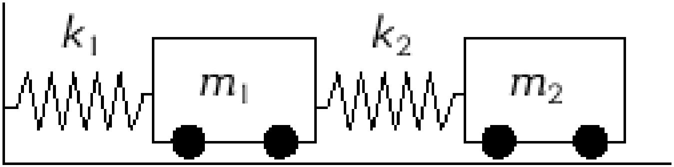
$$-\omega^2\vec{c}\cos\omega t = A\vec{c}\cos\omega t + \vec{F}\cos\omega t$$

$$(A + \omega^2 I)\vec{c} = -\vec{F}.$$

Οπότε

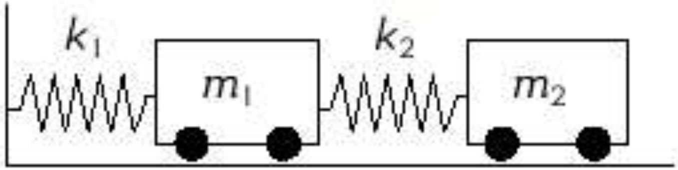
$$\vec{c} = (A + \omega^2 I)^{-1}(-\vec{F}).$$

Παράδειγμα



$m_1 = 2$, $m_2 = 1$, $k_1 = 4$, και $k_2 = 2$

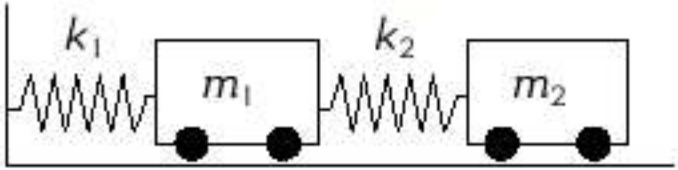
Παράδειγμα



$m_1 = 2$, $m_2 = 1$, $k_1 = 4$, και $k_2 = 2$

$$\vec{x}'' = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \vec{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \cos 3t.$$

Παράδειγμα

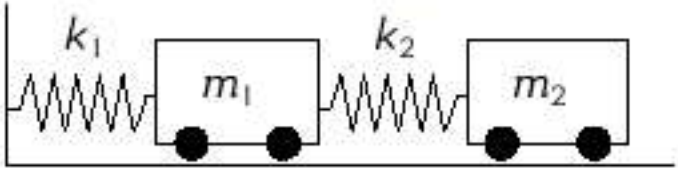


$m_1 = 2$, $m_2 = 1$, $k_1 = 4$, και $k_2 = 2$

$$\vec{x}'' = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \vec{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \cos 3t.$$

$$\vec{x}_c = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} (\alpha_1 \cos t + b_1 \sin t) + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} (\alpha_2 \cos 2t + b_2 \sin 2t).$$

Παράδειγμα



$m_1 = 2$, $m_2 = 1$, $k_1 = 4$, και $k_2 = 2$

$$\vec{x}'' = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \vec{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \cos 3t.$$

$$\vec{x}_c = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} (\alpha_1 \cos t + b_1 \sin t) + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} (\alpha_2 \cos 2t + b_2 \sin 2t).$$

$$(A + \omega^2 I)\vec{c} = -\vec{F}$$

Δηλαδή

$$\left(\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} + 3^2 I \right) \vec{c} = \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} \vec{c} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{c} = \begin{bmatrix} \frac{1}{20} \\ \frac{-3}{10} \end{bmatrix}.$$

Παράδειγμα (η λύση)

Η γενική λύση της εξίσωσης

$$\vec{x}'' = A\vec{x} + \vec{F}\cos\omega t$$

Παράδειγμα (η λύση)

Η γενική λύση της εξίσωσης

$$\vec{x}'' = A\vec{x} + \vec{F}\cos\omega t$$

$$\vec{x} = \vec{x}_c + \vec{x}_p =$$

Παράδειγμα (η λύση)

Η γενική λύση της εξίσωσης

$$\vec{x}'' = A\vec{x} + \vec{F}\cos\omega t$$

$$\vec{x} = \vec{x}_c + \vec{x}_p =$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} (\alpha_1 \cos t + b_1 \sin t) + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} (\alpha_2 \cos 2t + b_2 \sin 2t) + \begin{bmatrix} \frac{1}{20} \\ \frac{-3}{10} \end{bmatrix} \cos 3t.$$

Πολλαπλότητες

Παράδειγμα

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Πολλαπλότητες

Παράδειγμα

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

ιδιοτιμή 3 με

Πολλαπλότητες

Παράδειγμα

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

ιδιοτιμή 3 με

- *αλγεβρική πολλαπλότητα* 2

Πολλαπλότητες

Παράδειγμα

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

ιδιοτιμή 3 με

- *αλγεβρική πολλαπλότητα* 2
- *γεωμετρική πολλαπλότητα* 2 επειδή υπάρχουν δύο γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα της ιδιοτιμής αυτής

Πολλαπλότητες

Παράδειγμα

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

ιδιοτιμή 3 με

- *αλγεβρική πολλαπλότητα* 2
- *γεωμετρική πολλαπλότητα* 2 επειδή υπάρχουν δύο γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα της ιδιοτιμής αυτής (τα $\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right]$ και $\left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right]$).

Πολλαπλότητες

Παράδειγμα

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

ιδιοτιμή 3 με

- *αλγεβρική πολλαπλότητα* 2
- *γεωμετρική πολλαπλότητα* 2 επειδή υπάρχουν δύο γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα της ιδιοτιμής αυτής (τα $\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right]$ και $\left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right]$).

Το $\vec{x}' = A\vec{x}$ έχει την εξής γενική λύση

$$\vec{x} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{3t} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{3t}.$$

Θεώρημα - Λύσεις με αρνητικές ιδιοτιμές

Έστω ο $n \times n$ πίνακας A ο οποίος έχει n διαφορετικές μεταξύ τους αρνητικές ιδιοτιμές $(-\omega_1^2 > -\omega_2^2 > \cdots > -\omega_n^2)$, με αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$. Αν ο A είναι αντιστρέψιμος (οπότε και έχουμε ότι $\omega_1 > 0$), τότε

$$\boxed{\vec{x}(t) = \sum_{i=1}^{n} \vec{v}_i(\alpha_i \cos \omega_i t + b_i \sin \omega_i t),}$$

είναι η γενική λύση του

$$\vec{x}'' = A\vec{x},$$

Θεώρημα - Λύσεις με αρνητικές ιδιοτιμές

Έστω ο $n \times n$ πίνακας A ο οποίος έχει n διαφορετικές μεταξύ τους αρνητικές ιδιοτιμές $(-\omega_1^2 > -\omega_2^2 > \cdots > -\omega_n^2)$, με αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$. Αν ο A είναι αντιστρέψιμος (οπότε και έχουμε ότι $\omega_1 > 0$), τότε

$$\boxed{\vec{x}(t) = \sum_{i=1}^{n} \vec{v}_i(\alpha_i \cos \omega_i t + b_i \sin \omega_i t),}$$

είναι η γενική λύση του

$$\vec{x}'' = A\vec{x},$$

Αν ο A έχει μια μηδενική ιδιοτιμή, $(\omega_1 = 0)$, ενώ όλες οι άλλες ιδιοτιμές είναι αρνητικές και διαφορετικές μεταξύ τους τότε η γενική λύση είναι

$$\boxed{\vec{x}(t) = \vec{v}_1(\alpha_1 + b_1 t) + \sum_{i=2}^{n} \vec{v}_i(\alpha_i \cos \omega_i t + b_i \sin \omega_i t).}$$

Θεώρημα - Λύσεις με πολλαπλότητα

Έστω $\vec{x}' = P\vec{x}$. Αν P είναι ένα $n \times n$ πίνακας ο οποίος έχει τις εξής n πραγματικές ιδιοτιμές (οι οποίες δεν είναι απαραίτητα διαφορετικές μεταξύ τους), $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, και αν σε αυτές αντιστοιχούν τα εξής n γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$, τότε η γενική λύση του συστήματος ΣΔΕ μπορεί να γραφθεί ως εξής

$$\vec{x} = c_1\vec{v}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2\vec{v}_2 e^{\lambda_2 t} + \cdots + c_n\vec{v}_n e^{\lambda_n t}.$$

Θεώρημα - Λύσεις με αρνητικές ιδιοτιμές

Έστω ο $n \times n$ πίνακας A ο οποίος έχει n διαφορετικές μεταξύ τους αρνητικές ιδιοτιμές $(-\omega_1^2 > -\omega_2^2 > \cdots > -\omega_n^2)$, με αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$. Αν ο A είναι αντιστρέψιμος (οπότε και έχουμε ότι $\omega_1 > 0$), τότε

$$\boxed{\vec{x}(t) = \sum_{i=1}^{n} \vec{v}_i(\alpha_i \cos \omega_i t + b_i \sin \omega_i t),}$$

είναι η γενική λύση του

$$\vec{x}'' = A\vec{x},$$

Θεώρημα - Λύσεις με αρνητικές ιδιοτιμές

Έστω ο $n \times n$ πίνακας A ο οποίος έχει n διαφορετικές μεταξύ τους αρνητικές ιδιοτιμές $(-\omega_1^2 > -\omega_2^2 > \cdots > -\omega_n^2)$, με αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$. Αν ο A είναι αντιστρέψιμος (οπότε και έχουμε ότι $\omega_1 > 0$), τότε

$$\boxed{\vec{x}(t) = \sum_{i=1}^{n} \vec{v}_i(\alpha_i \cos \omega_i t + b_i \sin \omega_i t),}$$

είναι η γενική λύση του

$$\vec{x}'' = A\vec{x},$$

Αν ο A έχει μια μηδενική ιδιοτιμή, $(\omega_1 = 0)$, ενώ όλες οι άλλες ιδιοτιμές είναι αρνητικές και διαφορετικές μεταξύ τους τότε η γενική λύση είναι

$$\boxed{\vec{x}(t) = \vec{v}_1(\alpha_1 + b_1 t) + \sum_{i=2}^{n} \vec{v}_i(\alpha_i \cos \omega_i t + b_i \sin \omega_i t).}$$

Ατελείς ιδιοτιμές

ατελής ιδιοτιμή κάθε ιδιοτιμή με αλγεβρική πολλαπλότητα μεγαλύτερη από την γεωμετρική.

Ατελείς ιδιοτιμές

ατελής ιδιοτιμή κάθε ιδιοτιμή με αλγεβρική πολλαπλότητα μεγαλύτερη από την γεωμετρική.
Παράδειγμα

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Ατελείς ιδιοτιμές

ατελής ιδιοτιμή κάθε ιδιοτιμή με αλγεβρική πολλαπλότητα μεγαλύτερη από την γεωμετρική.
Παράδειγμα

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \vec{0}.$$

Ατελείς ιδιοτιμές

ατελής ιδιοτιμή κάθε ιδιοτιμή με αλγεβρική πολλαπλότητα μεγαλύτερη από την γεωμετρική.
Παράδειγμα

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \vec{0}.$$

$\left[\begin{smallmatrix} v_1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right]$.

Γενικευμένα ιδιοδιανύσματα

$\vec{x}' = A\vec{x}, \quad A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

Γενικευμένα ιδιοδιανύσματα

$\vec{x}\,' = A\vec{x}$, $\quad A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ $\lambda = 3$ (αλγεβρικής) πολλαπλότητας 2 και ατέλεια 1 με ιδιοδιάνυσμα $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

Γενικευμένα ιδιοδιανύσματα

$\vec{x}' = A\vec{x}, \quad A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ $\lambda = 3$ (αλγεβρικής) πολλαπλότητας 2 και ατέλεια 1 με ιδιοδιάνυσμα $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

Μία λύση

$$\vec{x}_1 = \vec{v}_1 e^{3t}.$$

Άλλη λύση

$$\vec{x}_2 = (\vec{v}_2 + \vec{v}_1 t) e^{3t}.$$

Γενικευμένα ιδιοδιανύσματα

$\vec{x}' = A\vec{x}$, $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ $\lambda = 3$ (αλγεβρικής) πολλαπλότητας 2 και ατέλεια 1 με ιδιοδιάνυσμα $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

Μία λύση

$$\vec{x}_1 = \vec{v}_1 e^{3t}.$$

Άλλη λύση

$$\vec{x}_2 = (\vec{v}_2 + \vec{v}_1 t) e^{3t}.$$

$$\vec{x}_2{}' = \vec{v}_1 e^{3t} + 3(\vec{v}_2 + \vec{v}_1 t) e^{3t} = (3\vec{v}_2 + \vec{v}_1) e^{3t} + 3\vec{v}_1 t e^{3t}.$$

Γενικευμένα ιδιοδιανύσματα

$\vec{x}' = A\vec{x}, \quad A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ $\lambda = 3$ (αλγεβρικής) πολλαπλότητας 2 και ατέλεια 1 με ιδιοδιάνυσμα $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$
Μία λύση

$$\vec{x}_1 = \vec{v}_1 e^{3t}.$$

Άλλη λύση

$$\vec{x}_2 = (\vec{v}_2 + \vec{v}_1 t) e^{3t}.$$

$$\vec{x}_2{}' = \vec{v}_1 e^{3t} + 3(\vec{v}_2 + \vec{v}_1 t) e^{3t} = (3\vec{v}_2 + \vec{v}_1) e^{3t} + 3\vec{v}_1 t e^{3t}.$$

$$A\vec{x}_2 = A(\vec{v}_2 + \vec{v}_1 t) e^{3t} = A\vec{v}_2 e^{3t} + A\vec{v}_1 t e^{3t}.$$

Γενικευμένα ιδιοδιανύσματα

$\vec{x}' = A\vec{x}$, $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ $\lambda = 3$ (αλγεβρικής) πολλαπλότητας 2 και ατέλεια 1 με ιδιοδιάνυσμα $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$
Μία λύση

$$\vec{x}_1 = \vec{v}_1 e^{3t}.$$

Άλλη λύση

$$\vec{x}_2 = (\vec{v}_2 + \vec{v}_1 t) e^{3t}.$$

$$\vec{x}_2{}' = \vec{v}_1 e^{3t} + 3(\vec{v}_2 + \vec{v}_1 t) e^{3t} = (3\vec{v}_2 + \vec{v}_1) e^{3t} + 3\vec{v}_1 t e^{3t}.$$

$$A\vec{x}_2 = A(\vec{v}_2 + \vec{v}_1 t) e^{3t} = A\vec{v}_2 e^{3t} + A\vec{v}_1 t e^{3t}.$$

$3\vec{v}_2 + \vec{v}_1 = A\vec{v}_2$ και $3\vec{v}_1 = A\vec{v}_1$.

Γενικευμένα ιδιοδιανύσματα

$\vec{x}' = A\vec{x}$, $\quad A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ $\lambda = 3$ (αλγεβρικής) πολλαπλότητας 2 και ατέλεια 1 με ιδιοδιάνυσμα $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

Μία λύση

$$\vec{x}_1 = \vec{v}_1 e^{3t}.$$

Άλλη λύση

$$\vec{x}_2 = (\vec{v}_2 + \vec{v}_1 t) e^{3t}.$$

$$\vec{x}_2{}' = \vec{v}_1 e^{3t} + 3(\vec{v}_2 + \vec{v}_1 t) e^{3t} = (3\vec{v}_2 + \vec{v}_1) e^{3t} + 3\vec{v}_1 t e^{3t}.$$

$$A\vec{x}_2 = A(\vec{v}_2 + \vec{v}_1 t) e^{3t} = A\vec{v}_2 e^{3t} + A\vec{v}_1 t e^{3t}.$$

$3\vec{v}_2 + \vec{v}_1 = A\vec{v}_2$ και $3\vec{v}_1 = A\vec{v}_1$.

$$(A - 3I)\vec{v}_1 = \vec{0}, \qquad \text{και} \qquad (A - 3I)\vec{v}_2 = \vec{v}_1.$$

Γενικευμένα ιδιοδιανύσματα

$\vec{x}' = A\vec{x}$, $A = \left[\begin{smallmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{smallmatrix}\right]$ $\lambda = 3$ (αλγεβρικής) πολλαπλότητας 2 και ατέλεια 1 με ιδιοδιάνυσμα $\vec{v}_1 = \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right]$

Μία λύση

$$\vec{x}_1 = \vec{v}_1 e^{3t}.$$

Άλλη λύση

$$\vec{x}_2 = (\vec{v}_2 + \vec{v}_1 t) e^{3t}.$$

$$\vec{x}_2{}' = \vec{v}_1 e^{3t} + 3(\vec{v}_2 + \vec{v}_1 t) e^{3t} = (3\vec{v}_2 + \vec{v}_1) e^{3t} + 3\vec{v}_1 t e^{3t}.$$

$$A\vec{x}_2 = A(\vec{v}_2 + \vec{v}_1 t) e^{3t} = A\vec{v}_2 e^{3t} + A\vec{v}_1 t e^{3t}.$$

$3\vec{v}_2 + \vec{v}_1 = A\vec{v}_2$ και $3\vec{v}_1 = A\vec{v}_1$.

$$(A - 3I)\vec{v}_1 = \vec{0}, \qquad \text{και} \qquad (A - 3I)\vec{v}_2 = \vec{v}_1.$$

$$(A - 3I)(A - 3I)\vec{v}_2 = \vec{0}, \qquad \text{ή} \qquad (A - 3I)^2\vec{v}_2 = \vec{0}.$$

Παράδειγμα

$(A-3I)^2 = 0$. Το κάθε $\vec{v}_2$ είναι λύση του $(A-3I)^2\vec{v}_2 = \vec{0}$. ʹρα αρκεί $(A-3I)\vec{v}_2 = \vec{v}_1$.

