Συστήματα Συνήθων Διαφορικών Εξισώσεων

Γραμμική άλγεβρα, Μέθοδος ιδιοτιμών, Διανυσματικά πεδία

Μανόλης Βάβαλης

Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών
Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

19 Μαρτίου 2015, Βόλος

Δύο εξισώσεις με δύο αγνώστους

$$\begin{aligned} y_1' &= y_1, \\ y_2' &= y_1 - y_2, \end{aligned}$$

αρχικές συνθήκες: $y_1(0) = 1$, $y_2(0) = 2$.

Δύο εξισώσεις με δύο αγνώστους

$$y_1' = y_1,$$
$$y_2' = y_1 - y_2,$$

αρχικές συνθήκες: $y_1(0) = 1$, $y_2(0) = 2$.

$$y_1 = C_1 e^x$$

Δύο εξισώσεις με δύο αγνώστους

$$\begin{aligned} y_1' &= y_1, \\ y_2' &= y_1 - y_2, \end{aligned}$$

αρχικές συνθήκες: $y_1(0) = 1$, $y_2(0) = 2$.

$$y_1 = C_1 e^x \;\Rightarrow\; y_2' = C_1 e^x - y_2$$

.

Δύο εξισώσεις με δύο αγνώστους

$$\begin{aligned} y_1' &= y_1, \\ y_2' &= y_1 - y_2, \end{aligned}$$

αρχικές συνθήκες: $y_1(0) = 1$, $y_2(0) = 2$.

$$y_1 = C_1 e^x \;\Rightarrow\; y_2' = C_1 e^x - y_2$$

.

$$e^x y_2 = \frac{C_1}{2} e^{2x} + C_2 \;\Rightarrow\; y_2 = \frac{C_1}{2} e^x + C_2 e^{-x}$$

Δύο εξισώσεις με δύο αγνώστους

$$
\begin{aligned}
y_1' &= y_1, \\
y_2' &= y_1 - y_2,
\end{aligned}
$$

αρχικές συνθήκες: $y_1(0) = 1$, $y_2(0) = 2$.

$$y_1 = C_1 e^x \;\Rightarrow\; y_2' = C_1 e^x - y_2$$

.

$$e^x y_2 = \frac{C_1}{2} e^{2x} + C_2 \;\Rightarrow\; y_2 = \frac{C_1}{2} e^x + C_2 e^{-x}$$

Γενική λύση

$$
\begin{aligned}
y_1 &= C_1 e^x, \\
y_2 &= \frac{C_1}{2} e^x + C_2 e^{-x}.
\end{aligned}
$$

Δύο εξισώσεις με δύο αγνώστους

$$\begin{aligned} y_1' &= y_1, \\ y_2' &= y_1 - y_2, \end{aligned}$$

αρχικές συνθήκες: $y_1(0) = 1$, $y_2(0) = 2$.

$$y_1 = C_1 e^x \;\Rightarrow\; y_2' = C_1 e^x - y_2$$

.

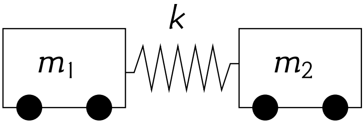
$$e^x y_2 = \frac{C_1}{2} e^{2x} + C_2 \;\Rightarrow\; y_2 = \frac{C_1}{2} e^x + C_2 e^{-x}$$

Γενική λύση

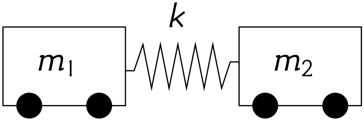
$$\begin{aligned} y_1 &= C_1 e^x, \\ y_2 &= \frac{C_1}{2} e^x + C_2 e^{-x}. \end{aligned}$$

Λύση $C_1 = 1$ και $C_2 = 3/2$.

Σύστημα δύο μαζών-ελατηρίων

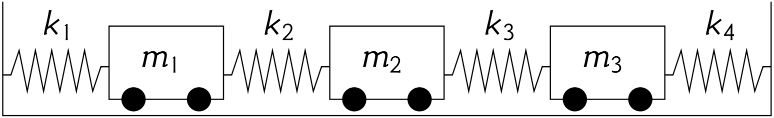


Σύστημα δύο μαζών-ελατηρίων



$$
\begin{aligned}
m_1 x_1'' &= k(x_2 - x_1),\\
m_2 x_2'' &= -k(x_2 - x_1).
\end{aligned}
$$

Συστήματα



Σχήμα : Σύστημα σωματιδίων με ελατήρια.

Τα Μοντέλα του Έρωτα

Τα ερωτικά αισθήματα του ενός εξαρτώνται από τα αντίστοιχα αισθήματα του άλλου.

Τα Μοντέλα του Έρωτα

Τα ερωτικά αισθήματα του ενός εξαρτώνται από τα αντίστοιχα αισθήματα του άλλου.

- Όσο περισσότερο με αγαπά τόσο αυξάνεται η αγάπη μου προς αυτήν/τόν, ή

Τα Μοντέλα του Έρωτα

Τα ερωτικά αισθήματα του ενός εξαρτώνται από τα αντίστοιχα αισθήματα του άλλου.

- Όσο περισσότερο με αγαπά τόσο αυξάνεται η αγάπη μου προς αυτήν/τόν, ή
- Όσο περισσότερο με απορρίπτει τόσο πιο πολύ την/τον αγαπάω.

1ο Μοντέλο

- $R(t)$ και $I(t)$ τα αισθήματα του Ρωμαίου και της Ιουλιέτας την χρονική στιγμή $t > 0$.

1ο Μοντέλο

- $R(t)$ και $I(t)$ τα αισθήματα του Ρωμαίου και της Ιουλιέτας την χρονική στιγμή $t > 0$.
- Πεδίο τιμών των $R(t)$ και $I(t)$ το $[-1, 1]$.

