Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις 1ης Τάξης

ΣΔΕ 1ης τάξης, Πεδία κατευθύνσεων, Ύπαρξη και μοναδικότητα, Διαχωρίσιμες εξισώσεις, Ολοκληρωτικοί παράγοντες, Αντικαταστάσεις, Αυτόνομες εξισώσεις

Μανόλης Βάβαλης

Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών
Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

9 Μαρτίου 2015, Βόλος

ΣΔΕ πρώτης τάξης

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) \qquad \text{ή} \qquad y' = f(x,y)$$

ΣΔΕ πρώτης τάξης

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) \qquad \text{ή} \qquad y' = f(x,y)$$

ΣΔΕ πρώτης τάξης

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) \qquad \text{ή} \qquad y' = f(x,y)$$

έστω ότι $f(x,y) = f(x)$

$$y' = f(x).$$

ΣΔΕ πρώτης τάξης

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) \qquad \text{ή} \qquad y' = f(x,y)$$

έστω ότι $f(x,y) = f(x)$

$$y' = f(x).$$

τότε

$$\int y'(x)\ d = \int f(x)\ dx + C,$$

δηλαδή

$$y(x) = \int f(x)\ dx + C.$$

Παράδειγμα

$$y' = e^{-x^2}, \qquad y(0) = 1\,.$$

Λύση

$$y(x) = \int_0^x e^{-s^2}\; ds + 1\,.$$

Παράδειγμα

$$9yy' = -4x.$$

$$9\int y(x)y'(x)dx + 4\int xdx = C$$

Παράδειγμα

$$9yy' = -4x.$$

$$9\int y(x)y'(x)dx + 4\int xdx = C$$

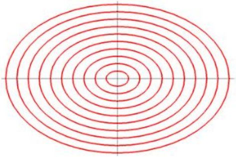
$$9\int ydy + 2x^2 = C \Rightarrow 9y^2 + 4x^2 = 2C$$

Παράδειγμα

$$9yy' = -4x.$$

$$9\int y(x)y'(x)dx + 4\int xdx = C$$

$$9\int ydy + 2x^2 = C \Rightarrow 9y^2 + 4x^2 = 2C$$



Σχήμα : $\frac{y^2}{4} + \frac{x^2}{9} = C$

Παράδειγμα

$$y' + yx = x.$$

Παράδειγμα

$$y' + yx = x.$$

$$\frac{y'}{1-y} = x$$

Παράδειγμα

$$y' + yx = x.$$

$$\frac{y'}{1-y} = x \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dy}{1-y} = \int x dx$$

Παράδειγμα

$$y' + yx = x.$$

$$\frac{y'}{1-y} = x \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dy}{1-y} = \int x dx$$

$$-\ln|1-y| = \frac{x^2}{2} + C$$

Παράδειγμα

$$y' + yx = x.$$

$$\frac{y'}{1-y} = x \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dy}{1-y} = \int x dx$$

$$-\ln|1-y| = \frac{x^2}{2} + C \quad \Rightarrow \quad y = 1 + Ce^{-\frac{x^2}{2}}$$

Παράδειγμα

$$y' + yx = x.$$

$$\frac{y'}{1-y} = x \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dy}{1-y} = \int x dx$$

$$-\ln|1-y| = \frac{x^2}{2} + C \quad \Rightarrow \quad y = 1 + Ce^{-\frac{x^2}{2}}$$

ΣΔΕ πρώτης τάξης

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) \qquad \text{ή} \qquad y' = f(x,y)$$

ΣΔΕ πρώτης τάξης

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) \qquad \text{ή} \qquad y' = f(x,y)$$

έστω ότι $f(x,y) = f(y)$

$$\frac{dy}{dx} = f(y) \Rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(y)}.$$

$$x(y) = \int \frac{1}{f(y)}\, dy + C.$$

Παραδείγματα

- $y' = ky \Rightarrow y = Ce^{kx}.$
- $\frac{dy}{dx} = y^2 \Rightarrow y = \frac{1}{C-x} \qquad \text{ή} \qquad y = 0.$

Παράδειγμα

Πόσο μακριά θα έχει φθάσει ένα όχημα που κινείται με ταχύτητα $e^{t/2}$ μέτρα το δευτερόλεπτο σε 2 δευτερόλεπτα και πόσο σε 10 δευτερόλεπτα;

$$x' = e^{t/2} \Rightarrow x(t) = 2e^{t/2} + C.$$

$$0 = x(0) = 2e^{0/2} + C = 2 + C \Rightarrow C = -2.$$

$$x(t) = 2e^{t/2} - 2.$$

$$x(2) = 2e^{2/2} - 2 \approx 3.44 \text{ μέτρα}, x(10) = 2e^{10/2} - 2 \approx 294 \text{ μέτρα}.$$

Παράδειγμα

Πού θα βρίσκεται ένα όχημα την χρονική στιγμή $t = 10$ αν επιταχύνει με ρυθμό $t^2 \frac{m}{s^2}$ και την χρονική στιγμή $t = 0$ βρίσκεται σε απόσταση 1 μέτρου από την αρχική του θέση και κινείται με ταχύτητα $10\frac{m}{s}$;

$$x'' = t^2, \qquad x(0) = 1, \qquad x'(0) = 10.$$

Αν θέσουμε $x' = v$

$$v' = t^2, \qquad v(0) = 10,$$

λύσουμε ως προς v, και κατόπιν ολοκληρώνουμε για να βρούμε το x.

Πεδία κατευθύνσεων

$y' = f(x,y) \Rightarrow$ τιμή της κλίσης της y σε κάθε σημείο του επιπέδου (x,y).