Παράδειγμα

$(A-3I)^2=0$. Το κάθε $\vec{v}_2$ είναι λύση του $(A-3I)^2\vec{v}_2=\vec{0}$. ’ρα αρκεί $(A-3I)\vec{v}_2=\vec{v}_1$.

$$\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\ b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}.$$

Παράδειγμα

$(A-3I)^2 = 0$. Το κάθε $\vec{v}_2$ είναι λύση του $(A-3I)^2\vec{v}_2 = \vec{0}$. 'ρα αρκεί $(A-3I)\vec{v}_2 = \vec{v}_1$.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Έστω $\alpha = 0$ $b = 1$. 'ρα $\vec{v}_2 = \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right]$.

Παράδειγμα

$(A-3I)^2=0$. Το κάθε $\vec{v}_2$ είναι λύση του $(A-3I)^2\vec{v}_2=\vec{0}$. 'ρα αρκεί $(A-3I)\vec{v}_2=\vec{v}_1$.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Έστω $\alpha=0$ $b=1$. 'ρα $\vec{v}_2=\left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right]$.
Η γενική λύση του $\vec{x}'=A\vec{x}$ είναι

$$\vec{x}=c_1\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}e^{3t}+c_2\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}t\right)e^{3t}=\begin{bmatrix} c_1e^{3t}+c_2te^{3t} \\ c_2e^{3t} \end{bmatrix}.$$

Αλγόριθμος - λ πολλαπλότητας 2 ατέλειας 1

Βρες το ιδιοδιάνυσμα $\vec{v}_1$ του λ.

Αλγόριθμος - λ πολλαπλότητας 2 ατέλειας 1

Βρες το ιδιοδιάνυσμα $\vec{v}_1$ του λ. Μετά πρέπει να βρούμε ένα $\vec{v}_2$ τέτοιο ώστε

$$(A - 3I)^2 \vec{v}_2 = \vec{0},$$
$$(A - 3I)\vec{v}_2 = \vec{v}_1 .$$

Αλγόριθμος - λ πολλαπλότητας 2 ατέλειας 1

Βρες το ιδιοδιάνυσμα $\vec{v}_1$ του λ. Μετά πρέπει να βρούμε ένα $\vec{v}_2$ τέτοιο ώστε

$$(A-3I)^2\vec{v}_2 = \vec{0},$$
$$(A-3I)\vec{v}_2 = \vec{v}_1.$$

Δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις

$$\vec{x}_1 = \vec{v}_1 e^{\lambda t},$$
$$\vec{x}_2 = (\vec{v}_2 + \vec{v}_1 t) e^{\lambda t}.$$

Αλγόριθμος - λ πολλαπλότητας m

Βρες τα *γενικευμένα ιδιοδιανύσματα*

$$(A - \lambda I)^k \vec{v} = \vec{0}, \qquad \text{αλλά} \qquad (A - \lambda I)^{k-1} \vec{v} \neq \vec{0}.$$

Αλγόριθμος - λ πολλαπλότητας m

Βρες τα *γενικευμένα ιδιοδιανύσματα*

$$(A-\lambda I)^k \vec{v} = \vec{0}, \qquad \text{αλλά} \qquad (A-\lambda I)^{k-1}\vec{v} \neq \vec{0}.$$

Για κάθε ιδιοδιάνυσμα $\vec{v}_1$ βρες μια σειρά *γενικευμένων* ιδιοδιανυσμάτων $\vec{v}_2 \ldots \vec{v}_k$ τέτοια ώστε:

$$\begin{aligned}
(A-\lambda I)\vec{v}_1 &= \vec{0}, \\
(A-\lambda I)\vec{v}_2 &= \vec{v}_1, \\
&\vdots \\
(A-\lambda I)\vec{v}_k &= \vec{v}_{k-1}.
\end{aligned}$$

Αλγόριθμος - λ πολλαπλότητας m

Βρες τα *γενικευμένα ιδιοδιανύσματα*

$$(A-\lambda I)^k \vec{v} = \vec{0}, \qquad \text{αλλά} \qquad (A-\lambda I)^{k-1} \vec{v} \neq \vec{0}.$$

Για κάθε ιδιοδιάνυσμα $\vec{v}_1$ βρες μια σειρά γενικευμένων ιδιοδιανυσμάτων $\vec{v}_2 \ldots \vec{v}_k$ τέτοια ώστε:

$$\begin{aligned}
(A-\lambda I)\vec{v}_1 &= \vec{0}, \\
(A-\lambda I)\vec{v}_2 &= \vec{v}_1, \\
&\vdots \\
(A-\lambda I)\vec{v}_k &= \vec{v}_{k-1}.
\end{aligned}$$

Οι γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις

$$\begin{aligned}
\vec{x}_1 &= \vec{v}_1 e^{\lambda t}, \\
\vec{x}_2 &= (\vec{v}_2 + \vec{v}_1 t) e^{\lambda t}, \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Εκθετικά

$$\vec{x}\,' = P\vec{x},$$

μαντεψιά

$$\vec{x} = e^{Pt}.$$

Εκθετικά

$$\vec{x}' = P\vec{x},$$

μαντεψιά

$$\vec{x} = e^{Pt}.$$

$$e^{\alpha t} = 1 + \alpha t + \frac{(\alpha t)^2}{2} + \frac{(\alpha t)^3}{6} + \frac{(\alpha t)^4}{24} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha t)^k}{k!}.$$

Εκθετικά

$$\vec{x}\,' = P\vec{x},$$

μαντεψιά

$$\vec{x} = e^{Pt}.$$

$$e^{\alpha t} = 1 + \alpha t + \frac{(\alpha t)^2}{2} + \frac{(\alpha t)^3}{6} + \frac{(\alpha t)^4}{24} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha t)^k}{k!}.$$

$$\alpha + \alpha^2 t + \frac{\alpha^3 t^2}{2} + \frac{\alpha^4 t^3}{6} + \cdots = \alpha \left(1 + \alpha t + \frac{(\alpha t)^2}{2} + \frac{(\alpha t)^3}{6} + \cdots \right) = \alpha e^{\alpha}$$

Εκθετικά Πινάκων

$$\boxed{e^A \overset{\text{ορισμός}}{=} I + A + \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{6}A^3 + \cdots + \frac{1}{k!}A^k + \cdots}$$

Εκθετικά Πινάκων

$$\boxed{e^{A} \overset{\text{ορισμός}}{=} I + A + \frac{1}{2}A^{2} + \frac{1}{6}A^{3} + \cdots + \frac{1}{k!}A^{k} + \cdots}$$

$$\frac{d}{dt}\left(e^{tP}\right) = Pe^{tP}.$$

Θεώρημα

Εάν P είναι ένας $n \times n$ πίνακας, τότε η γενική λύση του $\vec{x}' = P\vec{x}$ είναι

$$\vec{x} = e^{tP}\vec{c},$$

όπου $\vec{c}$ είναι ένα οποιοδήποτε σταθερό διάνυσμα. Μάλιστα ισχύει η σχέση $\vec{x}(0) = \vec{c}$.

Πρόβλημα

Εάν $AB = BA$ τότε $e^{A+B} = e^{A}e^{B}$. Ειδάλλως έχουμε $e^{A+B} \neq e^{A}e^{B}$.

Απλές περιπτώσεις

Διαγώνιοι πίνακες
Πίνακες τ.ω. $A^k = 0$ για $k > 2$.

Απλές περιπτώσεις - Διαγώνιοι Πίνακες

Έστω $D = \left[\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{smallmatrix}\right]$

Απλές περιπτώσεις - Διαγώνιοι Πίνακες

Έστω $D = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \;\Rightarrow\; D^k = \begin{bmatrix} a^k & 0 \\ 0 & b^k \end{bmatrix}$.

Απλές περιπτώσεις - Διαγώνιοι Πίνακες

Έστω $D = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \;\Rightarrow\; D^k = \begin{bmatrix} a^k & 0 \\ 0 & b^k \end{bmatrix}$.

$$e^D = I + D + \frac{1}{2}D^2 + \frac{1}{6}D^3 + \cdots$$

Απλές περιπτώσεις - Διαγώνιοι Πίνακες

Έστω $D = \left[\begin{smallmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & b \end{smallmatrix}\right] \Rightarrow D^k = \left[\begin{smallmatrix} \alpha^k & 0 \\ 0 & b^k \end{smallmatrix}\right]$.

$$e^D = I + D + \frac{1}{2}D^2 + \frac{1}{6}D^3 + \cdots$$

$$e^D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \alpha^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{bmatrix} + \frac{1}{6}\begin{bmatrix} \alpha^3 & 0 \\ 0 & b^3 \end{bmatrix} + \cdots$$

Απλές περιπτώσεις - Διαγώνιοι Πίνακες

Έστω $D = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \Rightarrow D^k = \begin{bmatrix} \alpha^k & 0 \\ 0 & b^k \end{bmatrix}$.

$$e^D = I + D + \frac{1}{2}D^2 + \frac{1}{6}D^3 + \cdots$$

$$e^D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \alpha^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{bmatrix} + \frac{1}{6}\begin{bmatrix} \alpha^3 & 0 \\ 0 & b^3 \end{bmatrix} + \cdots$$

$$e^D = \begin{bmatrix} e^\alpha & 0 \\ 0 & e^b \end{bmatrix}.$$

Απλές περιπτώσεις - Διαγώνιοι Πίνακες

Έστω $D = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \Rightarrow D^k = \begin{bmatrix} \alpha^k & 0 \\ 0 & b^k \end{bmatrix}$.

$$e^D = I + D + \frac{1}{2}D^2 + \frac{1}{6}D^3 + \cdots$$

$$e^D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \alpha^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{bmatrix} + \frac{1}{6}\begin{bmatrix} \alpha^3 & 0 \\ 0 & b^3 \end{bmatrix} + \cdots$$

$$e^D = \begin{bmatrix} e^\alpha & 0 \\ 0 & e^b \end{bmatrix}.$$

και παρεμπιπτόντως

$$e^I = \begin{bmatrix} e & 0 \\ 0 & e \end{bmatrix} \qquad \text{και} \qquad e^{\alpha I} = \begin{bmatrix} e^\alpha & 0 \\ 0 & e^\alpha \end{bmatrix}.$$

Απλές περιπτώσεις - μη-Διαγώνιοι Πίνακες

Έστω $A = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$

Απλές περιπτώσεις - μη-Διαγώνιοι Πίνακες

Έστω $A = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} + 2I = B + 2I$

Απλές περιπτώσεις - μη-Διαγώνιοι Πίνακες

Έστω $A = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} + 2I = B + 2I$
Οι tB και $2tI$ αντιμετατίθενται, άρα

$e^{tA} = e^{tB+2tI}$

Απλές περιπτώσεις - μη-Διαγώνιοι Πίνακες

Έστω $A = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} + 2I = B + 2I$
Οι tB και $2tI$ αντιμετατίθενται, άρα

$e^{tA} = e^{tB+2tI} = e^{tB}e^{2tI} =$

Απλές περιπτώσεις - μη-Διαγώνιοι Πίνακες

Έστω $A = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} + 2I = B + 2I$

Οι tB και $2tI$ αντιμετατίθενται, άρα

$$e^{tA} = e^{tB+2tI} = e^{tB}e^{2tI} = e^{tB}\begin{bmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix}$$

Απλές περιπτώσεις - μη-Διαγώνιοι Πίνακες

Έστω $A = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} + 2I = B + 2I$

Οι tB και $2tI$ αντιμετατίθενται, άρα

$e^{tA} = e^{tB+2tI} = e^{tB}e^{2tI} = e^{tB}\begin{bmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix}$

Όμως $B^2 = 0$

Απλές περιπτώσεις - μη-Διαγώνιοι Πίνακες

Έστω $A = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} + 2I = B + 2I$

Οι tB και $2tI$ αντιμετατίθενται, άρα

$e^{tA} = e^{tB+2tI} = e^{tB}e^{2tI} = e^{tB}\begin{bmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix}$

Όμως $B^2 = 0 \Rightarrow B^k = 0 \quad \forall k \geq 2$

Απλές περιπτώσεις - μη-Διαγώνιοι Πίνακες

Έστω $A = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} + 2I = B + 2I$

Οι tB και $2tI$ αντιμετατίθενται, άρα

$e^{tA} = e^{tB+2tI} = e^{tB}e^{2tI} = e^{tB}\begin{bmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix}$

Όμως $B^2 = 0 \Rightarrow B^k = 0 \quad \forall k \geq 2$ άρα

$e^{tA} = \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1+3t & -3t \\ 3t & 1-3t \end{bmatrix} =$

$\begin{bmatrix} (1+3t)e^{2t} & -3te^{2t} \\ 3te^{2t} & (1-3t)e^{2t} \end{bmatrix}.$

Γενική περίπτωση

Βασικό εργαλείο

$e^{BAB^{-1}} = Be^{A}B^{-1}$

Γενική περίπτωση

Βασικό εργαλείο
$e^{BAB^{-1}} = Be^{A}B^{-1} \quad \Rightarrow \quad (BAB^{-1})^{k} = BA^{k}B^{-1}.$

Γενική περίπτωση

Βασικό εργαλείο
$e^{BAB^{-1}} = Be^{A}B^{-1} \quad \Rightarrow \quad (BAB^{-1})^k = BA^kB^{-1}.$

$$
\begin{aligned}
e^{BAB^{-1}} &= I + BAB^{-1} + \frac{1}{2}(BAB^{-1})^2 + \frac{1}{6}(BAB^{-1})^3 + \cdots \\
&= BB^{-1} + BAB^{-1} + \frac{1}{2}BA^2B^{-1} + \frac{1}{6}BA^3B^{-1} + \cdots \\
&= B(I + A + \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{6}A^3 + \cdots)B^{-1} \\
&= Be^{A}B^{-1}.
\end{aligned}
$$

Η λύση με εκθετικά

Έστω $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ οι ιδιοτιμές και $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ τα (γραμμικά ανεξάρτητα) ιδιοδιανύσματα του A .

Η λύση με εκθετικά

Έστω $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ οι ιδιοτιμές και $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ τα (γραμμικά ανεξάρτητα) ιδιοδιανύσματα του A . Έστω E ο πίνακας ο οποίος έχει σαν στήλες τα ιδιοδιανύσματα του A.

Η λύση με εκθετικά

Έστω $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ οι ιδιοτιμές και $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ τα (γραμμικά ανεξάρτητα) ιδιοδιανύσματα του A . Έστω E ο πίνακας ο οποίος έχει σαν στήλες τα ιδιοδιανύσματα του A.
Τότε

$$\boxed{e^{tA} = Ee^{tD}E^{-1} = E \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} E^{-1}.}$$

Παράδειγμα

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad x(0) = 4 \quad y(0) = 2.$$

Παράδειγμα

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad x(0) = 4 \quad y(0) = 2.$$

Ιδιοτιμές: 3 και -1, ιδιοδιανύσματα: $\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right]$ και $\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right]$.