1ο Μοντέλο

- $R(t)$ και $I(t)$ τα αισθήματα του Ρωμαίου και της Ιουλιέτας την χρονική στιγμή $t > 0$.
- Πεδίο τιμών των $R(t)$ και $I(t)$ το $[-1, 1]$.

$$R'(t) = \alpha J(t)$$

$$J'(t) = bR(t)$$

1ο Μοντέλο

- $R(t)$ και $I(t)$ τα αισθήματα του Ρωμαίου και της Ιουλιέτας την χρονική στιγμή $t > 0$.
- Πεδίο τιμών των $R(t)$ και $I(t)$ το $[-1, 1]$.

$$R'(t) = \alpha J(t)$$

$$J'(t) = bR(t)$$

$$R''(t) = \alpha b R(t) \longrightarrow r_{1,2} = \pm\sqrt{\alpha b}$$

1ο Μοντέλο - 1η Περίπτωση: $\alpha b > 0$

$$R(t) = c_1 e^{\sqrt{\alpha b} t} + c_2 e^{-\sqrt{\alpha b} t}$$

1ο Μοντέλο - 1η Περίπτωση: $\alpha b > 0$

$$R(t) = c_1 e^{\sqrt{\alpha b}t} + c_2 e^{-\sqrt{\alpha b}t}$$

$$J(t) = c_1 \frac{\sqrt{\alpha b}}{\alpha} e^{\sqrt{\alpha b}t} - c_2 \frac{\sqrt{\alpha b}}{\alpha} e^{-\sqrt{\alpha b}t}$$

- R_0 και I_0 τα αισθήματα του Ρωμαίου και της Ιουλιέτας την χρονική στιγμή $t = 0$.

1ο Μοντέλο - 1η Περίπτωση: $\alpha b > 0$

$$R(t) = c_1 e^{\sqrt{\alpha b}t} + c_2 e^{-\sqrt{\alpha b}t}$$

$$J(t) = c_1 \frac{\sqrt{\alpha b}}{\alpha} e^{\sqrt{\alpha b}t} - c_2 \frac{\sqrt{\alpha b}}{\alpha} e^{-\sqrt{\alpha b}t}$$

- R_0 και I_0 τα αισθήματα του Ρωμαίου και της Ιουλιέτας την χρονική στιγμή $t = 0$.

$$R_0 = R(0) = c_1 + c_2$$

1ο Μοντέλο - 1η Περίπτωση: $\alpha b > 0$

$$R(t) = c_1 e^{\sqrt{\alpha b}t} + c_2 e^{-\sqrt{\alpha b}t}$$

$$J(t) = c_1 \frac{\sqrt{\alpha b}}{\alpha} e^{\sqrt{\alpha b}t} - c_2 \frac{\sqrt{\alpha b}}{\alpha} e^{-\sqrt{\alpha b}t}$$

- R_0 και I_0 τα αισθήματα του Ρωμαίου και της Ιουλιέτας την χρονική στιγμή $t = 0$.

$$R_0 = R(0) = c_1 + c_2$$

$$J_0 = J(0) = c_1 \frac{\sqrt{\alpha b}}{\alpha} - c_2 \frac{\sqrt{\alpha b}}{\alpha}$$

1ο Μοντέλο - 1η Περίπτωση: $\alpha b > 0$

$$R(t) = c_1 e^{\sqrt{\alpha b}t} + c_2 e^{-\sqrt{\alpha b}t}$$

$$J(t) = c_1 \frac{\sqrt{\alpha b}}{\alpha} e^{\sqrt{\alpha b}t} - c_2 \frac{\sqrt{\alpha b}}{\alpha} e^{-\sqrt{\alpha b}t}$$

- R_0 και I_0 τα αισθήματα του Ρωμαίου και της Ιουλιέτας την χρονική στιγμή $t = 0$.

$$R_0 = R(0) = c_1 + c_2$$

$$J_0 = J(0) = c_1 \frac{\sqrt{\alpha b}}{\alpha} - c_2 \frac{\sqrt{\alpha b}}{\alpha}$$

- $c_1 = J_0 \frac{\alpha}{2} \sqrt{\alpha b} + \frac{R_0}{2}$.

$$c_1 = 0 \longrightarrow R_0 = -J_0 \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha b}}$$

1ο Μοντέλο - 1η Περίπτωση: $\alpha b > 0$

$\alpha, b > 0$	$R_0, J_0 > 0$	Έρωτας
	$R_0, J_0 < 0$	Μίσος
	$R_0 > 0, J_0 < 0$	
	(1) $R_0 > -J_0 \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha b}}$	Έρωτας
	(2) $R_0 < -J_0 \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha b}}$	Μίσος
	(3) $R_0 = -J_0 \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha b}}$	Απάθεια
$\alpha, b < 0$	$R_0, J_0 > 0$	
	(1) $R_0 > -J_0 \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha b}}$	Έρωτας/Μίσος
	(2) $R_0 < -J_0 \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha b}}$	Μίσος/Έρωτας
	(3) $R_0 = -J_0 \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha b}}$	Απάθεια
	$R_0, J_0 < 0$	
	(1) $R_0 > -J_0 \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha b}}$	Έρωτας/Μίσος
	(2) $R_0 < -J_0 \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha b}}$	Μίσος/Έρωτας
	(3) $R_0 = -J_0 \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha b}}$	Απάθεια
	$R_0 > 0, J_0 < 0$	Έρωτας/Μίσος
	$R_0 < 0, J_0 > 0$	Μίσος/Έρωτας

1ο Μοντέλο - 2η Περίπτωση

$$R(t) = c_1 \cos(\sqrt{\alpha b} t) + c_2 \sin(\sqrt{\alpha b} t)$$

1ο Μοντέλο - 2η Περίπτωση

$$R(t) = c_1 \cos(\sqrt{\alpha b}t) + c_2 \sin(\sqrt{\alpha b}t)$$

$$J(t) = -c_1 \frac{\sqrt{\alpha b}}{\alpha} \sin(\sqrt{\alpha b}t) + c_2 \frac{\sqrt{\alpha b}}{\alpha} \cos(\sqrt{\alpha b}t)$$

1ο Μοντέλο - 2η Περίπτωση

$$R(t) = c_1 \cos(\sqrt{\alpha b}t) + c_2 \sin(\sqrt{\alpha b}t)$$

$$J(t) = -c_1 \frac{\sqrt{\alpha b}}{\alpha} \sin(\sqrt{\alpha b}t) + c_2 \frac{\sqrt{\alpha b}}{\alpha} \cos(\sqrt{\alpha b}t)$$

2ο Μοντέλο

$$R'(t) = \alpha R(t) + bJ(t)$$
$$J'(t) = cR(t) + dJ(t)$$

2ο Μοντέλο

$$R'(t) = \alpha R(t) + bJ(t)$$
$$J'(t) = cR(t) + dJ(t)$$

Λεπτομέριες;