Πεδία κατευθύνσεων

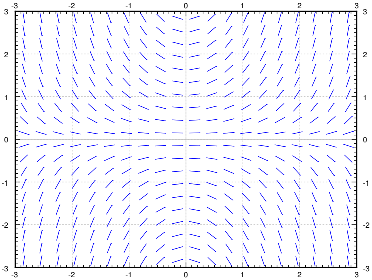
$y' = f(x,y) \Rightarrow$ τιμή της κλίσης της y σε κάθε σημείο του επιπέδου (x,y).

Σχήμα : Το πεδίο κατευθύνσεων της $y' = xy$ και η λύση που ικανοποιεί τις συνθήκες $y(0) = 0.2$, $y(0) = 0$, και $y(0) = -0.2$.

Πεδία κατευθύνσεων

$y' = f(x,y) \Rightarrow$ τιμή της κλίσης της y σε κάθε σημείο του επιπέδου (x,y).

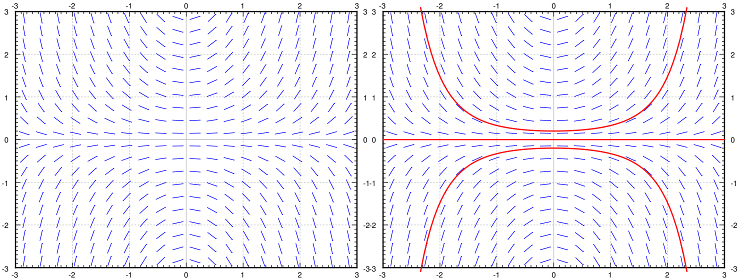
Σχήμα : Το πεδίο κατευθύνσεων της $y' = xy$ και η λύση που ικανοποιεί τις συνθήκες $y(0) = 0.2$, $y(0) = 0$, και $y(0) = -0.2$.



Πεδία κατευθύνσεων

$y' = f(x,y) \Rightarrow$ τιμή της κλίσης της y σε κάθε σημείο του επιπέδου (x,y).

Σχήμα : Το πεδίο κατευθύνσεων της $y' = xy$ και η λύση που ικανοποιεί τις συνθήκες $y(0) = 0.2$, $y(0) = 0$, και $y(0) = -0.2$.



Είμαστε μηχανικοί Η/Υ

Χρήση λογισμικού

Ύπαρξη και μοναδικότητα

$$y' = f(x,y), \qquad y(x_0) = y_0.$$

(i) *Υπάρχει* λύση;

(ii) Είναι η λύση *μοναδική* (εάν υπάρχει);

Ύπαρξη και μοναδικότητα

$$y' = f(x,y), \qquad y(x_0) = y_0.$$

(i) *Υπάρχει* λύση;

(ii) Είναι η λύση *μοναδική* (εάν υπάρχει);

Παράδειγμα:
$y' = \frac{1}{x}, \qquad y(0) = 0 \Rightarrow y = \ln|x| + C.$

Θεώρημα του *Picard*

Θεώρημα Εάν η $f(x,y)$ είναι συνεχής και εάν η παράγωγος $\frac{\partial f}{\partial y}$ υπάρχει και είναι συνεχής σε κάποια περιοχή γύρω από το (x_0,y_0), τότε η λύση του προβλήματος

$$y' = f(x,y), \qquad y(x_0) = y_0,$$

υπάρχει (τουλάχιστον για κάποια x) και είναι μοναδική.

Θεώρημα του *Picard*

Θεώρημα Εάν η $f(x,y)$ είναι συνεχής και εάν η παράγωγος $\frac{\partial f}{\partial y}$ υπάρχει και είναι συνεχής σε κάποια περιοχή γύρω από το (x_0,y_0), τότε η λύση του προβλήματος

$$y' = f(x,y), \qquad y(x_0) = y_0,$$

υπάρχει (τουλάχιστον για κάποια x) και είναι μοναδική.

Παραδείγματα

1. $y' = \frac{1}{x}$, $y(0) = 0$
2. $y' = 2\sqrt{|y|}$, $y(0) = 0$

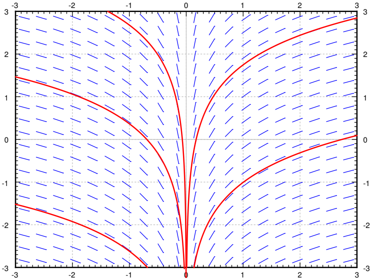
Ύπαρξη και μοναδικότητα

Παράδειγμα: $y' = \frac{1}{x}, \qquad y(0) = 0 \Rightarrow y = \ln|x| + C.$

Ύπαρξη και μοναδικότητα

Παράδειγμα: $y' = \frac{1}{x}, \qquad y(0) = 0 \Rightarrow y = \ln|x| + C.$

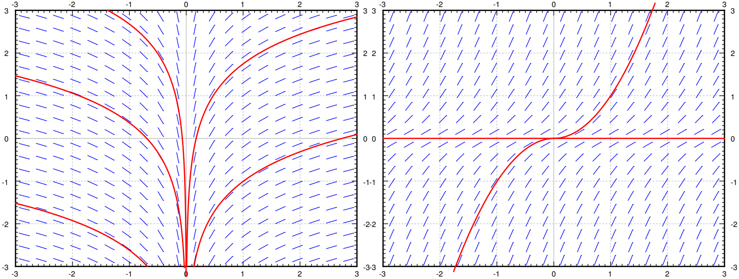
Σχήμα : Πεδίο διευθύνσεων της $y' = \frac{1}{x}$ και της $y' = 2\sqrt{|y|}$.



Ύπαρξη και μοναδικότητα

Παράδειγμα: $y' = \frac{1}{x}$, $\qquad y(0) = 0 \Rightarrow y = \ln|x| + C.$

Σχήμα : Πεδίο διευθύνσεων της $y' = \frac{1}{x}$ και της $y' = 2\sqrt{|y|}$.