Παράδειγμα

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad x(0) = 4 \quad y(0) = 2.$$

Ιδιοτιμές: 3 και -1, ιδιοδιανύσματα: $\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right]$ και $\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right]$.

$$\begin{aligned} e^{tA} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{3t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{3t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix} \frac{-1}{2} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{-1}{2} \begin{bmatrix} -e^{3t} - e^{-t} & -e^{3t} + e^{-t} \\ -e^{3t} + e^{-t} & -e^{3t} - e^{-t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{e^{3t}+e^{-t}}{2} & \frac{e^{3t}-e^{-t}}{2} \\ \frac{e^{3t}-e^{-t}}{2} & \frac{e^{3t}+e^{-t}}{2} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Παράδειγμα

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad x(0) = 4 \quad y(0) = 2.$$

Ιδιοτιμές: 3 και -1, ιδιοδιανύσματα: $\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right]$ και $\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right]$.

$$\begin{aligned} e^{tA} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{3t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{3t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix} \frac{-1}{2} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{-1}{2} \begin{bmatrix} -e^{3t} - e^{-t} & -e^{3t} + e^{-t} \\ -e^{3t} + e^{-t} & -e^{3t} - e^{-t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{e^{3t}+e^{-t}}{2} & \frac{e^{3t}-e^{-t}}{2} \\ \frac{e^{3t}-e^{-t}}{2} & \frac{e^{3t}+e^{-t}}{2} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{e^{3t}+e^{-t}}{2} & \frac{e^{3t}-e^{-t}}{2} \\ \frac{e^{3t}-e^{-t}}{2} & \frac{e^{3t}+e^{-t}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3e^{3t} + e^{-t} \\ 3e^{3t} - e^{-t} \end{bmatrix}.$$

Ολοκληρωτικός παράγοντας - Γενικευμένη λύση

$$\vec{x}'(t) = A\vec{x}(t) + \vec{f}(t)$$

Ολοκληρωτικός παράγοντας - Γενικευμένη λύση

$$\vec{x}\,'(t) = A\vec{x}(t) + \vec{f}(t) \quad \Rightarrow \quad \vec{x}\,'(t) + P\vec{x}(t) = \vec{f}(t),$$

Ολοκληρωτικός παράγοντας - Γενικευμένη λύση

$$\vec{x}\,'(t) = A\vec{x}(t) + \vec{f}(t) \quad \Rightarrow \quad \vec{x}\,'(t) + P\vec{x}(t) = \vec{f}(t).$$

$$e^{tP}\vec{x}\,'(t) + e^{tP}P\vec{x}(t) = e^{tP}\vec{f}(t).$$

Όμως $Pe^{tP} = e^{tP}P$

Ολοκληρωτικός παράγοντας - Γενικευμένη λύση

$$\vec{x}\,'(t) = A\vec{x}(t) + \vec{f}(t) \quad \Rightarrow \quad \vec{x}\,'(t) + P\vec{x}(t) = \vec{f}(t).$$

$$e^{tP}\vec{x}\,'(t) + e^{tP}P\vec{x}(t) = e^{tP}\vec{f}(t).$$

Όμως $Pe^{tP} = e^{tP}P$ και $\frac{d}{dt}\left(e^{tP}\right) = Pe^{tP}$

Ολοκληρωτικός παράγοντας - Γενικευμένη λύση

$$\vec{x}'(t) = A\vec{x}(t) + \vec{f}(t) \quad \Rightarrow \quad \vec{x}'(t) + P\vec{x}(t) = \vec{f}(t).$$

$$e^{tP}\vec{x}'(t) + e^{tP}P\vec{x}(t) = e^{tP}\vec{f}(t).$$

Όμως $Pe^{tP} = e^{tP}P$ και $\frac{d}{dt}\left(e^{tP}\right) = Pe^{tP}$ άρα

$$\frac{d}{dt}\left(e^{tP}\vec{x}(t)\right) = e^{tP}\vec{f}(t).$$

Ολοκληρωτικός παράγοντας - Γενικευμένη λύση

$$\vec{x}\,'(t) = A\vec{x}(t) + \vec{f}(t) \quad \Rightarrow \quad \vec{x}\,'(t) + P\vec{x}(t) = \vec{f}(t).$$

$$e^{tP}\vec{x}\,'(t) + e^{tP}P\vec{x}(t) = e^{tP}\vec{f}(t).$$

Όμως $Pe^{tP} = e^{tP}P$ και $\frac{d}{dt}\left(e^{tP}\right) = Pe^{tP}$ άρα

$$\frac{d}{dt}\left(e^{tP}\vec{x}(t)\right) = e^{tP}\vec{f}(t).$$

$$e^{tP}\vec{x}(t) = \int e^{tP}\vec{f}(t)\ dt + \vec{c}.$$

Ολοκληρωτικός παράγοντας - Γενικευμένη λύση

$$\vec{x}\,'(t) = A\vec{x}(t) + \vec{f}(t) \quad \Rightarrow \quad \vec{x}\,'(t) + P\vec{x}(t) = \vec{f}(t).$$

$$e^{tP}\vec{x}\,'(t) + e^{tP}P\vec{x}(t) = e^{tP}\vec{f}(t).$$

Όμως $Pe^{tP} = e^{tP}P$ και $\frac{d}{dt}\left(e^{tP}\right) = Pe^{tP}$ άρα

$$\frac{d}{dt}\left(e^{tP}\vec{x}(t)\right) = e^{tP}\vec{f}(t).$$

$$e^{tP}\vec{x}(t) = \int e^{tP}\vec{f}(t)\ dt + \vec{c}.$$

$$\vec{x}(t) = e^{-tP}\int e^{tP}\vec{f}(t)\ dt + e^{-tP}\vec{c}.$$

Ολοκληρωτικός παράγοντας - Αρχικές συνθήκες

$$\vec{x}\,'(t) + P\vec{x}(t) = \vec{f}(t), \qquad \vec{x}(0) = \vec{b}.$$

Ολοκληρωτικός παράγοντας - Αρχικές συνθήκες

$$\vec{x}'(t) + P\vec{x}(t) = \vec{f}(t), \qquad \vec{x}(0) = \vec{b}.$$

$$\boxed{\vec{x}(t) = e^{-tP}\int_0^t e^{sP}\vec{f}(s)\, ds + e^{-tP}\vec{b}.}$$

Ολοκληρωτικός παράγοντας - Αρχικές συνθήκες

$$\vec{x}\,'(t) + P\vec{x}(t) = \vec{f}(t), \qquad \vec{x}(0) = \vec{b}.$$

$$\boxed{\vec{x}(t) = e^{-tP} \int_0^t e^{sP}\vec{f}(s)\ ds + e^{-tP}\vec{b}.}$$

$$\vec{x}(0) = e^{-0P} \int_0^0 e^{sP}\vec{f}(s)\ ds + e^{-0P}\vec{b} = I\vec{b} = \vec{b}.$$

Παράδειγμα

$$
\begin{aligned}
x_1' + 5x_1 - 3x_2 &= e^t, \\
x_2' + 3x_1 - x_2 &= 0, \quad x_1(0) = 1, \quad x_2(0) = 0
\end{aligned}
$$

Παράδειγμα

$$
\begin{aligned}
x_1' + 5x_1 - 3x_2 &= e^t, \\
x_2' + 3x_1 - x_2 &= 0, \quad x_1(0) = 1, \quad x_2(0) = 0
\end{aligned}
$$

$$
\vec{x}\,' + \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \vec{x} = \begin{bmatrix} e^t \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \vec{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.
$$

Παράδειγμα

$$
\begin{aligned}
x_1' + 5x_1 - 3x_2 &= e^t, \\
x_2' + 3x_1 - x_2 &= 0, \quad x_1(0) = 1, \quad x_2(0) = 0
\end{aligned}
$$

$$
\vec{x}' + \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \vec{x} = \begin{bmatrix} e^t \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \vec{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.
$$

$$
e^{tP} = \begin{bmatrix} (1+3t)e^{2t} & -3te^{2t} \\ 3te^{2t} & (1-3t)e^{2t} \end{bmatrix}.
$$

Παράδειγμα

$$
\begin{aligned}
x_1' + 5x_1 - 3x_2 &= e^t, \\
x_2' + 3x_1 - x_2 &= 0, \quad x_1(0) = 1, \quad x_2(0) = 0
\end{aligned}
$$

$$\vec{x}\,' + \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \vec{x} = \begin{bmatrix} e^t \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \vec{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$$e^{tP} = \begin{bmatrix} (1+3t)e^{2t} & -3te^{2t} \\ 3te^{2t} & (1-3t)e^{2t} \end{bmatrix}.$$

$$
\begin{aligned}
\int_0^t e^{sP}\vec{f}(s)\,ds &= \int_0^t \begin{bmatrix} (1+3s)e^{2s} & -3se^{2s} \\ 3se^{2s} & (1-3s)e^{2s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^s \\ 0 \end{bmatrix} ds \\
&= \int_0^t \begin{bmatrix} (1+3s)e^{3s} \\ 3se^{3s} \end{bmatrix} ds = \begin{bmatrix} te^{3t} \\ \frac{(3t-1)e^{3t}+1}{3} \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Παράδειγμα (συνέχεια)

$$
\begin{aligned}
\vec{x}(t) &= e^{-tP}\int_0^t e^{sP}\vec{f}(s)\,ds + e^{-tP}\vec{b} \\
&= \begin{bmatrix} (1-3t)e^{-2t} & 3te^{-2t} \\ -3te^{-2t} & (1+3t)e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} te^{3t} \\ \frac{(3t-1)e^{3t}+1}{3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (1-3t)e^{-2t} \\ -3te^{-2t} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} te^{-2t} \\ -\frac{e^t}{3} + \left(\frac{1}{3}+t\right)\,e^{-2t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (1-3t)e^{-2t} \\ -3te^{-2t} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (1-2t)e^{-2t} \\ -\frac{e^t}{3} + \left(\frac{1}{3}-2t\right)\,e^{-2t} \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Παράδειγμα (συνέχεια)

$$\vec{x}(t) = e^{-tP} \int_0^t e^{sP} \vec{f}(s)\, ds + e^{-tP} \vec{b}$$

$$= \begin{bmatrix} (1-2t)e^{-2t} \\ -\frac{e^t}{3} + \left(\frac{1}{3} - 2t\right) e^{-2t} \end{bmatrix}.$$

Παράδειγμα (συνέχεια)

$$
\begin{aligned}
\vec{x}(t) &= e^{-tP}\int_0^t e^{sP}\vec{f}(s)\;ds + e^{-tP}\vec{b} \\
&= \begin{bmatrix} (1-3t)e^{-2t} & 3te^{-2t} \\ -3te^{-2t} & (1+3t)e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} te^{3t} \\ \frac{(3t-1)e^{3t}+1}{3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (1-3t)e^{-2t} \\ -3te^{-2t} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} te^{-2t} \\ -\frac{e^t}{3} + \left(\frac{1}{3}+t\right)\, e^{-2t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (1-3t)e^{-2t} \\ -3te^{-2t} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (1-2t)e^{-2t} \\ -\frac{e^t}{3} + \left(\frac{1}{3}-2t\right)\, e^{-2t} \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Παραγοντοποίηση ιδιοδιανυσμάτων

$$\vec{x}'(t) = A\vec{x}(t) + \vec{f}(t) \quad . \tag{2}$$

Παραγοντοποίηση ιδιοδιανυσμάτων

$$\vec{x}\,'(t) = A\vec{x}(t) + \vec{f}(t) \quad . \tag{2}$$

$\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα του A.

Παραγοντοποίηση ιδιοδιανυσμάτων

$$\vec{x}\,'(t) = A\vec{x}(t) + \vec{f}(t) \quad . \tag{2}$$

$\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα του A.
Έστω

$$\vec{x}(t) = \vec{v}_1\, \xi_1(t) + \vec{v}_2\, \xi_2(t) + \cdots + \vec{v}_n\, \xi_n(t). \tag{3}$$

και

$$\vec{f}(t) = \vec{v}_1\, g_1(t) + \vec{v}_2\, g_2(t) + \cdots + \vec{v}_n\, g_n(t). \tag{4}$$

Παραγοντοποίηση ιδιοδιανυσμάτων

$$\vec{x}'(t) = A\vec{x}(t) + \vec{f}(t) \quad . \tag{2}$$

$\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα του A.
Έστω

$$\vec{x}(t) = \vec{v}_1\,\xi_1(t) + \vec{v}_2\,\xi_2(t) + \cdots + \vec{v}_n\,\xi_n(t). \tag{3}$$

και

$$\vec{f}(t) = \vec{v}_1\,g_1(t) + \vec{v}_2\,g_2(t) + \cdots + \vec{v}_n\,g_n(t). \tag{4}$$

$$\begin{aligned}
\vec{x}' &= \vec{v}_1\,\xi_1' + \vec{v}_2\,\xi_2' + \cdots + \vec{v}_n\,\xi_n' \\
&= A\,(\vec{v}_1\,\xi_1 + \vec{v}_2\,\xi_2 + \cdots + \vec{v}_n\,\xi_n) + \vec{v}_1\,g_1 + \vec{v}_2\,g_2 + \cdots + \vec{v}_n\,g_n \\
&= A\vec{v}_1\,\xi_1 + A\vec{v}_2\,\xi_2 + \cdots + A\vec{v}_n\,\xi_n + \vec{v}_1\,g_1 + \vec{v}_2\,g_2 + \cdots + \vec{v}_n\,g_n \\
&= \vec{v}_1\,\lambda_1\,\xi_1 + \vec{v}_2\,\lambda_2\,\xi_2 + \cdots + \vec{v}_n\,\lambda_n\,\xi_n + \vec{v}_1\,g_1 + \vec{v}_2\,g_2 + \cdots + \vec{v}_n\,g_n \\
&= \vec{v}_1\,(\lambda_1\,\xi_1 + g_1) + \vec{v}_2\,(\lambda_2\,\xi_2 + g_2) + \cdots + \vec{v}_n\,(\lambda_n\,\xi_n + g_n).
\end{aligned}$$

Παραγοντοποίηση ιδιοδιανυσμάτων (συνέχεια)

$$
\begin{aligned}
\xi_1' &= \lambda_1 \xi_1 + g_1, \\
\xi_2' &= \lambda_2 \xi_2 + g_2, \\
&\vdots \\
\xi_n' &= \lambda_n \xi_n + g_n.
\end{aligned}
$$

Παραγοντοποίηση ιδιοδιανυσμάτων (συνέχεια)

$$\begin{aligned}
\xi_1' &= \lambda_1 \xi_1 + g_1, \\
\xi_2' &= \lambda_2 \xi_2 + g_2, \\
&\vdots \\
\xi_n' &= \lambda_n \xi_n + g_n.
\end{aligned}$$

$$\xi_k'(t) - \lambda_k \xi_k(t) = g_k(t).$$

Παραγοντοποίηση ιδιοδιανυσμάτων (συνέχεια)

$$\begin{aligned} \xi_1' &= \lambda_1 \xi_1 + g_1, \\ \xi_2' &= \lambda_2 \xi_2 + g_2, \\ &\vdots \\ \xi_n' &= \lambda_n \xi_n + g_n. \end{aligned}$$

$$\xi_k'(t) - \lambda_k \xi_k(t) = g_k(t).$$

$$\frac{d}{dx}\left[\xi_k(t) e^{-\lambda_k t}\right] = e^{-\lambda_k t} g_k(t).$$

Παραγοντοποίηση ιδιοδιανυσμάτων (συνέχεια)

$$
\begin{aligned}
\xi_1' &= \lambda_1 \xi_1 + g_1, \\
\xi_2' &= \lambda_2 \xi_2 + g_2, \\
&\vdots \\
\xi_n' &= \lambda_n \xi_n + g_n.
\end{aligned}
$$

$$\xi_k'(t) - \lambda_k \xi_k(t) = g_k(t).$$

$$\frac{d}{dx}\left[\xi_k(t) e^{-\lambda_k t}\right] = e^{-\lambda_k t} g_k(t).$$

$$\xi_k(t) = e^{\lambda_k t} \int e^{-\lambda_k t} g_k(t)\ dt + C_k e^{\lambda_k t}.$$

Παραγοντοποίηση ιδιοδιανυσμάτων (συνέχεια)

$$\boxed{\xi_k(t) = e^{\lambda_k t} \int_0^t e^{-\lambda_k s} g_k(s)\ dt + \alpha_k e^{\lambda_k t},}$$

Παραγοντοποίηση ιδιοδιανυσμάτων (συνέχεια)

$$\boxed{\xi_k(t) = e^{\lambda_k t}\int_0^t e^{-\lambda_k s} g_k(s)\ dt + \alpha_k e^{\lambda_k t},}$$

$\vec{x}(t) = \vec{v}_1\xi_1(t) + \vec{v}_2\xi_2(t) + \cdots + \vec{v}_n\xi_n(t)$ η οποία ικανοποιεί την $\vec{x}(0) = b$, επειδή $\xi_k(0) = \alpha_k$.