The Love Affair of Romeo & Juliet

Πρόβλημα συστήματος δύο εξισώσεων

Δύο εξαρτημένες μεταβλητές:

$$y_1, \; y_2$$

Πρόβλημα συστήματος δύο εξισώσεων

Δύο εξαρτημένες μεταβλητές:

$$y_1, \; y_2$$

Δύο διαφορικές εξισώσεις:

$$\begin{aligned} y_1'' &= f_1(y_1', y_2', y_1, y_2, x), \\ y_2'' &= f_2(y_1', y_2', y_1, y_2, x), \end{aligned}$$

Πρόβλημα συστήματος δύο εξισώσεων

Δύο εξαρτημένες μεταβλητές:

$$y_1,\ y_2$$

Δύο διαφορικές εξισώσεις:

$$\begin{aligned} y_1'' &= f_1(y_1', y_2', y_1, y_2, x), \\ y_2'' &= f_2(y_1', y_2', y_1, y_2, x), \end{aligned}$$

Δύο αρχικές συνθήκες:

$$y_1(0) = \alpha,\ \ y_2(0) = b$$

.

Μία εξίσωση $\rightleftarrows$ Ένα Σύστημα

$$y^{(n)} = F(y^{(n-1)}, \ldots, y', y, x).$$

Μία εξίσωση ⇄ Ένα Σύστημα

$$y^{(n)} = F(y^{(n-1)}, \ldots, y', y, x).$$

$$\begin{aligned} u_1' &= u_2 \\ u_2' &= u_3 \\ &\vdots \\ u_{n-1}' &= u_n \\ u_n' &= F(u_n, u_{n-1}, \ldots, u_2, u_1, x). \end{aligned}$$

Μία εξίσωση $\rightleftarrows$ Ένα Σύστημα

$$y^{(n)} = F(y^{(n-1)}, \ldots, y', y, x).$$

$$\begin{aligned} u_1' &= u_2 \\ u_2' &= u_3 \\ &\vdots \\ u_{n-1}' &= u_n \\ u_n' &= F(u_n, u_{n-1}, \ldots, u_2, u_1, x). \end{aligned}$$

Λύνω ως προς u_1, u_2, $\ldots$, u_n

Μία εξίσωση $\rightleftarrows$ Ένα Σύστημα

$$y^{(n)} = F(y^{(n-1)}, \ldots, y', y, x).$$

$$\begin{aligned} u_1' &= u_2 \\ u_2' &= u_3 \\ &\vdots \\ u_{n-1}' &= u_n \\ u_n' &= F(u_n, u_{n-1}, \ldots, u_2, u_1, x). \end{aligned}$$

Λύνω ως προς u_1, u_2, ..., u_n
Η $y = u_1$ είναι λύση της αρχικής εξίσωσης.

Ένα Σύστημα $\rightleftarrows$ Μία εξίσωση

$$x' = 2y - x, \qquad y' = x,$$

αρχικές συνθήκες $x(0) = 1$, $y(0) = 0$.

Ένα Σύστημα $\rightleftarrows$ Μία εξίσωση

$$x' = 2y - x, \qquad y' = x,$$

αρχικές συνθήκες $x(0) = 1$, $y(0) = 0$.

$$y'' = x' = 2y - x = 2y - y' \;\Rightarrow\; y'' + y' - 2y = 0.$$

Ένα Σύστημα ⇄ Μία εξίσωση

$$x' = 2y - x, \qquad y' = x,$$

αρχικές συνθήκες $x(0) = 1$, $y(0) = 0$.

$$y'' = x' = 2y - x = 2y - y' \;\Rightarrow\; y'' + y' - 2y = 0.$$

Η λύση $y = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{t}$

Ένα Σύστημα $\rightleftarrows$ Μία εξίσωση

$$x' = 2y - x, \qquad y' = x,$$

αρχικές συνθήκες $x(0) = 1$, $y(0) = 0$.

$$y'' = x' = 2y - x = 2y - y' \Rightarrow y'' + y' - 2y = 0.$$

Η λύση $y = C_1 e^{-2t} + C_2 e^t$

$$x = y' = -2C_1 e^{-2t} + C_2 e^t.$$

$1 = x(0) = -2C_1 + C_2$ και $0 = y(0) = C_1 + C_2$. $C_1 = -1/3$ και $C_2 = 1/3$

Ένα Σύστημα ⇄ Μία εξίσωση

$$x' = 2y - x, \qquad y' = x,$$

αρχικές συνθήκες $x(0) = 1$, $y(0) = 0$.

$$y'' = x' = 2y - x = 2y - y' \;\Rightarrow\; y'' + y' - 2y = 0.$$

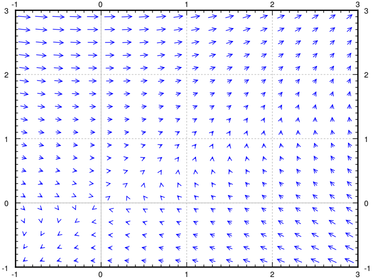
Η λύση $y = C_1 e^{-2t} + C_2 e^t$

$$x = y' = -2C_1 e^{-2t} + C_2 e^t.$$

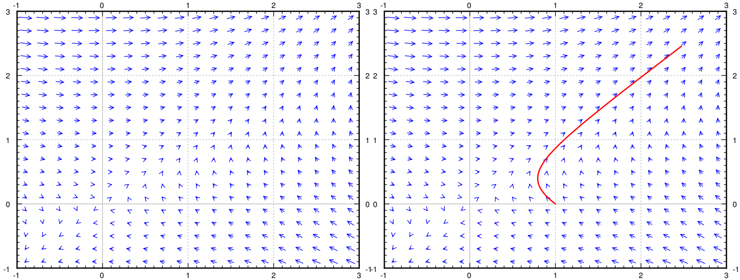
$1 = x(0) = -2C_1 + C_2$ και $0 = y(0) = C_1 + C_2$. $C_1 = -1/3$
και $C_2 = 1/3$
Η λύση

$$x = \frac{2e^{-2t} + e^t}{3}, \qquad y = \frac{-e^{-2t} + e^t}{3}.$$

Πεδίο κατευθύνσεων $x' = 2y - x,\ y' = x$



Πεδίο κατευθύνσεων $x' = 2y - x,\ y' = x$



Ορισμοί

Διάνυσμα συναρτήσεων $\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$.