Προσοχή στον γορίλα

$$y' = y^2, \qquad y(0) = A,$$

Προσοχή στον γορίλα

$$y' = y^2, \qquad y(0) = A,$$

$$x' = \frac{1}{y^2},$$

Προσοχή στον γορίλα

$$y' = y^2, \qquad y(0) = A,$$

$$x' = \frac{1}{y^2},$$

άρα

$$x = \frac{-1}{y} + C,$$

Προσοχή στον γορίλα

$$y' = y^2, \qquad y(0) = A,$$

$$x' = \frac{1}{y^2},$$

άρα

$$x = \frac{-1}{y} + C,$$

συνεπώς

$$y = \frac{1}{C - x}.$$

Προσοχή στον γορίλα

$$y' = y^2, \qquad y(0) = A,$$

$$x' = \frac{1}{y^2},$$

άρα

$$x = \frac{-1}{y} + C,$$

συνεπώς

$$y = \frac{1}{C - x}.$$

οπότε

$$y(0) = A \Rightarrow C = \frac{1}{A} \Rightarrow y = \frac{1}{\frac{1}{A} - x}.$$

Διαχωρίσιμες Εξισώσεις

Πίσω στην

$$y' = f(x,y),$$

Διαχωρίσιμες Εξισώσεις

Πίσω στην

$$y' = f(x,y),$$

Έστω ότι

$$f(x,y) = f(x)g(y),$$

Διαχωρίσιμες Εξισώσεις

Πίσω στην

$$y' = f(x,y),$$

Έστω ότι

$$f(x,y) = f(x)g(y),$$

Τότε

$$y' = f(x)g(y),$$

Διαχωρίσιμες Εξισώσεις

Πίσω στην

$$y' = f(x,y),$$

Έστω ότι

$$f(x,y) = f(x)g(y),$$

Τότε

$$y' = f(x)g(y),$$

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y) \Rightarrow \frac{dy}{g(y)} = f(x)\,dx \Rightarrow \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)\,dx + C.$$

Παράδειγμα

$$y' = xy.$$

Παράδειγμα

$$y' = xy.$$

Μια λύση $y = 0$.

Παράδειγμα

$$y' = xy.$$

Μια λύση $y = 0$.

$$\int \frac{dy}{y} = \int x \ dx + C.$$

Παράδειγμα

$$y' = xy.$$

Μια λύση $y = 0$.

$$\int \frac{dy}{y} = \int x \ dx + C.$$

$$\ln |y| = \frac{x^2}{2} + C$$

Παράδειγμα

$$y' = xy.$$

Μια λύση $y = 0$.

$$\int \frac{dy}{y} = \int x \; dx + C.$$

$$\ln|y| = \frac{x^2}{2} + C$$

$$|y| = e^{\frac{x^2}{2}+C} = e^{\frac{x^2}{2}} e^{C} = De^{\frac{x^2}{2}},$$

Παράδειγμα

$$y' = xy.$$

Μια λύση $y = 0$.

$$\int \frac{dy}{y} = \int x \; dx + C.$$

$$\ln |y| = \frac{x^2}{2} + C$$

$$|y| = e^{\frac{x^2}{2} + C} = e^{\frac{x^2}{2}} e^C = De^{\frac{x^2}{2}},$$

$$y = De^{\frac{x^2}{2}} \qquad \forall D.$$

Κάπως ποιο προσεκτικά

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$$

Κάπως ποιο προσεκτικά

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$$

Η $y = y(x)$ είναι συνάρτηση του x. Όμως και η $\frac{dy}{dx}$ είναι συνάρτηση του x!

Κάπως ποιο προσεκτικά

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$$

Η $y = y(x)$ είναι συνάρτηση του x. Όμως και η $\frac{dy}{dx}$ είναι συνάρτηση του x!

$$\frac{1}{g(y)}\ \frac{dy}{dx} = f(x)$$

Κάπως ποιο προσεκτικά

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$$

Η $y = y(x)$ είναι συνάρτηση του x. Όμως και η $\frac{dy}{dx}$ είναι συνάρτηση του x!

$$\frac{1}{g(y)} \frac{dy}{dx} = f(x)$$

Ολοκληρώνουμε και τα δύο μέρη ως προς x.

$$\int \frac{1}{g(y)} \frac{dy}{dx}\, dx = \int f(x)\, dx + C.$$

Κάπως ποιο προσεκτικά

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$$

Η $y = y(x)$ είναι συνάρτηση του x. Όμως και η $\frac{dy}{dx}$ είναι συνάρτηση του x!

$$\frac{1}{g(y)}\ \frac{dy}{dx} = f(x)$$

Ολοκληρώνουμε και τα δύο μέρη ως προς x.

$$\int \frac{1}{g(y)}\ \frac{dy}{dx}\ dx = \int f(x)\ dx + C.$$

Αλλαγή μεταβλητών

$$\int \frac{1}{g(y)}\ dy = \int f(x)\ dx + C.$$

Έμμεσες Λύσεις

$$y' = \frac{xy}{y^2+1}.$$

Έμμεσες Λύσεις

$$y' = \frac{xy}{y^2+1}.$$

$$\frac{y^2+1}{y}\ dy = \left(y + \frac{1}{y}\right)\ dy = x\ dx$$

Έμμεσες Λύσεις

$$y' = \frac{xy}{y^2+1}.$$

$$\frac{y^2+1}{y}\ dy = \left(y + \frac{1}{y}\right)\ dy = x\ dx$$

$$\frac{y^2}{2} + \ln|y| = \frac{x^2}{2} + C$$

Έμμεσες Λύσεις

$$y' = \frac{xy}{y^2 + 1}.$$

$$\frac{y^2+1}{y}\ dy = \left(y + \frac{1}{y}\right)\ dy = x\ dx$$

$$\frac{y^2}{2} + \ln|y| = \frac{x^2}{2} + C$$

$$y^2 + 2\ln|y| = x^2 + C.$$

Έμμεση λύση. Επιβεβαίωση!