Παράδειγμα

$\vec{x}' = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \vec{x} + \vec{f}$ όπου $\vec{f}(t) = \begin{bmatrix} 2e^t \\ 2t \end{bmatrix}$ για $\vec{x}(0) = \begin{bmatrix} 3/16 \\ -5/16 \end{bmatrix}$.

Παράδειγμα

$\vec{x}' = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \vec{x} + \vec{f}$ όπου $\vec{f}(t) = \begin{bmatrix} 2e^t \\ 2t \end{bmatrix}$ για $\vec{x}(0) = \begin{bmatrix} 3/16 \\ -5/16 \end{bmatrix}$.

Ιδιοτιμές -2 και 4 ιδιοδιανύσματα $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ και $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Παράδειγμα

$\vec{x}' = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{smallmatrix}\right] \vec{x} + \vec{f}$ όπου $\vec{f}(t) = \left[\begin{smallmatrix} 2e^t \\ 2t \end{smallmatrix}\right]$ για $\vec{x}(0) = \begin{bmatrix} 3/16 \\ -5/16 \end{bmatrix}$.

Ιδιοτιμές -2 και 4 ιδιοδιανύσματα $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ και $\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right]$.

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad E^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Παράδειγμα

$\vec{x}' = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{smallmatrix}\right] \vec{x} + \vec{f}$ όπου $\vec{f}(t) = \left[\begin{smallmatrix} 2e^t \\ 2t \end{smallmatrix}\right]$ για $\vec{x}(0) = \left[\begin{smallmatrix} 3/16 \\ -5/16 \end{smallmatrix}\right]$.
Ιδιοτιμές -2 και 4 ιδιοδιανύσματα $\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right]$ και $\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right]$.

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad E^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

$\vec{x} = \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right] \xi_1 + \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right] \xi_2$, $\vec{f} = \left[\begin{smallmatrix} 2e^t \\ 2t \end{smallmatrix}\right] = \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right] g_1 + \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right] g_2$ και
$\vec{x}(0) = \left[\begin{smallmatrix} 3/16 \\ -5/16 \end{smallmatrix}\right] = \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right] \alpha_1 + \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right] \alpha_2$,

Παράδειγμα

$\vec{x}' = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \vec{x} + \vec{f}$ όπου $\vec{f}(t) = \begin{bmatrix} 2e^t \\ 2t \end{bmatrix}$ για $\vec{x}(0) = \begin{bmatrix} 3/16 \\ -5/16 \end{bmatrix}$.
Ιδιοτιμές -2 και 4 ιδιοδιανύσματα $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ και $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad E^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

$\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \xi_1 + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \xi_2$, $\vec{f} = \begin{bmatrix} 2e^t \\ 2t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} g_1 + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} g_2$ και
$\vec{x}(0) = \begin{bmatrix} 3/16 \\ -5/16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \alpha_1 + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \alpha_2$, όπου

$$\begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} = E^{-1} \begin{bmatrix} 2e^t \\ 2t \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2e^t \\ 2t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^t - t \\ e^t + t \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα

$\vec{x}' = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{smallmatrix}\right] \vec{x} + \vec{f}$ όπου $\vec{f}(t) = \left[\begin{smallmatrix} 2e^t \\ 2t \end{smallmatrix}\right]$ για $\vec{x}(0) = \left[\begin{smallmatrix} 3/16 \\ -5/16 \end{smallmatrix}\right]$.
Ιδιοτιμές -2 και 4 ιδιοδιανύσματα $\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right]$ και $\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right]$.

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad E^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

$\vec{x} = \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right] \xi_1 + \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right] \xi_2$, $\vec{f} = \left[\begin{smallmatrix} 2e^t \\ 2t \end{smallmatrix}\right] = \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right] g_1 + \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right] g_2$ και
$\vec{x}(0) = \left[\begin{smallmatrix} 3/16 \\ -5/16 \end{smallmatrix}\right] = \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right] \alpha_1 + \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right] \alpha_2$, όπου

$$\begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} = E^{-1} \begin{bmatrix} 2e^t \\ 2t \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2e^t \\ 2t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^t - t \\ e^t + t \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = E^{-1} \begin{bmatrix} \frac{3}{16} \\ \frac{-5}{16} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{-1}{16} \end{bmatrix}.$$

Παράδειγμα (συνέχεια)

Αντικαθιστούμε, εξισώνουμε τους συντελεστές των ιδιοδιανυσμάτων και παίρνουμε

$$\xi_1' = -2\xi_1 + e^t - t, \qquad \text{όπου } \xi_1(0) = \alpha_1 = \frac{1}{4},$$

$$\xi_2' = 4\xi_2 + e^t + t, \qquad \text{όπου } \xi_2(0) = \alpha_2 = \frac{-1}{16}.$$

Παράδειγμα (συνέχεια)

Αντικαθιστούμε, εξισώνουμε τους συντελεστές των ιδιοδιανυσμάτων και παίρνουμε

$$\xi_1' = -2\xi_1 + e^t - t, \qquad \text{όπου } \xi_1(0) = \alpha_1 = \frac{1}{4},$$

$$\xi_2' = 4\xi_2 + e^t + t, \qquad \text{όπου } \xi_2(0) = \alpha_2 = \frac{-1}{16}.$$

$$\xi_1 = e^{-2t}\int e^{2t}(e^t - t)\ dt + C_1 e^{-2t} = \frac{e^t}{3} - \frac{t}{2} + \frac{1}{4} + C_1 e^{-2t}.$$

$$\xi_2 = e^{4t}\int e^{-4t}(e^t + t)\ dt + C_2 e^{4t} = -\frac{e^t}{3} - \frac{t}{4} - \frac{1}{16} + C_2 e^{4t}.$$

Παράδειγμα (συνέχεια)

Αντικαθιστούμε, εξισώνουμε τους συντελεστές των ιδιοδιανυσμάτων και παίρνουμε

$$\xi_1' = -2\xi_1 + e^t - t, \qquad \text{όπου } \xi_1(0) = \alpha_1 = \frac{1}{4},$$

$$\xi_2' = 4\xi_2 + e^t + t, \qquad \text{όπου } \xi_2(0) = \alpha_2 = \frac{-1}{16}.$$

$$\xi_1 = e^{-2t}\int e^{2t}(e^t - t)\ dt + C_1 e^{-2t} = \frac{e^t}{3} - \frac{t}{2} + \frac{1}{4} + C_1 e^{-2t}.$$

$$\xi_2 = e^{4t}\int e^{-4t}(e^t + t)\ dt + C_2 e^{4t} = -\frac{e^t}{3} - \frac{t}{4} - \frac{1}{16} + C_2 e^{4t}.$$

Επειδή $\xi_1(0) = 1/4$ και $\xi_2(0) = 1/16$ έχουμε $C_1 = -1/3$ και $C_2 = 1/3$

Παράδειγμα (συνέχεια)

Αντικαθιστούμε, εξισώνουμε τους συντελεστές των ιδιοδιανυσμάτων και παίρνουμε

$$\xi_1' = -2\xi_1 + e^t - t, \qquad \text{όπου } \xi_1(0) = \alpha_1 = \frac{1}{4},$$

$$\xi_2' = 4\xi_2 + e^t + t, \qquad \text{όπου } \xi_2(0) = \alpha_2 = \frac{-1}{16}.$$

$$\xi_1 = e^{-2t}\int e^{2t}(e^t - t)\,dt + C_1 e^{-2t} = \frac{e^t}{3} - \frac{t}{2} + \frac{1}{4} + C_1 e^{-2t}.$$

$$\xi_2 = e^{4t}\int e^{-4t}(e^t + t)\,dt + C_2 e^{4t} = -\frac{e^t}{3} - \frac{t}{4} - \frac{1}{16} + C_2 e^{4t}.$$

Επειδή $\xi_1(0) = 1/4$ και $\xi_2(0) = 1/16$ έχουμε $C_1 = -1/3$ και $C_2 = 1/3$ και η λύση είναι

$$\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} \frac{e^{4t}-e^{-2t}}{3} + \frac{3-12t}{16} \\ \frac{e^{-2t}+e^{4t}+2e^t}{3} + \frac{4t-5}{16} \end{bmatrix}.$$

Απροσδιόριστοι Συντελεστές

$$\vec{x}' = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \vec{x} + \begin{bmatrix} e^t \\ t \end{bmatrix}.$$

Απροσδιόριστοι Συντελεστές

$\vec{x}' = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \vec{x} + \begin{bmatrix} e^t \\ t \end{bmatrix}$.

Ιδιοτιμές -1, 1. Ιδιοδιανύσματα $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ και $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ 'ρα

$$\vec{x}_c = \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{t},$$

Απροσδιόριστοι Συντελεστές

$\vec{x}' = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \vec{x} + \begin{bmatrix} e^t \\ t \end{bmatrix}$.
Ιδιοτιμές -1, 1. Ιδιοδιανύσματα $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ και $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ 'ρα

$$\vec{x}_c = \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^t,$$

Μαντεψιά $\vec{x} = \vec{a}e^t + \vec{b}te^t + \vec{c}t + \vec{d}$
όπου $\vec{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$, $\vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$, $\vec{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$, και $\vec{d} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}$,

Απροσδιόριστοι Συντελεστές

$\vec{x}' = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \vec{x} + \begin{bmatrix} e^t \\ t \end{bmatrix}$.
Ιδιοτιμές -1, 1. Ιδιοδιανύσματα $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ και $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ 'ρα

$$\vec{x}_c = \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^t,$$

Μαντεψιά $\vec{x} = \vec{\alpha} e^t + \vec{b} t e^t + \vec{c} t + \vec{d}$
όπου $\vec{\alpha} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}$, $\vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$, $\vec{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$, και $\vec{d} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}$,

$$\vec{x}' = \begin{bmatrix} -\alpha_1 \\ -2\alpha_1 + \alpha_2 \end{bmatrix} e^t + \begin{bmatrix} -b_1 \\ -2b_1 + b_2 \end{bmatrix} t e^t + \begin{bmatrix} -c_1 \\ -2c_1 + c_2 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} -d_1 \\ -2d_1 + d_2 \end{bmatrix}$$

Απροσδιόριστοι Συντελεστές

$\vec{x}' = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \vec{x} + \begin{bmatrix} e^t \\ t \end{bmatrix}$.
Ιδιοτιμές -1, 1. Ιδιοδιανύσματα $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ και $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ 'ρα

$$\vec{x}_c = \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^t,$$

Μαντεψιά $\vec{x} = \vec{\alpha} e^t + \vec{b} t e^t + \vec{c} t + \vec{d}$
όπου $\vec{\alpha} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}$, $\vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$, $\vec{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$, και $\vec{d} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}$,

$$\vec{x}' = \begin{bmatrix} -\alpha_1 \\ -2\alpha_1 + \alpha_2 \end{bmatrix} e^t + \begin{bmatrix} -b_1 \\ -2b_1 + b_2 \end{bmatrix} t e^t + \begin{bmatrix} -c_1 \\ -2c_1 + c_2 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} -d_1 \\ -2d_1 + d_2 \end{bmatrix}$$

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} e^t + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} t e^t + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} e^t \\ -t e^t - t - 1 \end{bmatrix}.$$

Εξισώσεις 1ης τάξης με μεταβλητούς συντελεστές

$$\vec{x}' = A(t)\,\vec{x} + \vec{f}(t)$$

Εξισώσεις 1ης τάξης με μεταβλητούς συντελεστές

$$\vec{x}' = A(t)\,\vec{x} + \vec{f}(t) \quad \vec{x}_p = X(t)\,\vec{u}(t), \tag{5}$$

Εξισώσεις 1ης τάξης με μεταβλητούς συντελεστές

$$\vec{x}' = A(t)\vec{x} + \vec{f}(t) \quad \vec{x}_p = X(t)\vec{u}(t), \tag{5}$$

$$\vec{x}_p{}'(t) = X'(t)\vec{u}(t) + X(t)\vec{u}'(t) = A(t)X(t)\vec{u}(t) + \vec{f}(t).$$

Εξισώσεις 1ης τάξης με μεταβλητούς συντελεστές

$$\vec{x}\,' = A(t)\,\vec{x} + \vec{f}(t) \qquad \vec{x}_p = X(t)\,\vec{u}(t), \tag{5}$$

$$\vec{x}_p\,'(t) = X'(t)\,\vec{u}(t) + X(t)\,\vec{u}\,'(t) = A(t)\,X(t)\,\vec{u}(t) + \vec{f}(t).$$

$$X'(t)\,\vec{u}(t) + X(t)\,\vec{u}\,'(t) = X'(t)\,\vec{u}(t) + \vec{f}(t).$$

Εξισώσεις 1ης τάξης με μεταβλητούς συντελεστές

$$\vec{x}' = A(t)\,\vec{x} + \vec{f}(t) \qquad \vec{x}_p = X(t)\,\vec{u}(t), \tag{5}$$

$$\vec{x}_p\,'(t) = X'(t)\,\vec{u}(t) + X(t)\,\vec{u}\,'(t) = A(t)\,X(t)\,\vec{u}(t) + \vec{f}(t).$$

$$X'(t)\,\vec{u}(t) + X(t)\,\vec{u}\,'(t) = X'(t)\,\vec{u}(t) + \vec{f}(t).$$

$$\boxed{\vec{x}_p = X(t)\int [X(t)]^{-1}\vec{f}(t)\;dt.}$$

Παράδειγμα

$$\vec{x}' = \frac{1}{t^2+1}\begin{bmatrix} t & -1 \\ 1 & t \end{bmatrix}\vec{x} + \begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix}(t^2+1). \tag{6}$$

Παράδειγμα

$$\vec{x}\,' = \frac{1}{t^2+1}\begin{bmatrix} t & -1 \\ 1 & t \end{bmatrix}\vec{x} + \begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix}(t^2+1). \qquad (6)$$

$X = \begin{bmatrix} 1 & -t \\ t & 1 \end{bmatrix}$

Παράδειγμα

$$\vec{x}' = \frac{1}{t^2+1}\begin{bmatrix} t & -1 \\ 1 & t \end{bmatrix}\vec{x} + \begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix}(t^2+1). \tag{6}$$

$$X = \begin{bmatrix} 1 & -t \\ t & 1 \end{bmatrix} \qquad [X(t)]^{-1} = \frac{1}{t^2+1}\begin{bmatrix} 1 & t \\ -t & 1 \end{bmatrix}.$$

Παράδειγμα

$$\vec{x}' = \frac{1}{t^2+1}\begin{bmatrix} t & -1 \\ 1 & t \end{bmatrix}\vec{x} + \begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix}(t^2+1). \tag{6}$$

$$X = \left[\begin{smallmatrix} 1 & -t \\ t & 1 \end{smallmatrix}\right] \qquad [X(t)]^{-1} = \frac{1}{t^2+1}\begin{bmatrix} 1 & t \\ -t & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{aligned}
\vec{x}_p &= \begin{bmatrix} 1 & -t \\ t & 1 \end{bmatrix}\int \frac{1}{t^2+1}\begin{bmatrix} 1 & t \\ -t & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix}(t^2+1)\; dt \\
&= \begin{bmatrix} 1 & -t \\ t & 1 \end{bmatrix}\int \begin{bmatrix} 2t \\ -t^2+1 \end{bmatrix}\; dt \\
&= \begin{bmatrix} 1 & -t \\ t & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} t^2 \\ -\frac{1}{3}t^3+t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}t^4 \\ \frac{2}{3}t^3+t \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Παράδειγμα

$$\vec{x}' = \frac{1}{t^2+1}\begin{bmatrix} t & -1 \\ 1 & t \end{bmatrix}\vec{x} + \begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix}(t^2+1). \qquad (6)$$

$$X = \begin{bmatrix} 1 & -t \\ t & 1 \end{bmatrix} \qquad [X(t)]^{-1} = \frac{1}{t^2+1}\begin{bmatrix} 1 & t \\ -t & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \vec{x}_p &= \begin{bmatrix} 1 & -t \\ t & 1 \end{bmatrix}\int \frac{1}{t^2+1}\begin{bmatrix} 1 & t \\ -t & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix}(t^2+1)\, dt \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -t \\ t & 1 \end{bmatrix}\int \begin{bmatrix} 2t \\ -t^2+1 \end{bmatrix} dt \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -t \\ t & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} t^2 \\ -\frac{1}{3}t^3+t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}t^4 \\ \frac{2}{3}t^3+t \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 & -t \\ t & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{3}t^4 \\ \frac{2}{3}t^3+t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 - c_2 t + \frac{1}{3}t^4 \\ c_2 + (c_1+1)t + \frac{2}{3}t^3 \end{bmatrix}.$$

Απροσδιόριστοι συντελεστές

$$\vec{x}'' = A\vec{x} + \vec{F}(t),$$

Απροσδιόριστοι συντελεστές

$$\vec{x}'' = A\vec{x} + \vec{F}(t),$$

Αν $\vec{F}(t)$ είναι της μορφής $\vec{F}_0 \cos \omega t$,

Απροσδιόριστοι συντελεστές

$$\vec{x}'' = A\vec{x} + \vec{F}(t),$$

Αν $\vec{F}(t)$ είναι της μορφής $\vec{F}_0 \cos \omega t$,
μαντεψιά

$$\vec{x}_p = \vec{c} \cos \omega t.$$

Απροσδιόριστοι συντελεστές

$$\vec{x}'' = A\vec{x} + \vec{F}(t),$$

Αν $\vec{F}(t)$ είναι της μορφής $\vec{F}_0 \cos \omega t$,
μαντεψιά

$$\vec{x}_p = \vec{c} \cos \omega t.$$

Αν $\vec{F}(t) = \vec{F}_0 \cos \omega_0 t + \vec{F}_1 \cos \omega_1 t$,

Απροσδιόριστοι συντελεστές

$$\vec{x}'' = A\vec{x} + \vec{F}(t),$$

Αν $\vec{F}(t)$ είναι της μορφής $\vec{F}_0 \cos \omega t$,
μαντεψιά

$$\vec{x}_p = \vec{c} \cos \omega t.$$

Αν $\vec{F}(t) = \vec{F}_0 \cos \omega_0 t + \vec{F}_1 \cos \omega_1 t$,
μαντεψιά $\vec{a} \cos \omega_0 t$ και βρίσκουμε μια λύση του $\vec{x}'' = A\vec{x} + \vec{F}_0 \cos \omega_0 t$,
μαντεψιά $\vec{b} \cos \omega_1 t$ και βρίσκουμε μια λύση του $\vec{x}'' = A\vec{x} + \vec{F}_0 \cos \omega_1 t$.