Ορισμοί

Διάνυσμα συναρτήσεων $\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}.$

Πίνακας $A(t) = \begin{bmatrix} \alpha_{11}(t) & \alpha_{12}(t) & \cdots & \alpha_{1n}(t) \\ \alpha_{21}(t) & \alpha_{22}(t) & \cdots & \alpha_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1}(t) & \alpha_{n2}(t) & \cdots & \alpha_{nn}(t) \end{bmatrix}$

Ορισμοί

Διάνυσμα συναρτήσεων $\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$.

Πίνακας $A(t) = \begin{bmatrix} \alpha_{11}(t) & \alpha_{12}(t) & \cdots & \alpha_{1n}(t) \\ \alpha_{21}(t) & \alpha_{22}(t) & \cdots & \alpha_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1}(t) & \alpha_{n2}(t) & \cdots & \alpha_{nn}(t) \end{bmatrix}$

$A'(t)$ ή $\frac{dA}{dt}$ πίνακας με $\alpha'_{ij}(t)$ στην $ij^{\sigma\tau\eta}$ θέση.

Ορισμοί

Διάνυσμα συναρτήσεων $\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}.$

Πίνακας $A(t) = \begin{bmatrix} \alpha_{11}(t) & \alpha_{12}(t) & \cdots & \alpha_{1n}(t) \\ \alpha_{21}(t) & \alpha_{22}(t) & \cdots & \alpha_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1}(t) & \alpha_{n2}(t) & \cdots & \alpha_{nn}(t) \end{bmatrix}$

$A'(t)$ ή $\frac{dA}{dt}$ πίνακας με $\alpha'_{ij}(t)$ στην $ij^{\sigma\tau\eta}$ θέση.

Ταυτότητες

$$(A+B)' = A' + B' \qquad (AB)' = A'B + AB'$$

$$(cA)' = cA' \qquad (CA)' = CA' \qquad (AC)' = A'C$$

Συστήματα σε μορφή πινάκων

$$\vec{x}\,'(t) = P(t)\vec{x}(t) + \vec{f}(t) \qquad \vec{x}\,' = P\vec{x} + \vec{f}$$

Συστήματα σε μορφή πινάκων

$$\vec{x}\,'(t) = P(t)\vec{x}(t) + \vec{f}(t) \qquad \vec{x}\,' = P\vec{x} + \vec{f}$$

Παράδειγμα

$$\begin{aligned} x_1' &= 2tx_1 + e^t x_2 + t^2, \\ x_2' &= \frac{x_1}{t} - x_2 + e^t, \end{aligned}$$

Συστήματα σε μορφή πινάκων

$$\vec{x}\,'(t) = P(t)\vec{x}(t) + \vec{f}(t) \qquad \vec{x}\,' = P\vec{x} + \vec{f}$$

Παράδειγμα

$$\begin{aligned} x_1' &= 2tx_1 + e^t x_2 + t^2, \\ x_2' &= \frac{x_1}{t} - x_2 + e^t, \end{aligned}$$

$$\vec{x}\,' = \begin{bmatrix} 2t & e^t \\ 1/t & -1 \end{bmatrix} \vec{x} + \begin{bmatrix} t^2 \\ e^t \end{bmatrix}.$$

Θεώρημα (Υπέρθεσης)

Έστω $\vec{x}' = P\vec{x}$ ένα γραμμικό ομογενές σύστημα ΣΔΕ. Έστω ότι $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n$ είναι n λύσεις της εξίσωση, τότε η

$$\vec{x} = c_1\vec{x}_1 + c_2\vec{x}_2 + \cdots + c_n\vec{x}_n, \tag{1}$$

είναι επίσης λύση.

Θεώρημα (Υπέρθεσης)

Έστω $\vec{x}' = P\vec{x}$ ένα γραμμικό ομογενές σύστημα ΣΔΕ.
Έστω ότι $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n$ είναι n λύσεις της εξίσωση, τότε η

$$\vec{x} = c_1\vec{x}_1 + c_2\vec{x}_2 + \cdots + c_n\vec{x}_n, \tag{1}$$

είναι επίσης λύση.
Αν επιπρόσθετα, είναι ένα σύστημα n εξισώσεων (P είναι $n \times n$), και τα $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, τότε κάθε λύση μπορεί να γραφθεί στην μορφή της εξίσωσης (1).

Θεώρημα (Υπέρθεσης)

Έστω $\vec{x}' = P\vec{x}$ ένα γραμμικό ομογενές σύστημα ΣΔΕ.
Έστω ότι $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n$ είναι n λύσεις της εξίσωση, τότε η

$$\vec{x} = c_1\vec{x}_1 + c_2\vec{x}_2 + \cdots + c_n\vec{x}_n, \tag{1}$$

είναι επίσης λύση.
Αν επιπρόσθετα, είναι ένα σύστημα n εξισώσεων (P είναι $n \times n$), και τα $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, τότε κάθε λύση μπορεί να γραφθεί στην μορφή της εξίσωσης (1).
Θεμελιώδης πίνακας $X(t)$:

$$c_1\vec{x}_1 + c_2\vec{x}_2 + \cdots + c_n\vec{x}_n = X(t)\vec{c}$$

Θεώρημα

Εάν $\vec{x}\,' = P\vec{x} + \vec{f}$ είναι ένα γραμμικό σύστημα ΣΔΕ και εάν $\vec{x}_p$ μια οποιαδήποτε συγκεκριμένη λύση του, τότε κάθε λύση του μπορεί να γραφθεί στην μορφή

$$\vec{x} = \vec{x}_c + \vec{x}_p,$$

όπου $\vec{x}_c$ είναι μια λύση της αντίστοιχης ομογενούς εξίσωσης ($\vec{x}\,' = P\vec{x}$).