Έμμεσες Λύσεις

$$y' = \frac{xy}{y^2+1}.$$

$$\frac{y^2+1}{y}\ dy = \left(y + \frac{1}{y}\right)\ dy = x\ dx$$

$$\frac{y^2}{2} + \ln|y| = \frac{x^2}{2} + C$$

$$y^2 + 2\ln|y| = x^2 + C.$$

Έμμεση λύση. Επιβεβαίωση!

$$y'\left(2y + \frac{2}{y}\right) = 2x.$$

Έμμεσες Λύσεις

$$y' = \frac{xy}{y^2+1}.$$

$$\frac{y^2+1}{y}\ dy = \left(y + \frac{1}{y}\right)\ dy = x\ dx$$

$$\frac{y^2}{2} + \ln|y| = \frac{x^2}{2} + C$$

$$y^2 + 2\ln|y| = x^2 + C.$$

Έμμεση λύση. Επιβεβαίωση!

$$y'\left(2y + \frac{2}{y}\right) = 2x.$$

Υπάρχει βεβαίως και η *ιδιάζουσα λύση* $y(x) = 0$.

Παράδειγμα

$$x^2y' = 1 - x^2 + y^2 - x^2y^2, \quad y(1) = 0$$

Παράδειγμα

$$x^2y' = 1 - x^2 + y^2 - x^2y^2, \quad y(1) = 0$$

$$x^2y' = (1 - x^2)(1 + y^2).$$

Παράδειγμα

$$x^2y' = 1 - x^2 + y^2 - x^2y^2, \quad y(1) = 0$$

$$x^2y' = (1 - x^2)(1 + y^2).$$

$$\frac{y'}{1+y^2} = \frac{1-x^2}{x^2} \Rightarrow \frac{y'}{1+y^2} = \frac{1}{x^2} - 1,$$

$$\arctan(y) = \frac{-1}{x} - x + C, \Rightarrow y = \tan\left(\frac{-1}{x} - x + C\right).$$

Από την αρχική συνθήκη, $0 = \tan(-2 + C)$ έχουμε $C = 2$ (ή $2 + \pi, \dots$) και καταλήγουμε

$$y = \tan\left(\frac{-1}{x} - x + 2\right).$$

Παράδειγμα

Φτιάχνουμε καφέ χρησιμοποιώντας βραστό νερό ($100^o C$). Μετά από $1'$ η θερμοκρασία T του καφέ είναι $95^o C$. Η θερμοκρασία A του περιβάλλοντος είναι $10^o C$ και προτιμούμε τον καφέ μας στους $70^o C$. Πόσο πρέπει να περιμένουμε;

Παράδειγμα

Φτιάχνουμε καφέ χρησιμοποιώντας βραστό νερό ($100^o C$). Μετά από $1'$ η θερμοκρασία T του καφέ είναι $95^o C$. Η θερμοκρασία A του περιβάλλοντος είναι $10^o C$ και προτιμούμε τον καφέ μας στους $70^o C$. Πόσο πρέπει να περιμένουμε;

$$\frac{dT}{dt} = k(A - T), \quad A = 10, \; T(0) = 100, \; T(1) = 95.$$

Παράδειγμα

Φτιάχνουμε καφέ χρησιμοποιώντας βραστό νερό ($100^o C$). Μετά από $1'$ η θερμοκρασία T του καφέ είναι $95^o C$. Η θερμοκρασία A του περιβάλλοντος είναι $10^o C$ και προτιμούμε τον καφέ μας στους $70^o C$. Πόσο πρέπει να περιμένουμε;

$$\frac{dT}{dt} = k(A - T), \quad A = 10, \; T(0) = 100, \; T(1) = 95.$$

$$\frac{1}{A-T} \frac{dT}{dt} = k$$

Παράδειγμα

Φτιάχνουμε καφέ χρησιμοποιώντας βραστό νερό (100^oC). Μετά από $1'$ η θερμοκρασία T του καφέ είναι 95^oC. Η θερμοκρασία A του περιβάλλοντος είναι 10^oC και προτιμούμε τον καφέ μας στους 70^oC. Πόσο πρέπει να περιμένουμε;

$$\frac{dT}{dt} = k(A-T), \quad A = 10,\ T(0) = 100,\ T(1) = 95.$$

$$\frac{1}{A-T}\frac{dT}{dt} = k \Rightarrow \ln(A-T) = -kt + C \Rightarrow A-T = De^{-kt}, T = A - De^{-k}$$

Δηλαδή

$T = 10 - De^{-kt} \Rightarrow 100 = T(0) = 10 - D \ \Rightarrow D = -90$

Παράδειγμα

Φτιάχνουμε καφέ χρησιμοποιώντας βραστό νερό (100^oC). Μετά από $1'$ η θερμοκρασία T του καφέ είναι 95^oC. Η θερμοκρασία A του περιβάλλοντος είναι 10^oC και προτιμούμε τον καφέ μας στους 70^oC. Πόσο πρέπει να περιμένουμε;

$$\frac{dT}{dt} = k(A-T), \quad A = 10, \; T(0) = 100, \; T(1) = 95.$$

$$\frac{1}{A-T}\frac{dT}{dt} = k \Rightarrow \ln(A-T) = -kt+C \Rightarrow A-T = De^{-kt}, T = A-De^{-k}$$