Απροσδιόριστοι συντελεστές

$$\vec{x}'' = A\vec{x} + \vec{F}(t),$$

Αν $\vec{F}(t)$ είναι της μορφής $\vec{F}_0 \cos \omega t$,
μαντεψιά

$$\vec{x}_p = \vec{c} \cos \omega t.$$

Αν $\vec{F}(t) = \vec{F}_0 \cos \omega_0 t + \vec{F}_1 \cos \omega_1 t$,
μαντεψιά $\vec{a} \cos \omega_0 t$ και βρίσκουμε μια λύση του
$\vec{x}'' = A\vec{x} + \vec{F}_0 \cos \omega_0 t$,
μαντεψιά $\vec{b} \cos \omega_1 t$ και βρίσκουμε μια λύση του
$\vec{x}'' = A\vec{x} + \vec{F}_0 \cos \omega_1 t$.
Προσθέσουμε τις λύσεις.

Ανάλυση ιδιοδιανυσμάτων

$$\vec{x}'' = A\vec{x} + \vec{F}(t),$$

ιδιοτιμές $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ ιδιοδιανύσματα $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ και $E = [\vec{v}_1 \cdots \vec{v}_n]$

Ανάλυση ιδιοδιανυσμάτων

$$\vec{x}'' = A\vec{x} + \vec{F}(t),$$

ιδιοτιμές $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ ιδιοδιανύσματα $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ και $E = [\vec{v}_1 \cdots \vec{v}_n]$

$$\vec{x}(t) = \vec{v}_1 \xi_1(t) + \vec{v}_2 \xi_2(t) + \cdots + \vec{v}_n \xi_n(t).$$

Ανάλυση ιδιοδιανυσμάτων

$$\vec{x}'' = A\vec{x} + \vec{F}(t),$$

ιδιοτιμές $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ ιδιοδιανύσματα $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ και
$E = [\vec{v}_1 \cdots \vec{v}_n]$

$$\vec{x}(t) = \vec{v}_1\, \xi_1(t) + \vec{v}_2\, \xi_2(t) + \cdots + \vec{v}_n \xi_n(t).$$

$$\vec{F}(t) = \vec{v}_1\, g_1(t) + \vec{v}_2\, g_2(t) + \cdots + \vec{v}_n\, g_n(t).$$

οπότε έχουμε $\vec{g} = E^{-1}\vec{F}$.

Ανάλυση ιδιοδιανυσμάτων

$$\vec{x}'' = A\vec{x} + \vec{F}(t),$$

ιδιοτιμές $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ ιδιοδιανύσματα $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ και $E = [\vec{v}_1 \cdots \vec{v}_n]$

$$\vec{x}(t) = \vec{v}_1 \, \xi_1(t) + \vec{v}_2 \, \xi_2(t) + \cdots + \vec{v}_n \, \xi_n(t).$$

$$\vec{F}(t) = \vec{v}_1 \, g_1(t) + \vec{v}_2 \, g_2(t) + \cdots + \vec{v}_n \, g_n(t).$$

οπότε έχουμε $\vec{g} = E^{-1}\vec{F}$.

$$\begin{aligned}
\vec{x}'' &= \vec{v}_1 \, \xi_1'' + \vec{v}_2 \, \xi_2'' + \cdots + \vec{v}_n \, \xi_n'' \\
&= A \left(\vec{v}_1 \, \xi_1 + \vec{v}_2 \, \xi_2 + \cdots + \vec{v}_n \, \xi_n \right) + \vec{v}_1 \, g_1 + \vec{v}_2 \, g_2 + \cdots + \vec{v}_n \, g_n \\
&= A\vec{v}_1 \, \xi_1 + A\vec{v}_2 \, \xi_2 + \cdots + A\vec{v}_n \, \xi_n + \vec{v}_1 \, g_1 + \vec{v}_2 \, g_2 + \cdots + \vec{v}_n \, g_n \\
&= \vec{v}_1 \, \lambda_1 \, \xi_1 + \vec{v}_2 \, \lambda_2 \, \xi_2 + \cdots + \vec{v}_n \, \lambda_n \, \xi_n + \vec{v}_1 \, g_1 + \vec{v}_2 \, g_2 + \cdots + \vec{v}_n \, g_n \\
&= \vec{v}_1 \left(\lambda_1 \, \xi_1 + g_1 \right) + \vec{v}_2 \left(\lambda_2 \, \xi_2 + g_2 \right) + \cdots + \vec{v}_n \left(\lambda_n \, \xi_n + g_n \right).
\end{aligned}$$

Παράδειγμα

$$\vec{x}'' = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \vec{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \cos 3t.$$

Ιδιοτ. -1 και -4, ιδιοδ. $\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right]$ και $\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right]$, $E = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{smallmatrix}\right]$, $E^{-1} = \frac{1}{3}\left[\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{smallmatrix}\right]$.

Παράδειγμα

$$\vec{x}'' = \begin{bmatrix}-3 & 1\\ 2 & -2\end{bmatrix}\vec{x} + \begin{bmatrix}0\\ 2\end{bmatrix}\cos 3t.$$

Ιδιοτ. -1 και -4, ιδιοδ. $\left[\begin{smallmatrix}1\\ 2\end{smallmatrix}\right]$ και $\left[\begin{smallmatrix}1\\ -1\end{smallmatrix}\right]$, $E = \left[\begin{smallmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\end{smallmatrix}\right]$, $E^{-1} = \frac{1}{3}\left[\begin{smallmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\end{smallmatrix}\right]$.

$$\begin{bmatrix}g_1\\ g_2\end{bmatrix} = E^{-1}\vec{F}(t) = \frac{1}{3}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 2\cos 3t\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{2}{3}\cos 3t\\ \frac{-2}{3}\cos 3t\end{bmatrix}.$$

Παράδειγμα

$$\vec{x}'' = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \vec{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \cos 3t.$$

Ιδιοτ. -1 και -4, ιδιοδ. $\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right]$ και $\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right]$, $E = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{smallmatrix}\right]$, $E^{-1} = \frac{1}{3} \left[\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{smallmatrix}\right]$.

$$\begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} = E^{-1} \vec{F}(t) = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \cos 3t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \cos 3t \\ \frac{-2}{3} \cos 3t \end{bmatrix}.$$

$$\xi_1'' = -\xi_1 + \frac{2}{3} \cos 3t,$$

$$\xi_2'' = -4\,\xi_2 - \frac{2}{3} \cos 3t.$$

Διαφορικές Εξισώσεις

Σειρές Fourier

Μανόλης Βάβαλης

Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Η/Υ
Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

29 Απριλίου 2015, Βόλος

Προβλήματα συνοριακών τιμών

$$x'' + \lambda x = 0, \quad x(\alpha) = 0, \quad x(b) = 0,$$

Προβλήματα συνοριακών τιμών

$$x'' + \lambda x = 0, \quad x(\alpha) = 0, \quad x(b) = 0,$$

Παράδειγμα: $\lambda = 1$, $\alpha = 0$, $b = \pi$.

$$x'' + x = 0, \quad x(0) = 0, \quad x(\pi) = 0.$$

Προβλήματα συνοριακών τιμών

$$x'' + \lambda x = 0, \quad x(\alpha) = 0, \quad x(b) = 0,$$

Παράδειγμα: $\lambda = 1$, $\alpha = 0$, $b = \pi$.

$$x'' + x = 0, \quad x(0) = 0, \quad x(\pi) = 0.$$

Γενική λύση της εξίσωσης: $x = A\cos t + B\sin t$.

Προβλήματα συνοριακών τιμών

$$x'' + \lambda x = 0, \quad x(\alpha) = 0, \quad x(b) = 0,$$

Παράδειγμα: $\lambda = 1$, $\alpha = 0$, $b = \pi$.

$$x'' + x = 0, \quad x(0) = 0, \quad x(\pi) = 0.$$

Γενική λύση της εξίσωσης: $x = A\cos t + B\sin t$.
Άπειρες λύσεις του προβλήματος: $x = B\sin t$.

Προβλήματα συνοριακών τιμών

$$x'' + \lambda x = 0, \quad x(\alpha) = 0, \quad x(b) = 0,$$

Παράδειγμα: $\lambda = 1$, $\alpha = 0$, $b = \pi$.

$$x'' + x = 0, \quad x(0) = 0, \quad x(\pi) = 0.$$

Γενική λύση της εξίσωσης: $x = A\cos t + B\sin t$.
Άπειρες λύσεις του προβλήματος: $x = B\sin t$.

Παράδειγμα: $\lambda = 2$, $\alpha = 0$, $b = \pi$.

$$x'' + 2x = 0, \quad x(0) = 0, \quad x(\pi) = 0.$$

Προβλήματα συνοριακών τιμών

$$x'' + \lambda x = 0, \quad x(\alpha) = 0, \quad x(b) = 0,$$

Παράδειγμα: $\lambda = 1$, $\alpha = 0$, $b = \pi$.

$$x'' + x = 0, \quad x(0) = 0, \quad x(\pi) = 0.$$

Γενική λύση της εξίσωσης: $x = A\cos t + B\sin t$.
Άπειρες λύσεις του προβλήματος: $x = B\sin t$.

Παράδειγμα: $\lambda = 2$, $\alpha = 0$, $b = \pi$.

$$x'' + 2x = 0, \quad x(0) = 0, \quad x(\pi) = 0.$$

Γενική λύση της εξίσωσης: $x = A\cos\sqrt{2}\,t + B\sin\sqrt{2}\,t$.

Προβλήματα συνοριακών τιμών

$$x'' + \lambda x = 0, \quad x(\alpha) = 0, \quad x(b) = 0,$$

Παράδειγμα: $\lambda = 1$, $\alpha = 0$, $b = \pi$.

$$x'' + x = 0, \quad x(0) = 0, \quad x(\pi) = 0.$$

Γενική λύση της εξίσωσης: $x = A\cos t + B\sin t$.
Άπειρες λύσεις του προβλήματος: $x = B\sin t$.

Παράδειγμα: $\lambda = 2$, $\alpha = 0$, $b = \pi$.

$$x'' + 2x = 0, \quad x(0) = 0, \quad x(\pi) = 0.$$

Γενική λύση της εξίσωσης: $x = A\cos\sqrt{2}\,t + B\sin\sqrt{2}\,t$.
Μοναδική λύση του προβλήματος: $x = 0$.

Προβλήματα ιδιοτιμών

$$x'' + \lambda x = 0, \quad x(\alpha) = 0, \quad x(b) = 0, \tag{1}$$

$$x'' + \lambda x = 0, \quad x'(\alpha) = 0, \quad x'(b) = 0, \tag{2}$$

$$x'' + \lambda x = 0, \quad x(\alpha) = x(b), \quad x'(\alpha) = x'(b), \tag{3}$$

Προβλήματα ιδιοτιμών

$$x'' + \lambda x = 0, \quad x(\alpha) = 0, \quad x(b) = 0, \tag{1}$$

$$x'' + \lambda x = 0, \quad x'(\alpha) = 0, \quad x'(b) = 0, \tag{2}$$

$$x'' + \lambda x = 0, \quad x(\alpha) = x(b), \quad x'(\alpha) = x'(b), \tag{3}$$

Ένα αριθμός λ λέγεται *ιδιοτιμή του προβλήματος συνοριακών τιμών* ανν, με δεδομένο το συγκεκριμένο λ, υπάρχει μη-μηδενική λύση του η οποία λέγεται το αντίστοιχο *ιδιοδιάνυσμα*.

Παράδειγμα

$$x'' + \lambda x = 0, \quad x(0) = 0, \quad x(\pi) = 0.$$

Αν $\lambda > 0$ η γενική λύση της $x'' + \lambda x = 0$ είναι

$$x = A\cos\sqrt{\lambda}t + B\sin\sqrt{\lambda}t.$$

Παράδειγμα

$$x'' + \lambda x = 0, \quad x(0) = 0, \quad x(\pi) = 0.$$

Αν $\lambda > 0$ η γενική λύση της $x'' + \lambda x = 0$ είναι

$$x = A \cos \sqrt{\lambda} t + B \sin \sqrt{\lambda} t.$$

$x(0) = 0 \Rightarrow A = 0,$
$0 = x(\pi) = B \sin \sqrt{\lambda} \pi \Rightarrow \sin \sqrt{\lambda} \pi = 0$

Παράδειγμα

$$x'' + \lambda x = 0, \quad x(0) = 0, \quad x(\pi) = 0.$$

Αν $\lambda > 0$ η γενική λύση της $x'' + \lambda x = 0$ είναι

$$x = A\cos\sqrt{\lambda}t + B\sin\sqrt{\lambda}t.$$

$x(0) = 0 \Rightarrow A = 0,$
$0 = x(\pi) = B\sin\sqrt{\lambda}\pi \Rightarrow \sin\sqrt{\lambda}\pi = 0 \quad \sqrt{\lambda} = k$

Παράδειγμα

$$x'' + \lambda x = 0, \quad x(0) = 0, \quad x(\pi) = 0.$$

Αν $\lambda > 0$ η γενική λύση της $x'' + \lambda x = 0$ είναι

$$x = A \cos \sqrt{\lambda} t + B \sin \sqrt{\lambda} t.$$

$x(0) = 0 \Rightarrow A = 0,$
$0 = x(\pi) = B \sin \sqrt{\lambda} \pi \Rightarrow \sin \sqrt{\lambda} \pi = 0 \quad \sqrt{\lambda} = k$
Ιδιοτιμές k^2 $\forall k \geq 1$, ιδιοσυναρτήσεις $x = \sin kt$.

Παράδειγμα

$$x'' + \lambda x = 0, \quad x(0) = 0, \quad x(\pi) = 0.$$

Αν $\lambda > 0$ η γενική λύση της $x'' + \lambda x = 0$ είναι

$$x = A\cos\sqrt{\lambda}t + B\sin\sqrt{\lambda}t.$$

$x(0) = 0 \Rightarrow A = 0,$
$0 = x(\pi) = B\sin\sqrt{\lambda}\pi \Rightarrow \sin\sqrt{\lambda}\pi = 0 \quad \sqrt{\lambda} = k$
Ιδιοτιμές k^2 $\forall k \geq 1$, ιδιοσυναρτήσεις $x = \sin kt$.
Αν $\lambda = 0$ η γενική λύση είναι $x = At + B$.
$x(0) = 0 \Rightarrow B = 0$, $x(\pi) = 0 \Rightarrow A = 0$.