Αρχικές συνθήκες

Γενική λύση

$$\vec{x}\,' = P\vec{x} + \vec{f}$$

Αρχικές συνθήκες

Γενική λύση

$$\vec{x}\,' = P\vec{x} + \vec{f}$$

Αρχικές συνθήκες

$$\vec{x}(t_0) = \vec{b}$$

Αρχικές συνθήκες

Γενική λύση

$$\vec{x}\,' = P\vec{x} + \vec{f}$$

Αρχικές συνθήκες

$$\vec{x}(t_0) = \vec{b}$$

Θεμελιώδης πίνακας: $X(t)$ (οι στήλες του X είναι λύσεις)

Αρχικές συνθήκες

Γενική λύση

$$\vec{x}\,' = P\vec{x} + \vec{f}$$

Αρχικές συνθήκες

$$\vec{x}(t_0) = \vec{b}$$

Θεμελιώδης πίνακας: $X(t)$ (οι στήλες του X είναι λύσεις)
Γενική λύση

$$\vec{x}(t) = X(t)\vec{c} + \vec{x}_p(t).$$

Αρχικές συνθήκες

Γενική λύση

$$\vec{x}\,' = P\vec{x} + \vec{f}$$

Αρχικές συνθήκες

$$\vec{x}(t_0) = \vec{b}$$

Θεμελιώδης πίνακας: $X(t)$ (οι στήλες του X είναι λύσεις)
Γενική λύση

$$\vec{x}(t) = X(t)\vec{c} + \vec{x}_p(t).$$

Βρες $\vec{c}$ τέτοιο ώστε

$$\vec{b} = \vec{x}(t_0) = X(t_0)\vec{c} + \vec{x}_p(t_0).$$

Αρχικές συνθήκες

Γενική λύση

$$\vec{x}\,' = P\vec{x} + \vec{f}$$

Αρχικές συνθήκες

$$\vec{x}(t_0) = \vec{b}$$

Θεμελιώδης πίνακας: $X(t)$ (οι στήλες του X είναι λύσεις)
Γενική λύση

$$\vec{x}(t) = X(t)\vec{c} + \vec{x}_p(t).$$

Βρες $\vec{c}$ τέτοιο ώστε

$$\vec{b} = \vec{x}(t_0) = X(t_0)\vec{c} + \vec{x}_p(t_0).$$

Λύσε ως προς $\vec{c}$

$$X(t_0)\vec{c} = \vec{b} - \vec{x}_p(t_0).$$

Παράδειγμα

$$
\begin{aligned}
x_1' &= x_1,\\
x_2' &= x_1 - x_2.
\end{aligned}
$$

Αρχικές συνθήκες $x_1(0) = 1,\ x_2(0) = 2.$

Παράδειγμα

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1, \\ x_2' &= x_1 - x_2. \end{aligned}$$

Αρχικές συνθήκες $x_1(0) = 1,\ x_2(0) = 2.$

$$\vec{x}\,' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \vec{x}, \qquad \vec{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Παράδειγμα

$$x_1' = x_1,$$
$$x_2' = x_1 - x_2.$$

Αρχικές συνθήκες $x_1(0) = 1,\ x_2(0) = 2.$

$$\vec{x}\,' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \vec{x}, \qquad \vec{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

$x_1 = c_1 e^t$ και $x_2 = \frac{c_1}{2} e^t + c_2 e^{-t}$.

Παράδειγμα

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1, \\ x_2' &= x_1 - x_2. \end{aligned}$$

Αρχικές συνθήκες $x_1(0) = 1,\ x_2(0) = 2.$

$$\vec{x}\,' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \vec{x}, \qquad \vec{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

$x_1 = c_1 e^t$ και $x_2 = \frac{c_1}{2} e^t + c_2 e^{-t}.$

$$X(t) = \begin{bmatrix} e^t & 0 \\ \frac{1}{2} e^t & e^{-t} \end{bmatrix}.$$

Παράδειγμα

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1, \\ x_2' &= x_1 - x_2. \end{aligned}$$

Αρχικές συνθήκες $x_1(0) = 1,\ x_2(0) = 2.$

$$\vec{x}\,' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \vec{x}, \qquad \vec{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

$x_1 = c_1 e^t$ και $x_2 = \frac{c_1}{2} e^t + c_2 e^{-t}$.

$$X(t) = \begin{bmatrix} e^t & 0 \\ \frac{1}{2} e^t & e^{-t} \end{bmatrix}.$$

$$X(0)\vec{c} = \vec{b} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \vec{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3/2 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1, \\ x_2' &= x_1 - x_2. \end{aligned}$$

Αρχικές συνθήκες $x_1(0) = 1,\ x_2(0) = 2$.

$$\vec{x}\,' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \vec{x}, \qquad \vec{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

$x_1 = c_1 e^t$ και $x_2 = \frac{c_1}{2} e^t + c_2 e^{-t}$.

$$X(t) = \begin{bmatrix} e^t & 0 \\ \frac{1}{2} e^t & e^{-t} \end{bmatrix}.$$

$$X(0)\vec{c} = \vec{b} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \vec{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3/2 \end{bmatrix}$$

Επανάληψη

$n \times n$ **σύστημα ΔΕ**: $\vec{x}\,' = P\vec{x} + \vec{f}$

Επανάληψη

$n \times n$ **σύστημα ΔΕ**: $\vec{x}\,' = P\vec{x} + \vec{f}$
Γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις ομογενούς: $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n$.

Επανάληψη

$n \times n$ **σύστημα ΔΕ**: $\vec{x}\,' = P\vec{x} + \vec{f}$
Γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις ομογενούς: $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n$.
Θεμελιώδης πίνακας: $X(t)$ (οι στήλες οι λύσεις $\vec{x}_i$).
Γενικευμένη λύση ομογενούς:
$\vec{x}_c = c_1\vec{x}_1 + c_2\vec{x}_2 + \cdots + c_n\vec{x}_n = X(t)\vec{c}$,

Επανάληψη

$n \times n$ **σύστημα ΔΕ**: $\vec{x}' = P\vec{x} + \vec{f}$
Γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις ομογενούς: $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n$.
Θεμελιώδης πίνακας: $X(t)$ (οι στήλες οι λύσεις $\vec{x}_i$).
Γενικευμένη λύση ομογενούς:
$\vec{x}_c = c_1\vec{x}_1 + c_2\vec{x}_2 + \cdots + c_n\vec{x}_n = X(t)\vec{c}$,
Μια οποιαδήποτε λύση μη-ομογενούς: $\vec{x}_p$

Επανάληψη

$n \times n$ **σύστημα ΔΕ**: $\vec{x}' = P\vec{x} + \vec{f}$
Γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις ομογενούς: $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n$.
Θεμελιώδης πίνακας: $X(t)$ (οι στήλες οι λύσεις $\vec{x}_i$).
Γενικευμένη λύση ομογενούς:
$\vec{x}_c = c_1\vec{x}_1 + c_2\vec{x}_2 + \cdots + c_n\vec{x}_n = X(t)\vec{c}$,
Μια οποιαδήποτε λύση μη-ομογενούς: $\vec{x}_p$
Γενικευμένη λύση μη-ομογενούς:
$\vec{x} = \vec{x}_c + \vec{x}_p \;\; = \;\; X(t)\vec{c} + \vec{x}_p(t)$