Δηλαδή

$T = 10 - De^{-kt} \Rightarrow 100 = T(0) = 10 - D \;\; \Rightarrow D = -90$

$T = 10 + 90e^{-kt} \Rightarrow 95 = T(1) = 10 + 90e^{-k} \Rightarrow k = -\ln\frac{95-10}{90} \approx 0.06.$

Παράδειγμα

Φτιάχνουμε καφέ χρησιμοποιώντας βραστό νερό (100^oC). Μετά από $1'$ η θερμοκρασία T του καφέ είναι 95^oC. Η θερμοκρασία A του περιβάλλοντος είναι 10^oC και προτιμούμε τον καφέ μας στους 70^oC. Πόσο πρέπει να περιμένουμε;

$$\frac{dT}{dt} = k(A-T), \quad A = 10,\ T(0) = 100,\ T(1) = 95.$$

$$\frac{1}{A-T}\frac{dT}{dt} = k \Rightarrow \ln(A-T) = -kt+C \Rightarrow A-T = De^{-kt}, T = A-De^{-k}$$

Δηλαδή

$T = 10 - De^{-kt} \Rightarrow 100 = T(0) = 10 - D \ \Rightarrow D = -90$
$T = 10 + 90e^{-kt} \Rightarrow 95 = T(1) = 10 + 90e^{-k} \Rightarrow k = -\ln\frac{95-10}{90} \approx 0.06.$

$$70 = 10 + 90e^{-0.06t} \Rightarrow t = -\frac{\ln\frac{70-10}{90}}{0.06} \approx 6.8 \text{ λεπτά}.$$

Γραμμικές εξισώσεις

Πρώτης τάξης

$$y' + p(x)y = f(x). \tag{1}$$

Γραμμικές εξισώσεις

Πρώτης τάξης

$$y' + p(x)y = f(x). \tag{1}$$

Ιδιότητες

- Η λύση υπάρχει αρκεί να ορίζονται οι $p(x)$ και $f(x)$
- Η ομαλότητα της λύσης ταυτίζεται με την ομαλότητα των $p(x)$ και $f(x)$

Μεθοδολογία επίλυσης

$$y' + p(x)y = f(x). \tag{2}$$

Μεθοδολογία επίλυσης

$$y' + p(x)y = f(x). \tag{2}$$

$$r(x)y' + r(x)p(x)y = \frac{d}{dx}\Big[r(x)y\Big].$$

Μεθοδολογία επίλυσης

$$y' + p(x)y = f(x). \tag{2}$$

$$r(x)y' + r(x)p(x)y = \frac{d}{dx}\Big[r(x)y\Big].$$

$$\frac{d}{dx}\Big[r(x)y\Big] = r(x)f(x).$$

Παρατηρήστε ότι

Μεθοδολογία επίλυσης

$$y' + p(x)y = f(x). \tag{2}$$

$$r(x)y' + r(x)p(x)y = \frac{d}{dx}\Big[r(x)y\Big].$$

$$\frac{d}{dx}\Big[r(x)y\Big] = r(x)f(x).$$

Παρατηρήστε ότι

- το δεξιό μέρος δεν εξαρτάται από το y
- το αριστερό μέρος είναι η αντιπαράγωγος μιας συνάρτησης
- μπορούμε να λύσουμε ως προς y

Μεθοδολογία επίλυσης

$$y' + p(x)y = f(x). \tag{2}$$

$$r(x)y' + r(x)p(x)y = \frac{d}{dx}\Big[r(x)y\Big].$$

$$\frac{d}{dx}\Big[r(x)y\Big] = r(x)f(x).$$

Παρατηρήστε ότι

- το δεξιό μέρος δεν εξαρτάται από το y
- το αριστερό μέρος είναι η αντιπαράγωγος μιας συνάρτησης
- μπορούμε να λύσουμε ως προς y **αν γνωρίζουμε την** $r(x)$**!**

Ολοκληρωτικός Παράγοντας

Βρες $r(x)$ τέτοια ώστε εάν την παραγωγίσουμε, θα πάρουμε την ίδια την συνάρτηση πολλαπλασιασμένη με $p(x)$.

Ολοκληρωτικός Παράγοντας

Βρες $r(x)$ τέτοια ώστε εάν την παραγωγίσουμε, θα πάρουμε την ίδια την συνάρτηση πολλαπλασιασμένη με $p(x)$.

$$r(x) = e^{\int p(x)dx}$$

Ολοκληρωτικός Παράγοντας

Βρες $r(x)$ τέτοια ώστε εάν την παραγωγίσουμε, θα πάρουμε την ίδια την συνάρτηση πολλαπλασιασμένη με $p(x)$.

$$r(x) = e^{\int p(x)dx}$$

Μένει να κάνουμε ανιαρές πράξεις.

$$\begin{aligned} y' + p(x)y &= f(x), \\ e^{\int p(x)dx}y' + e^{\int p(x)dx}p(x)y &= e^{\int p(x)dx}f(x), \\ \frac{d}{dx}\left[e^{\int p(x)dx}y\right] &= e^{\int p(x)dx}f(x), \\ e^{\int p(x)dx}y &= \int e^{\int p(x)dx}f(x)\,dx + C, \\ y &= e^{-\int p(x)dx}\left(\int e^{\int p(x)dx}f(x)\,dx + C\right). \end{aligned}$$