Παράδειγμα

$$x'' + \lambda x = 0, \quad x(0) = 0, \quad x(\pi) = 0.$$

Αν $\lambda > 0$ η γενική λύση της $x'' + \lambda x = 0$ είναι

$$x = A \cos \sqrt{\lambda} t + B \sin \sqrt{\lambda} t.$$

$x(0) = 0 \Rightarrow A = 0,$
$0 = x(\pi) = B \sin \sqrt{\lambda} \pi \Rightarrow \sin \sqrt{\lambda} \pi = 0 \quad \sqrt{\lambda} = k$
Ιδιοτιμές $k^2 \ \forall k \geq 1$, ιδιοσυναρτήσεις $x = \sin kt$.
Αν $\lambda = 0$ η γενική λύση είναι $x = At + B$.
$x(0) = 0 \Rightarrow B = 0,\ x(\pi) = 0 \Rightarrow A = 0.$
$\lambda = 0$ *δεν* είναι ιδιοτιμή.

Συμπέρασμα

$$x'' + \lambda x = 0, \quad x(\alpha) = 0, \quad x(b) = 0,$$

$$\lambda_k = k^2 \quad \text{με ιδιοδιάνυσμα} \quad x_k = \sin kt \quad \forall k \geq 1.$$

Συμπέρασμα

$$x'' + \lambda x = 0, \quad x(\alpha) = 0, \quad x(b) = 0,$$

$$\lambda_k = k^2 \quad \text{με ιδιοδιάνυσμα} \quad x_k = \sin kt \quad \forall k \geq 1.$$

$$x'' + \lambda x = 0, \quad x'(\alpha) = 0, \quad x'(b) = 0,$$

$$\lambda_k = k^2 \quad \text{με ιδιοδιάνυσμα} \quad x_k = \sin kt \qquad \forall k \geq 1.$$

και

$$\lambda_0 = 0 \quad \text{με ιδιοδιάνυσμα} \quad x_0 = 1.$$

Συμπέρασμα

$$x'' + \lambda x = 0, \quad x(\alpha) = 0, \quad x(b) = 0,$$

$$\lambda_k = k^2 \quad \text{με ιδιοδιάνυσμα} \quad x_k = \sin kt \quad \forall k \geq 1.$$

$$x'' + \lambda x = 0, \quad x'(\alpha) = 0, \quad x'(b) = 0,$$

$$\lambda_k = k^2 \quad \text{με ιδιοδιάνυσμα} \quad x_k = \sin kt \qquad \forall k \geq 1.$$

και

$$\lambda_0 = 0 \quad \text{με ιδιοδιάνυσμα} \quad x_0 = 1.$$

$$x'' + \lambda x = 0, \quad x(\alpha) = x(b), \quad x'(\alpha) = x'(b),$$

$$\lambda_k = k^2 \quad \text{με ιδιοδιανύσματα} \quad \cos kt \quad \text{και} \quad \sin kt \quad \forall k \geq 1,$$

$$\lambda_0 = 0 \quad \text{με ιδιοδιάνυσμα} \qquad x_0 = 1.$$

Θεώρημα ορθογωνιότητας

Εάν $x_1(t)$ και $x_2(t)$ είναι δύο ιδιοσυναρτήσεις κάποιου προβλήματος που ανήκει σε κάποια απο τις προηγούμενες τρεις κατηγορίες προβλημάτων που αντιστοιχούν σε δύο διαφορετικές μεταξύ τους ιδιοτιμές λ_1 και λ_2 τότε αυτές είναι *ορθογώνιες* με την εξής έννοια

$$\int_{\alpha}^{b} x_1(t)x_2(t)\, dt = 0.$$

Τριγωνομετρικές ορθογωνιότητες

$$\int_{-\pi}^{\pi} (\sin mt)(\sin nt)\ dt = 0, \qquad \text{όταν } m \neq n,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} (\cos mt)(\cos nt)\ dt = 0, \qquad \text{όταν } m \neq n,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} (\cos mt)(\sin nt)\ dt = 0.$$

Εναλλακτικό θεώρημα του *Fredholm*

Είτε το

$$x'' + \lambda x = 0, \quad x(\alpha) = 0, \quad x(b) = 0 \tag{4}$$

έχει μια μη-μηδενική λύση, είτε το

$$x'' + \lambda x = f(t), \quad x(\alpha) = 0, \quad x(b) = 0 \tag{5}$$

έχει μια μοναδική λύση για κάθε συνεχή f.

Εναλλακτικό θεώρημα του *Fredholm*

Είτε το

$$x'' + \lambda x = 0, \quad x(\alpha) = 0, \quad x(b) = 0 \tag{4}$$

έχει μια μη-μηδενική λύση, είτε το

$$x'' + \lambda x = f(t), \quad x(\alpha) = 0, \quad x(b) = 0 \tag{5}$$

έχει μια μοναδική λύση για κάθε συνεχή f. Δηλαδή

- Αν το λ δεν είναι ιδιοτιμή, τότε το μη-ομογενές πρόβλημα έχει μοναδική λύση για κάθε δεξιό μέλος.
- Αν το λ είναι ιδιοτιμή τότε το πρόβλημα μπορεί να μην έχει λύση για κάποιες f, και επιπρόσθετα, ακόμα και εάν έχει λύση τότε αυτή δεν θα είναι μοναδική.

Περιοδικές συναρτήσεις - Ορισμοί

- Λέμε ότι μια συνάρτηση είναι *περιοδική* με περίοδο P (P-περιοδική) αν ισχύει $f(t) = f(t + P)$ για κάθε t.

Περιοδικές συναρτήσεις - Ορισμοί

- Λέμε ότι μια συνάρτηση είναι *περιοδική* με περίοδο P (P-περιοδική) αν ισχύει $f(t)=f(t+P)$ για κάθε t.
- Μια P-περιοδική συνάρτηση είναι ταυτόχρονα και $2P$-περιοδική, $3P$-περιοδική ...

Περιοδικές συναρτήσεις - Ορισμοί

- Λέμε ότι μια συνάρτηση είναι *περιοδική* με περίοδο P (P-περιοδική) αν ισχύει $f(t) = f(t+P)$ για κάθε t.
- Μια P-περιοδική συνάρτηση είναι ταυτόχρονα και $2P$-περιοδική, $3P$-περιοδική ...
- $\cos t$ και $\sin t$ είναι 2π-περιοδική

Περιοδικές συναρτήσεις - Ορισμοί

- Λέμε ότι μια συνάρτηση είναι *περιοδική* με περίοδο P (P-περιοδική) αν ισχύει $f(t) = f(t+P)$ για κάθε t.
- Μια P-περιοδική συνάρτηση είναι ταυτόχρονα και $2P$-περιοδική, $3P$-περιοδική ...
- $\cos t$ και $\sin t$ είναι 2π-περιοδική (όπως και οι $\cos kt$ και $\sin kt$ για κάθε ακέραιο k)

Περιοδικές συναρτήσεις - Ορισμοί

- Λέμε ότι μια συνάρτηση είναι *περιοδική* με περίοδο P (P-περιοδική) αν ισχύει $f(t) = f(t+P)$ για κάθε t.
- Μια P-περιοδική συνάρτηση είναι ταυτόχρονα και $2P$-περιοδική, $3P$-περιοδική ...
- $\cos t$ και $\sin t$ είναι 2π-περιοδική (όπως και οι $\cos kt$ και $\sin kt$ για κάθε ακέραιο k)
- Οι σταθερές συναρτήσεις αποτελούν ακραία παραδείγματα περιοδικών συναρτήσεων

Περιοδικές επεκτάσεις

Επεκτείνουμε περιοδικά $f(t)$ ορισμένη σε κάποιο διάστημα $[-L, L]$ (την *κάνουμε* $2L$-περιοδική συνάρτηση) ορίζοντας μια *νέα* συνάρτηση $F(t)$ τέτοια ώστε

- Για t στο $[-L, L]$, $F(t) = f(t)$
- Για t στο $[L, 3L]$, $F(t) = f(t - 2L)$
- Για t στο $[-3L, -L]$, $F(t) = f(t + 2L)$
- $\ldots$

Περιοδικές επεκτάσεις

Επεκτείνουμε περιοδικά $f(t)$ ορισμένη σε κάποιο διάστημα $[-L, L]$ (την κάνουμε $2L$-περιοδική συνάρτηση) ορίζοντας μια νέα συνάρτηση $F(t)$ τέτοια ώστε

- Για t στο $[-L, L]$, $F(t) = f(t)$
- Για t στο $[L, 3L]$, $F(t) = f(t-2L)$
- Για t στο $[-3L, -L]$, $F(t) = f(t+2L)$
- $\dots$

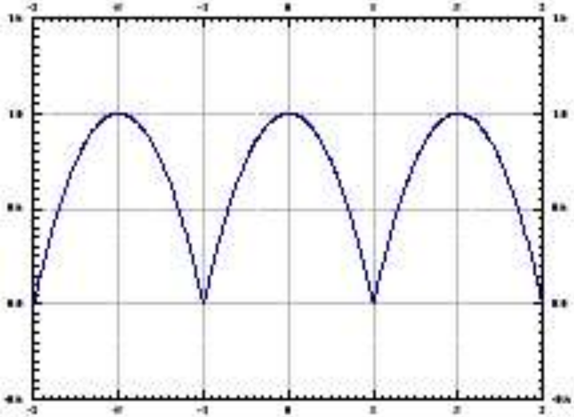
Παράδειγμα: $f(t) = 1 - t^2$, $t \in [-1, 1]$

Περιοδικές επεκτάσεις

Επεκτείνουμε περιοδικά $f(t)$ ορισμένη σε κάποιο διάστημα $[-L, L]$ (την κάνουμε $2L$-περιοδική συνάρτηση) ορίζοντας μια νέα συνάρτηση $F(t)$ τέτοια ώστε

- Για t στο $[-L, L]$, $F(t) = f(t)$
- Για t στο $[L, 3L]$, $F(t) = f(t-2L)$
- Για t στο $[-3L, -L]$, $F(t) = f(t+2L)$
- ...

Παράδειγμα: $f(t) = 1 - t^2$, $t \in [-1, 1]$



Ανάλυση ιδιοδιανυσμάτων

Γράψτε το $\vec{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ σαν γραμμικό συνδυασμό των $\vec{w_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ και $\vec{w_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Ανάλυση ιδιοδιανυσμάτων

Γράψτε το $\vec{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ σαν γραμμικό συνδυασμό των $\vec{w_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ και $\vec{w_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.
$\langle \vec{w}_1, \vec{w}_2 \rangle = 1(1) + (-1)1 = 0.$

Ανάλυση ιδιοδιανυσμάτων

Γράψτε το $\vec{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ σαν γραμμικό συνδυασμό των
$\vec{w_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ και $\vec{w_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.
$\langle \vec{w}_1, \vec{w}_2 \rangle = 1(1) + (-1)1 = 0.$

$$\alpha_1 = \frac{\langle \vec{v}, \vec{w_1} \rangle}{\langle \vec{w}_1, \vec{w_1} \rangle} = \frac{2(1) + 3(-1)}{1(1) + (-1)(-1)} = \frac{-1}{2}.$$

Ανάλυση ιδιοδιανυσμάτων

Γράψτε το $\vec{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ σαν γραμμικό συνδυασμό των $\vec{w_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ και $\vec{w_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.
$\langle \vec{w}_1, \vec{w}_2 \rangle = 1(1) + (-1)1 = 0.$

$$\alpha_1 = \frac{\langle \vec{v}, \vec{w_1} \rangle}{\langle \vec{w}_1, \vec{w_1} \rangle} = \frac{2(1) + 3(-1)}{1(1) + (-1)(-1)} = \frac{-1}{2}.$$

$$\alpha_2 = \frac{\langle \vec{v}, \vec{w_2} \rangle}{\langle \vec{w}_2, \vec{w_2} \rangle} = \frac{2+3}{1+1} = \frac{5}{2}.$$

Ανάλυση ιδιοδιανυσμάτων

Γράψτε το $\vec{v} = \left[\begin{smallmatrix}2\\3\end{smallmatrix}\right]$ σαν γραμμικό συνδυασμό των $\vec{w_1} = \left[\begin{smallmatrix}1\\-1\end{smallmatrix}\right]$ και $\vec{w_2} = \left[\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right]$.
$\langle \vec{w}_1, \vec{w}_2 \rangle = 1(1) + (-1)1 = 0$.

$$\alpha_1 = \frac{\langle \vec{v}, \vec{w_1} \rangle}{\langle \vec{w}_1, \vec{w_1} \rangle} = \frac{2(1) + 3(-1)}{1(1) + (-1)(-1)} = \frac{-1}{2}.$$

$$\alpha_2 = \frac{\langle \vec{v}, \vec{w_2} \rangle}{\langle \vec{w}_2, \vec{w_2} \rangle} = \frac{2+3}{1+1} = \frac{5}{2}.$$

$$\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix} = \frac{-1}{2}\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix} + \frac{5}{2}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}.$$

Ορισμοί

Σειρά Fourier του $f(t)$

Ορισμοί

Σειρά Fourier του $f(t)$

$$\boxed{f(t) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos nt + b_n \sin nt.}$$

Ορισμοί

Σειρά Fourier του $f(t)$

$$\boxed{f(t) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos nt + b_n \sin nt.}$$

Εσωτερικό γινόμενο συναρτήσεων

Ορισμοί

Σειρά Fourier του $f(t)$

$$\boxed{f(t) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos nt + b_n \sin nt.}$$

Εσωτερικό γινόμενο συναρτήσεων

$$\langle f(t), g(t) \rangle \overset{\text{ορισμός}}{=} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)\, dt.$$

Ανάπτυγμα *Fourier* της $f(x)$

$$f(t) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos nt + b_n \sin nt.$$

Ανάπτυγμα *Fourier* της $f(x)$

$$f(t) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos nt + b_n \sin nt.$$

όπου

$$\alpha_n = \frac{\langle f(t), \cos nt \rangle}{\langle \cos nt , \cos nt \rangle} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt \; dt,$$

$$b_n = \frac{\langle f(t), \sin nt \rangle}{\langle \sin nt , \sin nt \rangle} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt \; dt.$$

Παράδειγμα

Έστω η συνάρτηση

$$f(t) = t$$

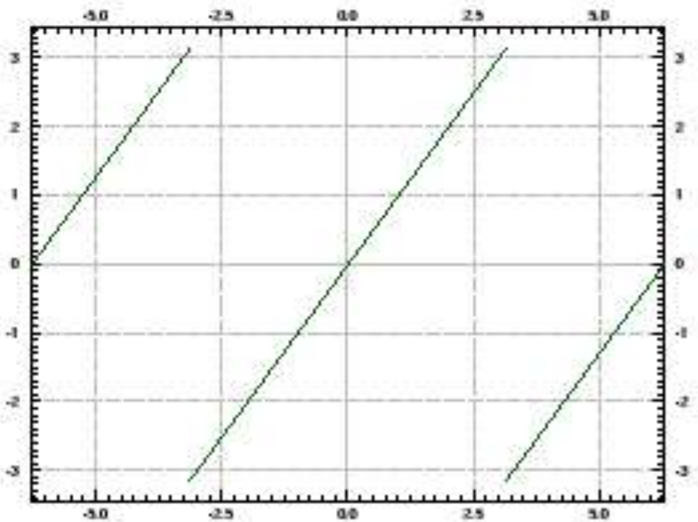
για t στο διάστημα $(-\pi, \pi]$. Επεκτείνετε περιοδικά την $f(t)$ και γράψτε την σε μορφή σειράς *Fourier*.

Παράδειγμα

Έστω η συνάρτηση

$$f(t) = t$$

για t στο διάστημα $(-\pi, \pi]$. Επεκτείνετε περιοδικά την $f(t)$ και γράψτε την σε μορφή σειράς *Fourier*.



Παράδειγμα (συνέχεια)

Θυμηθείτε ότι το ολοκλήρωμα μιας

- περιττής συνάρτησης σε ένα συμμετρικό διάστημα είναι μηδέν.
- άρτιας συνάρτησης σε ένα συμμετρικό διάστημα ισούται με το διπλάσιο του ολοκληρώματος στο μισό διάστημα.