Επανάληψη

$n \times n$ **σύστημα ΔΕ**: $\vec{x}' = P\vec{x} + \vec{f}$
Γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις ομογενούς: $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n$.
Θεμελιώδης πίνακας: $X(t)$ (οι στήλες οι λύσεις $\vec{x}_i$).
Γενικευμένη λύση ομογενούς:
$\vec{x}_c = c_1\vec{x}_1 + c_2\vec{x}_2 + \cdots + c_n\vec{x}_n = X(t)\vec{c}$,
Μια οποιαδήποτε λύση μη-ομογενούς: $\vec{x}_p$
Γενικευμένη λύση μη-ομογενούς:
$\vec{x} = \vec{x}_c + \vec{x}_p \quad = \quad X(t)\vec{c} + \vec{x}_p(t)$
Αρχικές συνθήκες: $\vec{x}(t_0) = \vec{b} \quad \Rightarrow X(t_0)\vec{c} = \vec{b} - \vec{x}_p(t_0)$.

Λύση ομογενούς

Ομογενές σύστημα:

$$\vec{x}\,' = P\vec{x}.$$

Λύση ομογενούς

Ομογενές σύστημα:

$$\vec{x}\,' = P\vec{x}.$$

Μαντεψιά:

$$\lambda\vec{v}e^{\lambda t} = P\vec{v}e^{\lambda t}.$$

Λύση ομογενούς

Ομογενές σύστημα:

$$\vec{x}\,' = P\vec{x}.$$

Μαντεψιά:

$$\lambda\vec{v}e^{\lambda t} = P\vec{v}e^{\lambda t}.$$

Αλγεβρικό σύστημα:

$$\lambda\vec{v} = P\vec{v}.$$

Ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα - Ορισμός

Αν για τον τετραγωνικό και σταθερό πίνακας A ισχύει

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v}.$$

Ονομάζουμε τον αριθμό λ *ιδιοτιμή* του πίνακα A και το διάνυσμα $\vec{v}$ το *ιδιοδιάνυσμα* που αντιστοιχεί στο λ.

Ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα - Ορισμός

Αν για τον τετραγωνικό και σταθερό πίνακας A ισχύει

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v}.$$

Ονομάζουμε τον αριθμό λ *ιδιοτιμή* του πίνακα A και το διάνυσμα $\vec{v}$ το *ιδιοδιάνυσμα* που αντιστοιχεί στο λ.

Παράδειγμα

$\lambda = 2$, $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ιδιοτιμή και ιδιοδιάνυσμα του $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα - Υπολογισμός

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v} \quad \Rightarrow \quad (A - \lambda I)\vec{v} = \vec{0}.$$

Ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα - Υπολογισμός

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v} \quad \Rightarrow \quad (A - \lambda I)\vec{v} = \vec{0}.$$

λ ιδιοτιμή του A ανν $\det(A - \lambda I) = 0$.

Ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα - Υπολογισμός

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v} \quad \Rightarrow \quad (A - \lambda I)\vec{v} = \vec{0}.$$

λ ιδιοτιμή του A ανν $\det(A - \lambda I) = 0$.

Παράδειγμα $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα - Υπολογισμός

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v} \quad \Rightarrow \quad (A - \lambda I)\vec{v} = \vec{0}.$$

λ ιδιοτιμή του A ανν $\det(A - \lambda I) = 0$.

Παράδειγμα $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

$$\det\left(\begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{bmatrix}\right) =$$
$$= (2-\lambda)((2-\lambda)^2 - 1) = -(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3).$$

Ιδιοδιανύσματα - Υπολογισμός

Δοθέντος ενός ιδιοδιανύσματος λ λύνω ως προς $\vec{v}$ την

$$(A - \lambda I)\vec{v} = \vec{0},$$

Ιδιοδιανύσματα - Υπολογισμός

Δοθέντος ενός ιδιοδιανύσματος λ λύνω ως προς $\vec{v}$ την

$$(A-\lambda I)\vec{v}=\vec{0},$$

Παράδειγμα $\lambda = 3$ και $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Ιδιοδιανύσματα - Υπολογισμός

Δοθέντος ενός ιδιοδιανύσματος λ λύνω ως προς $\vec{v}$ την

$$(A - \lambda I)\vec{v} = \vec{0},$$

Παράδειγμα $\lambda = 3$ και $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

$$(A - \lambda I)\vec{v} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \vec{0}.$$

Ιδιοδιανύσματα - Υπολογισμός

Δοθέντος ενός ιδιοδιανύσματος λ λύνω ως προς $\vec{v}$ την

$$(A-\lambda I)\vec{v}=\vec{0},$$

Παράδειγμα $\lambda = 3$ και $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

$$(A-\lambda I)\vec{v} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \vec{0}.$$

$v_1 - v_2 = 0$, $v_3 = 0$, όπου η v_2 ελεύθερη μεταβλητή.

Ιδιοδιανύσματα - Υπολογισμός

Δοθέντος ενός ιδιοδιανύσματος λ λύνω ως προς $\vec{v}$ την

$$(A-\lambda I)\vec{v}=\vec{0},$$

Παράδειγμα $\lambda = 3$ και $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

$$(A-\lambda I)\vec{v} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \vec{0}.$$

$v_1 - v_2 = 0$, $v_3 = 0$, όπου η v_2 ελεύθερη μεταβλητή.

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

. (μοναδικό;)

Λύση ομογενούς

Αν $\vec{x}' = P\vec{x}$ όπου ο $n \times n$ πίνακας P έχει n διαφορετικές μεταξύ τους πραγματικές ιδιοτιμές, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ τότε υπάρχουν n γραμμικά ανεξάρτητα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$, και η γενική λύση της ΣΔΕ μπορεί να γραφθεί ως εξής

$$\boxed{\vec{x} = c_1\vec{v}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2\vec{v}_2 e^{\lambda_2 t} + \cdots + c_n\vec{v}_n e^{\lambda_n t}.}$$

Πραγματικές ιδιοτιμές χωρίς πολλαπλότητα

$$\vec{x}' = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \vec{x}.$$

Πραγματικές ιδιοτιμές χωρίς πολλαπλότητα

$$\vec{x}' = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \vec{x}.$$

Ιδιοτιμές $1, 2, 3$.