Γραμμικές εξισώσεις

$$y' + p(x)y = f(x).$$

Γραμμικές εξισώσεις

$$y' + p(x)y = f(x).$$

$$r(x)y' + r(x)p(x)y = \frac{d}{dx}\Big[r(x)y\Big].$$

Γραμμικές εξισώσεις

$$y' + p(x)y = f(x).$$

$$r(x)y' + r(x)p(x)y = \frac{d}{dx}\Big[r(x)y\Big].$$

$$r'(x) = p(x)r(x) \Rightarrow r(x) = e^{\int p(x)dx}$$

Γραμμικές εξισώσεις

$$y' + p(x)y = f(x).$$

$$r(x)y' + r(x)p(x)y = \frac{d}{dx}\Big[r(x)y\Big].$$

$$r'(x) = p(x)r(x) \Rightarrow r(x) = e^{\int p(x)dx}$$

$$\begin{aligned} y' + p(x)y &= f(x), \\ e^{\int p(x)dx}y' + e^{\int p(x)dx}p(x)y &= e^{\int p(x)dx}f(x), \\ \frac{d}{dx}\left[e^{\int p(x)dx}y\right] &= e^{\int p(x)dx}f(x), \\ e^{\int p(x)dx}y &= \int e^{\int p(x)dx}f(x)\,dx + C \end{aligned}$$

$$\boxed{y = e^{-\int p(x)dx}\left(\int e^{\int p(x)dx}f(x)\,dx + C\right).}$$

Παράδειγμα

$$y' + 2xy = e^{x-x^2} \qquad y(0) = -1\,.$$

Παράδειγμα

$$y' + 2xy = e^{x-x^2} \qquad y(0) = -1\,.$$

$p(x) = 2x,\ f(x) = e^{x-x^2},\ r(x) = e^{\int p(x)\,dx} = e^{x^2}.$

Παράδειγμα

$$y' + 2xy = e^{x-x^2} \qquad y(0) = -1\,.$$

$$p(x) = 2x,\ f(x) = e^{x-x^2},\ r(x) = e^{\int p(x)\,dx} = e^{x^2}.$$

$$e^{x^2}y' + 2xe^{x^2}y = e^{x-x^2}e^{x^2},$$
$$\frac{d}{dx}\left[e^{x^2}y\right] = e^{x}.$$

Παράδειγμα

$$y' + 2xy = e^{x-x^2} \qquad y(0) = -1.$$

$$p(x) = 2x,\ f(x) = e^{x-x^2},\ r(x) = e^{\int p(x)\,dx} = e^{x^2}.$$

$$\begin{aligned} e^{x^2}y' + 2xe^{x^2}y &= e^{x-x^2}e^{x^2}, \\ \frac{d}{dx}\left[e^{x^2}y\right] &= e^{x}. \end{aligned}$$

Ολοκληρώνουμε

$$\begin{aligned} e^{x^2}y &= e^{x} + C, \\ y &= e^{x-x^2} + Ce^{-x^2}. \end{aligned}$$

Παράδειγμα

$$y' + 2xy = e^{x-x^2} \qquad y(0) = -1.$$

$$p(x) = 2x,\ f(x) = e^{x-x^2},\ r(x) = e^{\int p(x)\,dx} = e^{x^2}.$$

$$\begin{aligned} e^{x^2}y' + 2xe^{x^2}y &= e^{x-x^2}e^{x^2}, \\ \frac{d}{dx}\left[e^{x^2}y\right] &= e^{x}. \end{aligned}$$

Ολοκληρώνουμε

$$\begin{aligned} e^{x^2}y &= e^{x} + C, \\ y &= e^{x-x^2} + Ce^{-x^2}. \end{aligned}$$

Από τις αρχικές συνθήκες $-1 = y(0) = 1 + C \Rightarrow C = -2.$

Παράδειγμα

$$y' + 2xy = e^{x-x^2} \qquad y(0) = -1.$$

$$p(x) = 2x,\ f(x) = e^{x-x^2},\ r(x) = e^{\int p(x)\,dx} = e^{x^2}.$$

$$e^{x^2}y' + 2xe^{x^2}y = e^{x-x^2}e^{x^2},$$
$$\frac{d}{dx}\left[e^{x^2}y\right] = e^x.$$

Ολοκληρώνουμε

$$e^{x^2}y = e^x + C,$$
$$y = e^{x-x^2} + Ce^{-x^2}.$$

Από τις αρχικές συνθήκες $-1 = y(0) = 1 + C \Rightarrow C = -2.$

$$y = e^{x-x^2} - 2e^{-x^2}.$$

Θεμελιώδες Θεώρημα του Λογισμού

Μπορούμε να γράψουμε το

$$\int f(x)\ dx + C$$

ως εξής

$$\int_{x_0}^{x} f(t)\ dt + C.$$

Ορισμένα Ολοκληρώματα

$$y' + p(x)y = f(x), \qquad y(x_0) = y_0.$$

Ορισμένα Ολοκληρώματα

$$y' + p(x)y = f(x), \qquad y(x_0) = y_0.$$

$$\boxed{y(x) = e^{-\int_{x_0}^{x} p(s)\,ds}\left(\int_{x_0}^{x} e^{\int_{x_0}^{t} p(s)\,ds} f(t)\,dt + y_0\right).}$$

Μπορούμε να υλοποιήσουμε τον παραπάνω τύπο στον υπολογιστή για να πάρουμε την τιμή της λύσης σε όποιο σημείο επιθυμούμε.