Παράδειγμα (συνέχεια)

Θυμηθείτε ότι το ολοκλήρωμα μιας

- περιττής συνάρτησης σε ένα συμμετρικό διάστημα είναι μηδέν.
- άρτιας συνάρτησης σε ένα συμμετρικό διάστημα ισούται με το διπλάσιο του ολοκληρώματος στο μισό διάστημα.

$$\alpha_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t \cos mt \; dt = 0.$$

Παράδειγμα (συνέχεια)

Θυμηθείτε ότι το ολοκλήρωμα μιας

- περιττής συνάρτησης σε ένα συμμετρικό διάστημα είναι μηδέν.
- άρτιας συνάρτησης σε ένα συμμετρικό διάστημα ισούται με το διπλάσιο του ολοκληρώματος στο μισό διάστημα.

$$\alpha_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t\cos mt \ dt = 0.$$

$$\begin{aligned} b_m &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t\sin mt \ dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t\sin mt \ dt \\ &= \frac{2}{\pi}\left(\left[\frac{-t\cos mt}{m}\right]_{t=0}^{\pi} + \frac{1}{m}\int_0^{\pi} \cos mt \ dt\right) \\ &= \frac{2}{\pi}\left(\frac{-\pi\cos m\pi}{m} + 0\right) = \frac{-2\cos m\pi}{m} = \frac{2(-1)^{m+1}}{m}. \end{aligned}$$

Παράδειγμα (συνέχεια)

Θυμηθείτε ότι το ολοκλήρωμα μιας

- περιττής συνάρτησης σε ένα συμμετρικό διάστημα είναι μηδέν.
- άρτιας συνάρτησης σε ένα συμμετρικό διάστημα ισούται με το διπλάσιο του ολοκληρώματος στο μισό διάστημα.

$$\alpha_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t\cos mt \ dt = 0.$$

$$b_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t\sin mt \ dt = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} t\sin mt \ dt$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\frac{-\pi\cos m\pi}{m} + 0\right) = \frac{-2\cos m\pi}{m} = \frac{2(-1)^{m+1}}{m}.$$

Παράδειγμα (συνέχεια)

Θυμηθείτε ότι το ολοκλήρωμα μιας

- περιττής συνάρτησης σε ένα συμμετρικό διάστημα είναι μηδέν.
- άρτιας συνάρτησης σε ένα συμμετρικό διάστημα ισούται με το διπλάσιο του ολοκληρώματος στο μισό διάστημα.

$$\alpha_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t\cos mt \ dt = 0.$$

$$b_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t\sin mt \ dt = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} t\sin mt \ dt$$

$$\frac{2(-1)^{m+1}}{m}.$$

Παράδειγμα (συνέχεια)

Θυμηθείτε ότι το ολοκλήρωμα μιας

- περιττής συνάρτησης σε ένα συμμετρικό διάστημα είναι μηδέν.
- άρτιας συνάρτησης σε ένα συμμετρικό διάστημα ισούται με το διπλάσιο του ολοκληρώματος στο μισό διάστημα.

$$\alpha_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t\cos mt \; dt = 0.$$

$$\begin{aligned} b_m &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t\sin mt \; dt = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} t\sin mt \; dt \\ &= \frac{2}{\pi}\left(\left[\frac{-t\cos mt}{m}\right]_{t=0}^{\pi} + \frac{1}{m}\int_0^{\pi} \cos mt \; dt \right) \\ &= \frac{2}{\pi}\left(\frac{-\pi\cos m\pi}{m} + 0 \right) = \frac{-2\cos m\pi}{m} = \frac{2(-1)^{m+1}}{m}. \end{aligned}$$

Παράδειγμα (συνέχεια)

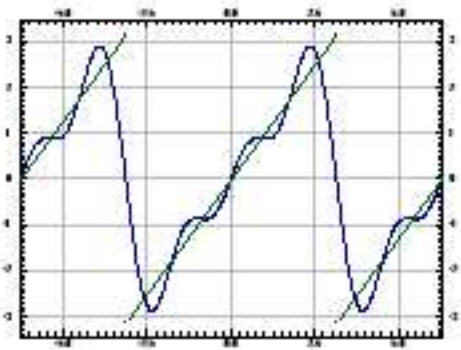
$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\,(-1)^{n+1}}{n} \sin nt =$$

Παράδειγμα (συνέχεια)

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\,(-1)^{n+1}}{n} \sin nt = 2\,\sin t - \sin 2\,t + \frac{2}{3} \sin 3\,t + \cdots$$

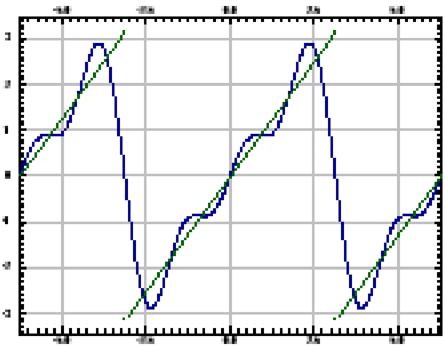
Παράδειγμα (συνέχεια)

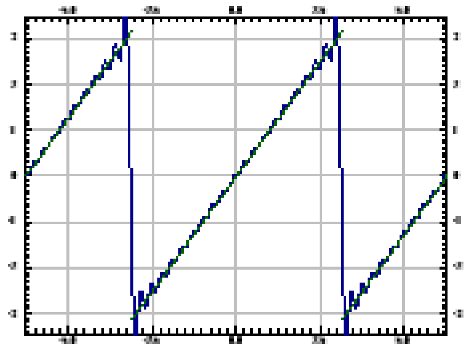
$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\,(-1)^{n+1}}{n} \sin nt = 2\,\sin t - \sin 2\,t + \frac{2}{3} \sin 3\,t + \cdots$$



Παράδειγμα (συνέχεια)

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\,(-1)^{n+1}}{n} \sin nt = 2\,\sin t - \sin 2\,t + \frac{2}{3} \sin 3\,t + \cdots$$



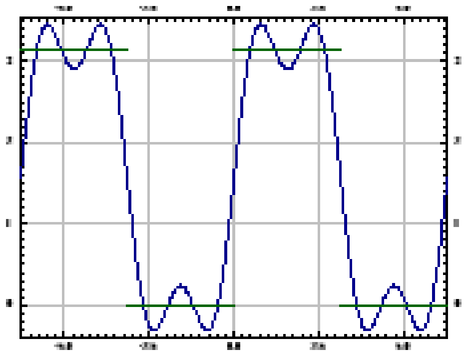


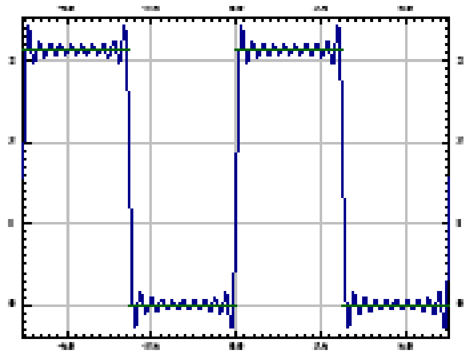
Παράδειγμα

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{αν } -\pi < t \leq 0, \\ \pi & \text{αν } 0 < t \leq \pi. \end{cases}$$

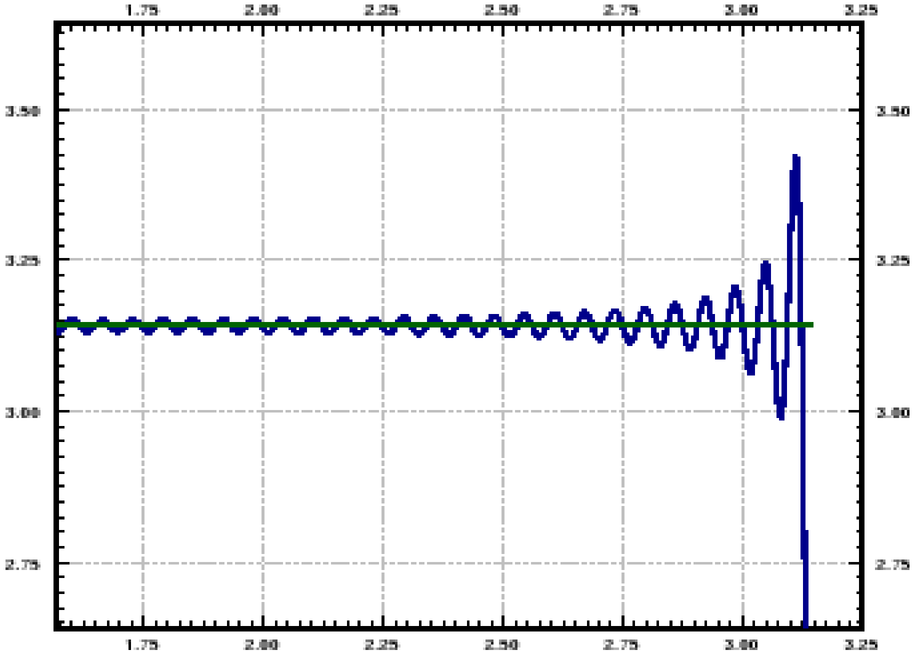
Παράδειγμα

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{αν } -\pi < t \leq 0, \\ \pi & \text{αν } 0 < t \leq \pi. \end{cases} = \frac{\pi}{2} + 2\,\sin t + \frac{2}{3}\,\sin 3t + \cdots$$





φαινομένο του *Gibbs*



$2L$-περιοδικές συναρτήσεις

Αν η $f(t)$ είναι $2L$-περιοδική, ο μετασχηματισμός $s = \frac{\pi}{L} t$ μας δίνει την 2π-περιοδική

$$g(s) = f\left(\frac{L}{\pi} s\right)$$

με ανάπτυγμα

$$\boxed{f(t) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos \frac{n\pi}{L} t + b_n \sin \frac{n\pi}{L} t.}$$

Εάν αλλάξουμε την μεταβλητή t σε s βλέπουμε ότι

$$g(s) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos ns + b_n \sin ns.$$

2L-περιοδικές συναρτήσεις (συνέχεια)

$$\boxed{\begin{aligned}
\alpha_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(s)\ ds = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\ dt,\\
\alpha_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(s)\cos ns\ ds = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\cos\frac{n\pi}{L}t\ dt,\\
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(s)\sin ns\ ds = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\sin\frac{n\pi}{L}t\ dt.
\end{aligned}}$$

Παράδειγμα: $f(t) = |t|, -1 < t < 1$

Παράδειγμα: $f(t) = |t|, -1 < t < 1$

$$\begin{aligned}
\alpha_n &= 2\int_0^1 t\cos n\pi t \; dt \\
&= 2\left[\frac{t}{n\pi}\sin n\pi t\right]_{t=0}^1 - 2\int_0^1 \frac{1}{n\pi}\sin n\pi t \; dt \\
&= 0 + \frac{1}{n^2\pi^2}\Big[\cos n\pi t\Big]_{t=0}^1 = \frac{2((-1)^n - 1)}{n^2\pi^2} = \begin{cases} 0 & n \text{ άρτιο} \\ \frac{-4}{n^2\pi^2} & n \text{ περιττό} \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\alpha_0 = \int_{-1}^1 |t| \; dt = 1, \quad b_n = \int_{-1}^1 f(t)\sin n\pi t \; dt = 0.$$

Άρα

$$f(t) = \frac{1}{2} + \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ περιττός}}} \frac{-4}{n^2\pi^2}\cos n\pi t.$$

Παράδειγμα: $f(t) = |t|, -1 < t < 1$

$$\alpha_n = 2\int_0^1 t\cos n\pi t \; dt$$

$$= 0 + \frac{1}{n^2\pi^2}\Big[\cos n\pi t\Big]_{t=0}^{1} = \frac{2((-1)^n - 1)}{n^2\pi^2} = \begin{cases} 0 & n \text{ άρτιο} \\ \frac{-4}{n^2\pi^2} & n \text{ περιττό} \end{cases}$$

$$\alpha_0 = \int_{-1}^{1} |t| \; dt = 1, \quad b_n = \int_{-1}^{1} f(t)\sin n\pi t \; dt = 0.$$

Άρα

$$f(t) = \frac{1}{2} + \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ περιττός}}} \frac{-4}{n^2\pi^2}\cos n\pi t.$$

Παράδειγμα: $f(t) = |t|, -1 < t < 1$

$$\alpha_n = 2\int_0^1 t\cos n\pi t \; dt$$

$$\frac{2((-1)^n - 1)}{n^2\pi^2} = \begin{cases} 0 & n \text{ άρτιο} \\ \frac{-4}{n^2\pi^2} & n \text{ περιττό} \end{cases}$$

$$\alpha_0 = \int_{-1}^{1} |t| \; dt = 1, \quad b_n = \int_{-1}^{1} f(t)\sin n\pi t \; dt = 0.$$

Άρα

$$f(t) = \frac{1}{2} + \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ περιττός}}} \frac{-4}{n^2\pi^2}\cos n\pi t.$$

Παράδειγμα: $f(t) = |t|, -1 < t < 1$

$$\alpha_n = 2\int_0^1 t \cos n\pi t \; dt$$

$$\begin{cases} 0 & n \text{ άρτιο} \\ \frac{-4}{n^2\pi^2} & n \text{ περιττό} \end{cases}$$

$$\alpha_0 = \int_{-1}^{1} |t| \; dt = 1, \quad b_n = \int_{-1}^{1} f(t) \sin n\pi t \; dt = 0.$$

Άρα

$$f(t) = \frac{1}{2} + \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ περιττός}}} \frac{-4}{n^2\pi^2} \cos n\pi t.$$

Παράδειγμα: $f(t) = |t|, -1 < t < 1$

$$
\begin{aligned}
\alpha_n &= 2\int_0^1 t\cos n\pi t \; dt \\
&= 2\left[\frac{t}{n\pi}\sin n\pi t\right]_{t=0}^1 - 2\int_0^1 \frac{1}{n\pi}\sin n\pi t \; dt \\
&= 0 + \frac{1}{n^2\pi^2}\left[\cos n\pi t\right]_{t=0}^1 = \frac{2((-1)^n - 1)}{n^2\pi^2} = \begin{cases} 0 & n \text{ άρτιο} \\ \frac{-4}{n^2\pi^2} & n \text{ περιττό} \end{cases}
\end{aligned}
$$

Παράδειγμα: $f(t) = |t|, -1 < t < 1$

$$
\begin{aligned}
\alpha_n &= 2\int_0^1 t\cos n\pi t \; dt \\
&= 2\left[\frac{t}{n\pi}\sin n\pi t\right]_{t=0}^{1} - 2\int_0^1 \frac{1}{n\pi}\sin n\pi t \; dt \\
&= 0 + \frac{1}{n^2\pi^2}\Big[\cos n\pi t\Big]_{t=0}^{1} = \frac{2((-1)^n - 1)}{n^2\pi^2} = \begin{cases} 0 & n \text{ άρτιο} \\ \frac{-4}{n^2\pi^2} & n \text{ περιττό} \end{cases}
\end{aligned}
$$

$$
\alpha_0 = \int_{-1}^{1} |t| \; dt = 1, \quad b_n = \int_{-1}^{1} f(t)\sin n\pi t \; dt = 0.
$$

Παράδειγμα: $f(t) = |t|, -1 < t < 1$

$$
\begin{aligned}
\alpha_n &= 2\int_0^1 t\cos n\pi t \; dt \\
&= 2\left[\frac{t}{n\pi}\sin n\pi t\right]_{t=0}^{1} - 2\int_0^1 \frac{1}{n\pi}\sin n\pi t \; dt \\
&= 0 + \frac{1}{n^2\pi^2}\Big[\cos n\pi t\Big]_{t=0}^{1} = \frac{2((-1)^n - 1)}{n^2\pi^2} = \begin{cases} 0 & n \text{ άρτιο} \\ \frac{-4}{n^2\pi^2} & n \text{ περιττό} \end{cases}
\end{aligned}
$$

$$
\alpha_0 = \int_{-1}^{1} |t| \; dt = 1, \quad b_n = \int_{-1}^{1} f(t)\sin n\pi t \; dt = 0.
$$

Άρα

$$
f(t) = \frac{1}{2} + \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ περιττός}}} \frac{-4}{n^2\pi^2}\cos n\pi t.
$$

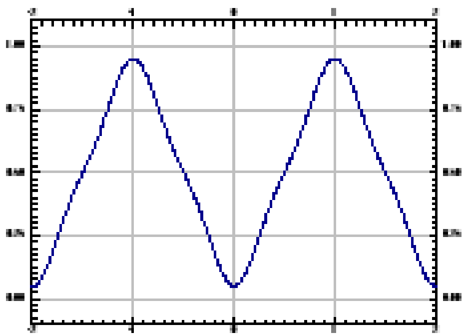
Παράδειγμα: $f(t)=|t|, -1 < t < 1$ (συνέχεια)