Πραγματικές ιδιοτιμές χωρίς πολλαπλότητα

$$\vec{x}\,' = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \vec{x}.$$

Ιδιοτιμές $1, 2, 3$. $3 \to \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $1 \to \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $2 \to \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ (άσκηση).

Πραγματικές ιδιοτιμές χωρίς πολλαπλότητα

$$\vec{x}\,' = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \vec{x}.$$

Ιδιοτιμές $1, 2, 3$. $3 \to \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $1 \to \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $2 \to \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ (άσκηση).

Γενική λύση

$$\vec{x} = C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} e^t + C_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{2t} + C_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{3t}$$

$$= \begin{bmatrix} C_1 e^t + C_3 e^{3t} \\ -C_1 e^t + C_2 e^{2t} + C_3 e^{3t} \\ -C_2 e^{2t} \end{bmatrix}.$$

Μιγαδικές ιδιοτιμές

$$\vec{x}\,' = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \vec{x}.$$

Μιγαδικές ιδιοτιμές

$$\vec{x}\,' = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \vec{x}.$$

$$\det(P-\lambda I) = \det\left(\begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -1 & 1-\lambda \end{bmatrix}\right) = (1-\lambda)^2+1 = \lambda^2-2\lambda+2 = 0.$$

Μιγαδικές ιδιοτιμές

$$\vec{x}\,' = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \vec{x}.$$

$$\det(P-\lambda I) = \det\left(\begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -1 & 1-\lambda \end{bmatrix}\right) = (1-\lambda)^2+1 = \lambda^2-2\lambda+2 = 0.$$

Ιδιοτιμές $\lambda = 1 \pm i$.

Μιγαδικές ιδιοτιμές

$$\vec{x}\,' = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \vec{x}.$$

$$\det(P-\lambda I) = \det\left(\begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -1 & 1-\lambda \end{bmatrix}\right) = (1-\lambda)^2+1 = \lambda^2-2\lambda+2 = 0.$$

Ιδιοτιμές $\lambda = 1 \pm i$.

$$(P-(1-i)I)\vec{v} = \vec{0},$$

$$\begin{bmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{bmatrix} \vec{v} = \vec{0}.$$

Μιγαδικές ιδιοτιμές

$$\vec{x}' = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \vec{x}.$$

$$\det(P - \lambda I) = \det\left(\begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -1 & 1-\lambda \end{bmatrix}\right) = (1-\lambda)^2 + 1 = \lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0.$$

Ιδιοτιμές $\lambda = 1 \pm i$.

$$(P - (1-i)I)\vec{v} = \vec{0},$$

$$\begin{bmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{bmatrix} \vec{v} = \vec{0}.$$

$\vec{v} = \left[\begin{smallmatrix} i \\ 1 \end{smallmatrix}\right]$ για $\lambda = 1 - i$.

Μιγαδικές ιδιοτιμές

$$\vec{x}' = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \vec{x}.$$

$$\det(P - \lambda I) = \det\left(\begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -1 & 1-\lambda \end{bmatrix}\right) = (1-\lambda)^2 + 1 = \lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0.$$

Ιδιοτιμές $\lambda = 1 \pm i$.

$$(P - (1-i)I)\vec{v} = \vec{0},$$

$$\begin{bmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{bmatrix} \vec{v} = \vec{0}.$$

$\vec{v} = \left[\begin{smallmatrix} i \\ 1 \end{smallmatrix}\right]$ για $\lambda = 1 - i$. Στην ιδιοτιμή $1 + i$ αντιστοιχεί το ιδιοδιάνυσμα $\left[\begin{smallmatrix} -i \\ 1 \end{smallmatrix}\right]$.

Μιγαδικές ιδιοτιμές

$$\vec{x}' = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \vec{x}.$$

$$\det(P-\lambda I) = \det\left(\begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -1 & 1-\lambda \end{bmatrix}\right) = (1-\lambda)^2+1 = \lambda^2-2\lambda+2 = 0.$$

Ιδιοτιμές $\lambda = 1 \pm i$.

$$(P-(1-i)I)\vec{v} = \vec{0},$$

$$\begin{bmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{bmatrix} \vec{v} = \vec{0}.$$

$\vec{v} = \left[\begin{smallmatrix} i \\ 1 \end{smallmatrix}\right]$ για $\lambda = 1-i$. Στην ιδιοτιμή $1+i$ αντιστοιχεί το ιδιοδιάνυσμα $\left[\begin{smallmatrix} -i \\ 1 \end{smallmatrix}\right]$.

$$\vec{x} = c_1 \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} e^{(1-i)t} + c_2 \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix} e^{(1+i)t} = \begin{bmatrix} c_1 i e^{(1-i)t} - c_2 i e^{(1+i)t} \\ c_1 e^{(1-i)t} + c_2 e^{(1+i)t} \end{bmatrix}$$

Συζυγείς ιδιοτιμές

$$\overline{(P-\lambda I)\vec{v}} = (P-\bar{\lambda} I)\bar{\vec{v}}.$$

Συζυγείς ιδιοτιμές

$$\overline{(P-\lambda I)\vec{v}} = (P-\bar{\lambda} I)\bar{\vec{v}}.$$

$\vec{v}$ ιδιοδ. με ιδιοτ. $\alpha + ib$, $\Rightarrow$ $\bar{\vec{v}}$ ιδιοδ. με ιδιοτ. $\alpha - ib$.

Συζυγείς ιδιοτιμές

$$\overline{(P-\lambda I)\vec{v}} = (P-\bar{\lambda} I)\bar{\vec{v}}.$$

$\vec{v}$ ιδιοδ. με ιδιοτ. $\alpha+ib$, $\Rightarrow$ $\bar{\vec{v}}$ ιδιοδ. με ιδιοτ. $\alpha-ib$.

Αν $\alpha+ib$ ιδιοτ. του P με ιδιοδ. $\vec{v}$ έχουμε τις εξής λύσεις του $\vec{x}\,' = P\vec{x}$

- $\vec{x}_1 = \vec{v}e^{(\alpha+ib)t}$

Συζυγείς ιδιοτιμές

$$\overline{(P-\lambda I)\vec{v}} = (P-\bar{\lambda} I)\bar{\vec{v}}.$$

$\vec{v}$ ιδιοδ. με ιδιοτ. $\alpha + ib$, $\Rightarrow$ $\bar{\vec{v}}$ ιδιοδ. με ιδιοτ. $\alpha - ib$.