Παράδειγμα

Μια δεξαμενή 100λ περιέχει 10κ αλατιού διαλυμένα σε 60λ νερού. Διάλυμα νερού και αλατιού πυκνότητας 0.1κ/λ εισάγεται στο δοχείο με ρυθμό 5λ το λεπτό και εξάγεται από το δοχείο με ρυθμό 3λ το λεπτό. Πόσο αλάτι θα περιέχει η δεξαμενή όταν θα έχει γεμίσει;

Παράδειγμα

Μια δεξαμενή 100λ περιέχει 10κ αλατιού διαλυμένα σε 60λ νερού. Διάλυμα νερού και αλατιού πυκνότητας 0.1κ/λ εισάγεται στο δοχείο με ρυθμό 5λ το λεπτό και εξάγεται από το δοχείο με ρυθμό 3λ το λεπτό. Πόσο αλάτι θα περιέχει η δεξαμενή όταν θα έχει γεμίσει;

$x(t)$: αλάτι στη δεξαμενή την στιγμή t

$$\begin{aligned}\Delta x \approx\ & (\text{ρυθμός εισαγωγής} \times \text{συγκέντρωση εισαγωγής})\Delta t - \\ & (\text{ρυθμός εξαγωγής} \times \text{συγκέντρωση εξαγωγής})\Delta t.\end{aligned}$$

Παράδειγμα

Μια δεξαμενή 100λ περιέχει 10κ αλατιού διαλυμένα σε 60λ νερού. Διάλυμα νερού και αλατιού πυκνότητας 0.1κ/λ εισάγεται στο δοχείο με ρυθμό 5λ το λεπτό και εξάγεται από το δοχείο με ρυθμό 3λ το λεπτό. Πόσο αλάτι θα περιέχει η δεξαμενή όταν θα έχει γεμίσει;

$x(t)$: αλάτι στη δεξαμενή την στιγμή t

$$\begin{aligned}\Delta x \approx\ & (\text{ρυθμός εισαγωγής} \times \text{συγκέντρωση εισαγωγής})\Delta t - \\ & (\text{ρυθμός εξαγωγής} \times \text{συγκέντρωση εξαγωγής})\Delta t.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} =\ & (\text{ρυθμός εισαγωγής} \times \text{συγκέντρωση εισαγωγής}) - \\ & (\text{ρυθμός εξαγωγής} \times \text{συγκέντρωση εξαγωγής}).\end{aligned}$$

Παράδειγμα

Μια δεξαμενή 100λ περιέχει 10κ αλατιού διαλυμένα σε 60λ νερού. Διάλυμα νερού και αλατιού πυκνότητας 0.1κ/λ εισάγεται στο δοχείο με ρυθμό 5λ το λεπτό και εξάγεται από το δοχείο με ρυθμό 3λ το λεπτό. Πόσο αλάτι θα περιέχει η δεξαμενή όταν θα έχει γεμίσει;

$x(t)$: αλάτι στη δεξαμενή την στιγμή t

$$\begin{aligned}\Delta x \approx\ & (\text{ρυθμός εισαγωγής} \times \text{συγκέντρωση εισαγωγής})\Delta t - \\ & (\text{ρυθμός εξαγωγής} \times \text{συγκέντρωση εξαγωγής})\Delta t.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} =\ & (\text{ρυθμός εισαγωγής} \times \text{συγκέντρωση εισαγωγής}) - \\ & (\text{ρυθμός εξαγωγής} \times \text{συγκέντρωση εξαγωγής}).\end{aligned}$$

$$\frac{dx}{dt} = (5 \times 0.1) - \left(3\frac{x}{60+2t}\right) \Leftrightarrow \frac{dx}{dt} + \frac{3}{60+2t}x = 0.5.$$

Παράδειγμα (συνέχεια)

$$\frac{dx}{dt} + \frac{3}{60+2t}x = 0.5.$$

Παράδειγμα (συνέχεια)

$$\frac{dx}{dt} + \frac{3}{60+2t}x = 0.5.$$

$$r(t) = \exp\left(\int \frac{3}{60+2t}dt\right) = \exp\left(\frac{3}{2}\ln(60+2t)\right) = (60+2t)^{3/2}.$$

Παράδειγμα (συνέχεια)

$$\frac{dx}{dt} + \frac{3}{60+2t}x = 0.5.$$

$$r(t) = \exp\left(\int \frac{3}{60+2t}dt\right) = \exp\left(\frac{3}{2}\ln(60+2t)\right) = (60+2t)^{3/2}.$$

$$\begin{aligned}
(60+2t)^{3/2}\frac{dx}{dt} + (60+2t)^{3/2}\frac{3}{60+2t}x &= 0.5(60+2t)^{3/2},\\
\frac{d}{dt}\left[(60+2t)^{3/2}x\right] &= 0.5(60+2t)^{3/2},\\
(60+2t)^{3/2}x &= \int 0.5(60+2t)^{3/2}dt + C,
\end{aligned}$$

Παράδειγμα (συνέχεια)

$$\frac{dx}{dt} + \frac{3}{60+2t}x = 0.5.$$

$$r(t) = \exp\left(\int \frac{3}{60+2t}dt\right) = \exp\left(\frac{3}{2}\ln(60+2t)\right) = (60+2t)^{3/2}.$$

$$\begin{aligned}
(60+2t)^{3/2}\frac{dx}{dt} + (60+2t)^{3/2}\frac{3}{60+2t}x &= 0.5(60+2t)^{3/2}, \\
\frac{d}{dt}\left[(60+2t)^{3/2}x\right] &= 0.5(60+2t)^{3/2}, \\
(60+2t)^{3/2}x &= \int 0.5(60+2t)^{3/2}dt + C,
\end{aligned}$$

$$x = (60+2t)^{-3/2}\int \frac{(60+2t)^{3/2}}{2}dt + C(60+2t)^{-3/2},$$

$$x = (60+2t)^{-3/2}\frac{1}{10}(60+2t)^{5/2} + C(60+2t)^{-3/2}$$

Παράδειγμα (συνέχεια)

$$\frac{dx}{dt} + \frac{3}{60+2t}x = 0.5.$$

$$r(t) = \exp\left(\int \frac{3}{60+2t}dt\right) = \exp\left(\frac{3}{2}\ln(60+2t)\right) = (60+2t)^{3/2}.$$