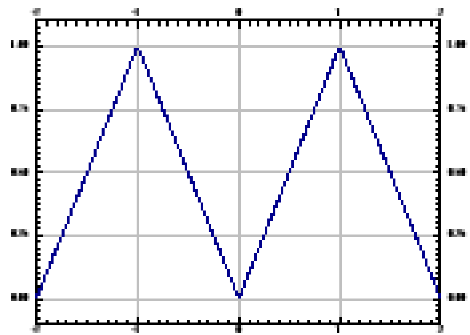
Παράδειγμα: $f(t) = |t|, -1 < t < 1$ (συνέχεια)

$$f(t) \approx \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\cos \pi t - \frac{4}{9\pi^2}\cos 3\pi t - \cdots$$

Παράδειγμα: $f(t) = |t|, -1 < t < 1$ (συνέχεια)

$$f(t) \approx \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\cos \pi t - \frac{4}{9\pi^2}\cos 3\pi t - \cdots$$





Περιττές και άρτιες περιοδικές συναρτήσεις

Αν $f(t)$ ορισμένη στο $[0, L]$ τότε

$$F_{\text{περιττή}}(t) \overset{\text{ορισμός}}{=} \begin{cases} f(t) & \text{αν } 0 \leq t \leq L, \\ -f(-t) & \text{αν } -L < t < 0, \end{cases}$$

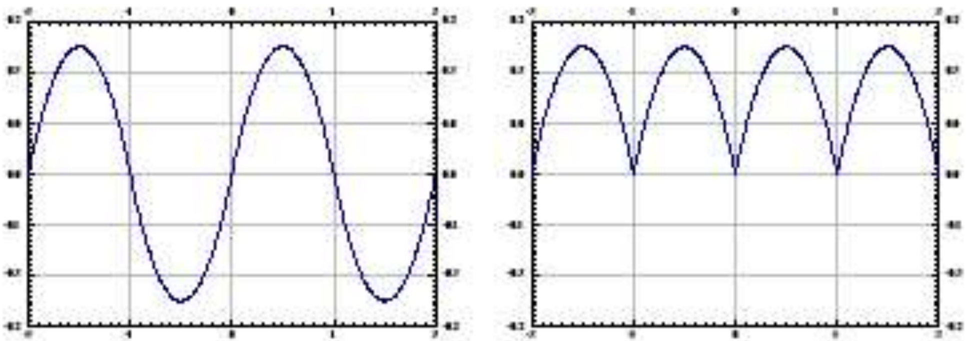
$$F_{\text{άρτια}}(t) \overset{\text{ορισμός}}{=} \begin{cases} f(t) & \text{αν } 0 \leq t \leq L, \\ f(-t) & \text{αν } -L < t < 0. \end{cases}$$

Περιττές και άρτιες περιοδικές συναρτήσεις

Αν $f(t)$ ορισμένη στο $[0, L]$ τότε

$$F_{\text{περιττή}}(t) \overset{\text{ορισμός}}{=} \begin{cases} f(t) & \text{αν } 0 \leq t \leq L, \\ -f(-t) & \text{αν } -L < t < 0, \end{cases}$$

$$F_{\text{άρτια}}(t) \overset{\text{ορισμός}}{=} \begin{cases} f(t) & \text{αν } 0 \leq t \leq L, \\ f(-t) & \text{αν } -L < t < 0. \end{cases}$$



Σχήμα : Περιττή και άρτια 2-περιοδική επέκταση της $f(t) = t(1-t)$, $0 \leq t \leq 1$.

Σειρές *Fourier* άρτιων και περιττών επεκτάσεων

Θεώρημα $f(t)$ μια τμηματικά συνεχής στο $[0, L]$ τότε η περιττή της επέκταση έχει το εξής ανάπτυγμα.

$$\boxed{F_{\text{περιττή}}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{L} t,}$$

$$\boxed{b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(t) \sin \frac{n\pi}{L} t \; dt.}$$

Η άρτια επέκταση της $f(t)$ έχει το εξής ανάπτυγμα

$$\boxed{F_{\text{άρτια}}(t) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos \frac{n\pi}{L} t,}$$

$$\boxed{\alpha_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(t) \cos \frac{n\pi}{L} t \; dt.}$$

Παράδειγμα:

$$x''(t) + 2x(t) = t, \quad x(0) = 0, \quad x(1) = 0$$

Παράδειγμα:

$$x''(t) + 2x(t) = t, \quad x(0) = 0, \quad x(1) = 0$$

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin n\pi t, \quad c_n = 2\int_0^1 t \sin n\pi t \; dt = \frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi}.$$

Παράδειγμα:

$$x''(t) + 2x(t) = t, \quad x(0) = 0, \quad x(1) = 0$$

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin n\pi t, \quad c_n = 2\int_0^1 t \sin n\pi t \; dt = \frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi}.$$

$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\pi t.$$

Παράδειγμα:

$$x''(t) + 2x(t) = t, \quad x(0) = 0, \quad x(1) = 0$$

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin n\pi t, \quad c_n = 2\int_0^1 t \sin n\pi t \; dt = \frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi}.$$

$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\pi t.$$

$$\begin{aligned} x''(t) + 2x(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} -b_n n^2 \pi^2 \sin n\pi t + 2\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\pi t \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n (2 - n^2\pi^2) \sin n\pi t. \end{aligned}$$

Παράδειγμα:

$$x''(t) + 2x(t) = t, \quad x(0) = 0, \quad x(1) = 0$$

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin n\pi t, \quad c_n = 2\int_0^1 t \sin n\pi t \; dt = \frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi}.$$

$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\pi t.$$

$$x''(t) + 2x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} -b_n n^2\pi^2 \sin n\pi t + 2\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\pi t$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} b_n(2 - n^2\pi^2) \sin n\pi t.$$

$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi(2 - n^2\pi^2)} \sin n\pi t.$$

Παράδειγμα:

$$x''(t) + 2x(t) = t, \quad x'(0) = 0, \quad x'(1) = 0$$

$$f(t) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos n\pi t,$$

Παράδειγμα:

$$x''(t) + 2x(t) = t, \quad x'(0) = 0, \quad x'(1) = 0$$

$$f(t) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos n\pi t,$$

$$c_0 = 2\int_0^1 t \; dt = 1,$$

Παράδειγμα:

$$x''(t) + 2x(t) = t, \quad x'(0) = 0, \quad x'(1) = 0$$

$$f(t) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos n\pi t,$$

$$c_0 = 2\int_0^1 t \; dt = 1,$$

$$c_n = 2\int_0^1 t \cos n\pi t \; dt = \frac{2((-1)^n - 1)}{\pi^2 n^2} = \begin{cases} \frac{-4}{\pi^2 n^2} & n \text{ περιττό}, \\ 0 & n \text{ άρτιο}. \end{cases}$$

Παράδειγμα:

$$x''(t) + 2x(t) = t, \quad x'(0) = 0, \quad x'(1) = 0$$

$$f(t) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos n\pi t,$$

$$c_0 = 2\int_0^1 t \, dt = 1,$$

$$c_n = 2\int_0^1 t\cos n\pi t \, dt = \frac{2((-1)^n - 1)}{\pi^2 n^2} = \begin{cases} \frac{-4}{\pi^2 n^2} & n \text{ περιττό}, \\ 0 & n \text{ άρτιο}. \end{cases}$$

$$x(t) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos n\pi t.$$

Παράδειγμα (συνέχεια): $x''(t) + 2x(t) = t, \quad x'(0) = 0, \quad x'(1) = 0$

$$
\begin{aligned}
x''(t) + 2x(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \Big[-\alpha_n n^2 \pi^2 \cos n\pi t \Big] + \alpha_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \Big[\alpha_n \cos n\pi t \Big] \\
&= \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n (2 - n^2 \pi^2) \cos n\pi t \\
&= f(t) = \frac{1}{2} + \sum_{\substack{n=1 \\ n \ \text{περιττό}}}^{\infty} \frac{-2}{\pi^2 n^2} \cos n\pi t.
\end{aligned}
$$

Παράδειγμα (συνέχεια): $x''(t) + 2x(t) = t, \quad x'(0) = 0, \quad x'(1) = 0$

$$x''(t) + 2x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \Big[-\alpha_n n^2 \pi^2 \cos n\pi t \Big] + \alpha_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \Big[\alpha_n \cos n\pi t \Big]$$

$$= \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n (2 - n^2 \pi^2) \cos n\pi t$$

$$= f(t) = \frac{1}{2} + \sum_{\substack{n=1 \\ n \ \text{περιττό}}}^{\infty} \frac{-2}{\pi^2 n^2} \cos n\pi t.$$

$$x(t) = \sum_{\substack{n=1 \\ n \ \text{περιττό}}}^{\infty} \frac{-4}{n^2 \pi^2 (2 - n^2 \pi^2)} \cos n\pi t.$$

Εξαναγκασμένες Ταλαντώσεις

$$mx'' + kx = 0 \Rightarrow x(t) = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t,$$

Εξαναγκασμένες Ταλαντώσεις

$$mx'' + kx = 0 \Rightarrow x(t) = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t, \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Εξαναγκασμένες Ταλαντώσεις

$$mx'' + kx = 0 \Rightarrow x(t) = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t, \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$mx''(t) + kx(t) = F(t) \Rightarrow A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t + x_{sp}$$

Εξαναγκασμένες Ταλαντώσεις

$$mx'' + kx = 0 \Rightarrow x(t) = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t, \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$mx''(t) + kx(t) = F(t) \Rightarrow A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t + x_{sp}$$

$$F(t) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos\frac{n\pi}{L}t + d_n \sin\frac{n\pi}{L}t$$

Εξαναγκασμένες Ταλαντώσεις

$$mx'' + kx = 0 \Rightarrow x(t) = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t, \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$mx''(t) + kx(t) = F(t) \Rightarrow A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t + x_{sp}$$

$$F(t) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos\frac{n\pi}{L}t + d_n \sin\frac{n\pi}{L}t$$

$$x(t) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos\frac{n\pi}{L}t + b_n \sin\frac{n\pi}{L}t$$

Εξαναγκασμένες Ταλαντώσεις

$$mx'' + kx = 0 \Rightarrow x(t) = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t, \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$mx''(t) + kx(t) = F(t) \Rightarrow A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t + x_{sp}$$

$$F(t) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos\frac{n\pi}{L}t + d_n \sin\frac{n\pi}{L}t$$

$$x(t) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos\frac{n\pi}{L}t + b_n \sin\frac{n\pi}{L}t$$

Αντικαθιστούμε το x στην εξίσωση και υπολογίζουμε τα α_n και b_n συναρτήσει των c_n και d_n.

Παράδειγμα

$$x'' + 2x = F(t) = \begin{cases} 1 & \alpha\nu \ 0 < t < 1, \\ 0 & \alpha\nu \ -1 < t < 0, \end{cases}$$

Παράδειγμα

$$x'' + 2x = F(t) = \begin{cases} 1 & \alpha\nu \ \ 0 < t < 1, \\ 0 & \alpha\nu \ \ -1 < t < 0, \end{cases}$$

$$F(t) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos n\pi t + d_n \sin n\pi t$$

Παράδειγμα

$$x'' + 2x = F(t) = \begin{cases} 1 & \alpha\nu \;\; 0 < t < 1, \\ 0 & \alpha\nu \;\; -1 < t < 0, \end{cases}$$

$$F(t) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos n\pi t + d_n \sin n\pi t$$

$$c_n = \int_{-1}^{1} F(t) \cos n\pi t \; dt = 0$$

Παράδειγμα

$$x'' + 2x = F(t) = \begin{cases} 1 & \text{αν } 0 < t < 1, \\ 0 & \text{αν } -1 < t < 0, \end{cases}$$

$$F(t) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos n\pi t + d_n \sin n\pi t$$

$$c_n = \int_{-1}^{1} F(t) \cos n\pi t \; dt = 0 \qquad c_0 = \int_{-1}^{1} F(t) \; dt = 1$$

Παράδειγμα

$$x'' + 2x = F(t) = \begin{cases} 1 & \alpha\nu \ 0 < t < 1, \\ 0 & \alpha\nu \ -1 < t < 0, \end{cases}$$

$$F(t) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos n\pi t + d_n \sin n\pi t$$

$$c_n = \int_{-1}^{1} F(t) \cos n\pi t \ dt = 0 \qquad c_0 = \int_{-1}^{1} F(t) \ dt = 1$$

$$d_n = \int_{-1}^{1} F(t) \sin n\pi t \ dt$$

Παράδειγμα

$$x'' + 2x = F(t) = \begin{cases} 1 & \text{αν } 0 < t < 1, \\ 0 & \text{αν } -1 < t < 0, \end{cases}$$

$$F(t) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos n\pi t + d_n \sin n\pi t$$

$$c_n = \int_{-1}^{1} F(t) \cos n\pi t \; dt = 0 \qquad c_0 = \int_{-1}^{1} F(t) \; dt = 1$$

$$d_n = \int_{-1}^{1} F(t) \sin n\pi t \; dt = \left[\frac{-\cos n\pi t}{n\pi}\right]_{t=0}^{1}$$

Παράδειγμα

$$x'' + 2x = F(t) = \begin{cases} 1 & \text{αν } 0 < t < 1, \\ 0 & \text{αν } -1 < t < 0, \end{cases}$$

$$F(t) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos n\pi t + d_n \sin n\pi t$$

$$c_n = \int_{-1}^{1} F(t) \cos n\pi t \; dt = 0 \qquad c_0 = \int_{-1}^{1} F(t) \; dt = 1$$

$$d_n = \int_{-1}^{1} F(t) \sin n\pi t \; dt = \left[\frac{-\cos n\pi t}{n\pi} \right]_{t=0}^{1} = \frac{1 - (-1)^n}{\pi n} = \begin{cases} \frac{2}{\pi n} & n \text{ τ} \\ 0 & n \text{ ά} \end{cases}$$

Παράδειγμα (συνέχεια)

$$F(t) = \frac{1}{2} + \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ περιττό}}}^{\infty} \frac{2}{\pi n} \sin n\pi t$$

Παράδειγμα (συνέχεια)

$$F(t) = \frac{1}{2} + \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ περιττό}}}^{\infty} \frac{2}{\pi n} \sin n\pi t$$

$$x(t) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos n\pi t + b_n \sin n\pi t$$

Παράδειγμα (συνέχεια)

$$F(t) = \frac{1}{2} + \sum_{\substack{n=1 \\ n \ \text{περιττό}}}^{\infty} \frac{2}{\pi n} \sin n\pi t$$

$$x(t) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos n\pi t + b_n \sin n\pi t = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{\substack{n=1 \\ n \ \text{περιττό}}}^{\infty} b_n \sin n\pi t$$

Παράδειγμα (συνέχεια)

$$F(t) = \frac{1}{2} + \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ περιττό}}}^{\infty} \frac{2}{\pi n} \sin n\pi t$$

$$x(t) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos n\pi t + b_n \sin n\pi t = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ περιττό}}}^{\infty} b_n \sin n\pi t$$

$$x'' + 2x = \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ περιττό}}}^{\infty} \left[-b_n n^2 \pi^2 \sin n\pi t \right] + \alpha_0 + 2 \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ περιττό}}}^{\infty} \left[b_n \sin n\pi t \right]$$

Παράδειγμα (συνέχεια)

$$F(t) = \frac{1}{2} + \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ περιττό}}}^{\infty} \frac{2}{\pi n} \sin n\pi t$$

$$x(t) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos n\pi t + b_n \sin n\pi t = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ περιττό}}}^{\infty} b_n \sin n\pi t$$

$$x'' + 2x = \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ περιττό}}}^{\infty} \left[-b_n n^2 \pi^2 \sin n\pi t \right] + \alpha_0 + 2 \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ περιττό}}}^{\infty} \left[b_n \sin n\pi t \right]$$

$$= \alpha_0 + \sum_{\substack{n=1 \\ n\ n \text{ περιττό}}}^{\infty} b_n (2 - n^2 \pi^2) \sin n\pi t = F(t) = \frac{1}{2} + \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ περιττό}}}^{\infty} \frac{2}{\pi n} \sin n\pi$$

Παράδειγμα (συνέχεια)

$$x_{sp}(t) = \frac{1}{4} + \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ περιττό}}}^{\infty} \frac{2}{\pi n(2 - n^2\pi^2)} \sin n\pi t.$$

Παράδειγμα (συνέχεια)

$$x_{sp}(t) = \frac{1}{4} + \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ περιττό}}}^{\infty} \frac{2}{\pi n(2 - n^2\pi^2)} \sin n\pi t.$$