Αν $\alpha + ib$ ιδιοτ. του P με ιδιοδ. $\vec{v}$ έχουμε τις εξής λύσεις του $\vec{x}\,' = P\vec{x}$

- $\vec{x}_1 = \vec{v}e^{(\alpha+ib)t}$
- $\vec{x}_2 = \bar{\vec{x}}_1 = \bar{\vec{v}}e^{(\alpha-ib)t}$

Συζυγείς ιδιοτιμές

$$\overline{(P-\lambda I)\vec{v}} = (P-\bar{\lambda} I)\bar{\vec{v}}.$$

$\vec{v}$ ιδιοδ. με ιδιοτ. $\alpha + ib$, $\Rightarrow$ $\bar{\vec{v}}$ ιδιοδ. με ιδιοτ. $\alpha - ib$.

Αν $\alpha + ib$ ιδιοτ. του P με ιδιοδ. $\vec{v}$ έχουμε τις εξής λύσεις του $\vec{x}\,' = P\vec{x}$

- $\vec{x}_1 = \vec{v}e^{(\alpha+ib)t}$
- $\vec{x}_2 = \bar{\vec{x}}_1 = \bar{\vec{v}}e^{(\alpha-ib)t}$
- $\vec{x}_3 = \operatorname{Re}\vec{x}_1 = \operatorname{Re}\vec{v}e^{(\alpha+ib)t} = \frac{\vec{x}_1+\bar{\vec{x}}_1}{2} = \frac{\vec{x}_1+\vec{x}_2}{2}$

Συζυγείς ιδιοτιμές

$$\overline{(P-\lambda I)\vec{v}} = (P-\bar{\lambda} I)\bar{\vec{v}}.$$

$\vec{v}$ ιδιοδ. με ιδιοτ. $\alpha + ib$, $\Rightarrow$ $\bar{\vec{v}}$ ιδιοδ. με ιδιοτ. $\alpha - ib$.

Αν $\alpha + ib$ ιδιοτ. του P με ιδιοδ. $\vec{v}$ έχουμε τις εξής λύσεις του $\vec{x}\,' = P\vec{x}$

- $\vec{x}_1 = \vec{v}e^{(\alpha+ib)t}$
- $\vec{x}_2 = \bar{\vec{x}}_1 = \bar{\vec{v}}e^{(\alpha-ib)t}$
- $\vec{x}_3 = \operatorname{Re}\vec{x}_1 = \operatorname{Re}\vec{v}e^{(\alpha+ib)t} = \frac{\vec{x}_1+\bar{\vec{x}}_1}{2} = \frac{\vec{x}_1+\vec{x}_2}{2}$
- $\vec{x}_4 = \operatorname{Im}\vec{x}_1 = \frac{\vec{x}_1-\vec{x}_2}{2i}$

Παράδειγμα

$$\vec{x}_1 = \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} e^{(1-i)t} = \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} \left(e^t \cos t + ie^t \sin t\right) = \begin{bmatrix} ie^t \cos t - e^t \sin t \\ e^t \cos t + ie^t \sin t \end{bmatrix}.$$

Παράδειγμα

$$\vec{x}_1 = \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} e^{(1-i)t} = \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} \left(e^t \cos t + ie^t \sin t\right) = \begin{bmatrix} ie^t \cos t - e^t \sin t \\ e^t \cos t + ie^t \sin t \end{bmatrix}.$$

$$\operatorname{Re} \vec{x}_1 = \begin{bmatrix} -e^t \sin t \\ e^t \cos t \end{bmatrix},$$

$$\operatorname{Im} \vec{x}_1 = \begin{bmatrix} e^t \cos t \\ e^t \sin t \end{bmatrix},$$

Παράδειγμα

$$\vec{x}_1 = \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} e^{(1-i)t} = \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} \left(e^t \cos t + ie^t \sin t\right) = \begin{bmatrix} ie^t \cos t - e^t \sin t \\ e^t \cos t + ie^t \sin t \end{bmatrix}.$$

$$\operatorname{Re} \vec{x}_1 = \begin{bmatrix} -e^t \sin t \\ e^t \cos t \end{bmatrix},$$

$$\operatorname{Im} \vec{x}_1 = \begin{bmatrix} e^t \cos t \\ e^t \sin t \end{bmatrix},$$

Η γενική λύση είναι

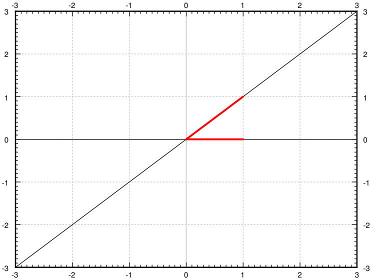
$$\vec{x} = c_1 \begin{bmatrix} -e^t \sin t \\ e^t \cos t \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} e^t \cos t \\ e^t \sin t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c_1 e^t \sin t + c_2 e^t \cos t \\ c_1 e^t \cos t + c_2 e^t \sin t \end{bmatrix}.$$

Διανυσματικά Πεδία

$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}' = P \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ $\quad P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ ιδιοτ. 1, 2 και ιδιοδ. $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

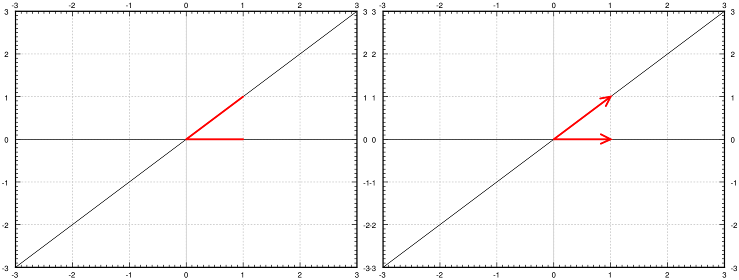
Διανυσματικά Πεδία

$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}' = P \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ $\quad P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ ιδιοτ. 1, 2 και ιδιοδ. $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$



Διανυσματικά Πεδία

$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}' = P \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ $\quad P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ ιδιοτ. 1, 2 και ιδιοδ. $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$



Σχήμα : Τα ιδιοδιανύσματα του P και οι κατευθύνσεις.

Παραδείγματα

$$x' = -x + 2y, \quad y' = -3y$$

$$x' = -x + 2y, \quad y' = -3y$$

$$x' = -x + 3y, \quad y' = 5x - 3y$$

$$x' = -x, \quad y' = 2x - 3y$$

Παραδείγματα