$$\begin{aligned}
(60+2t)^{3/2}\frac{dx}{dt} + (60+2t)^{3/2}\frac{3}{60+2t}x &= 0.5(60+2t)^{3/2},\\
\frac{d}{dt}\left[(60+2t)^{3/2}x\right] &= 0.5(60+2t)^{3/2},\\
(60+2t)^{3/2}x &= \int 0.5(60+2t)^{3/2}dt + C,
\end{aligned}$$

$$x = (60+2t)^{-3/2}\int \frac{(60+2t)^{3/2}}{2}dt + C(60+2t)^{-3/2},$$

$$x = (60+2t)^{-3/2}\frac{1}{10}(60+2t)^{5/2} + C(60+2t)^{-3/2}$$

Παράδειγμα (συνέχεια)

Μια δεξαμενή 100λ περιέχει 10κ αλατιού διαλυμένα σε 60λ νερού. Διάλυμα νερού και αλατιού πυκνότητας 0.1κ/λ εισάγεται στο δοχείο με ρυθμό 5λ το λεπτό και εξάγεται από το δοχείο με ρυθμό 3λ το λεπτό. Πόσο αλάτι θα περιέχει η δεξαμενή όταν θα έχει γεμίσει;

$$x(t) = \frac{60+2t}{10} + C(60+2t)^{-3/2}.$$

Παράδειγμα (συνέχεια)

Μια δεξαμενή 100λ περιέχει 10κ αλατιού διαλυμένα σε 60λ νερού. Διάλυμα νερού και αλατιού πυκνότητας 0.1κ/λ εισάγεται στο δοχείο με ρυθμό 5λ το λεπτό και εξάγεται από το δοχείο με ρυθμό 3λ το λεπτό. Πόσο αλάτι θα περιέχει η δεξαμενή όταν θα έχει γεμίσει;

$$x(t) = \frac{60+2t}{10} + C(60+2t)^{-3/2}.$$

$$10 = x(0) = 6 + C(60)^{-3/2} \Rightarrow C = 4(60^{3/2}) \approx 1859.03$$

Παράδειγμα (συνέχεια)

Μια δεξαμενή 100λ περιέχει 10κ αλατιού διαλυμένα σε 60λ νερού. Διάλυμα νερού και αλατιού πυκνότητας 0.1κ/λ εισάγεται στο δοχείο με ρυθμό 5λ το λεπτό και εξάγεται από το δοχείο με ρυθμό 3λ το λεπτό. Πόσο αλάτι θα περιέχει η δεξαμενή όταν θα έχει γεμίσει;

$$x(t) = \frac{60+2t}{10} + C(60+2t)^{-3/2}.$$

$$10 = x(0) = 6 + C(60)^{-3/2} \Rightarrow C = 4(60^{3/2}) \approx 1859.03$$

Δεξαμενή γεμάτη όταν $60 + 2t = 100$, δηλ. όταν $t = 20$

$$x(20) \approx 10 + 1859.03(100)^{-3/2} \approx 11.86.$$

Παράδειγμα

$$y' = (x - y + 1)^2.$$

Παράδειγμα

$$y' = (x - y + 1)^2.$$

$$v = x - y + 1 \;\Rightarrow\; v' = 1 - y',\; y' = 1 - v'.$$

Παράδειγμα

$$y' = (x - y + 1)^2.$$

$$v = x - y + 1 \;\Rightarrow\; v' = 1 - y',\; y' = 1 - v'.$$

$$1 - v' = v^2 \;\Rightarrow\; v' = 1 - v^2 \Rightarrow \frac{1}{1 - v^2}\, dv = dx \Rightarrow \frac{1}{2} \ln \left| \frac{v+1}{v-1} \right| = x + C,$$

Παράδειγμα

$$y' = (x - y + 1)^2.$$

$$v = x - y + 1 \;\Rightarrow\; v' = 1 - y',\; y' = 1 - v'.$$

$$1 - v' = v^2 \;\Rightarrow\; v' = 1 - v^2 \Rightarrow \frac{1}{1 - v^2}\, dv = dx \Rightarrow \frac{1}{2} \ln \left|\frac{v+1}{v-1}\right| = x + C,$$

$$\left|\frac{v+1}{v-1}\right| = e^{2x+2C} \Rightarrow \frac{v+1}{v-1} = De^{2x}$$

Παράδειγμα

$$y' = (x - y + 1)^2.$$

$$v = x - y + 1 \;\Rightarrow\; v' = 1 - y',\; y' = 1 - v'.$$

$$1 - v' = v^2 \;\Rightarrow\; v' = 1 - v^2 \Rightarrow \frac{1}{1 - v^2}\,dv = dx \Rightarrow \frac{1}{2}\ln\left|\frac{v+1}{v-1}\right| = x + C,$$

$$\left|\frac{v+1}{v-1}\right| = e^{2x+2C} \Rightarrow \frac{v+1}{v-1} = De^{2x}$$

$\frac{x-y+2}{x-y} = De^{2x}$ και $y = x$, και $y = x + 2$.

Παράδειγμα

$$y' = (x - y + 1)^2.$$

$$v = x - y + 1 \;\Rightarrow\; v' = 1 - y',\; y' = 1 - v'.$$

$$1 - v' = v^2 \;\Rightarrow\; v' = 1 - v^2 \Rightarrow \frac{1}{1 - v^2}\, dv = dx \Rightarrow \frac{1}{2} \ln \left| \frac{v+1}{v-1} \right| = x + C,$$

$$\left| \frac{v+1}{v-1} \right| = e^{2x+2C} \Rightarrow \frac{v+1}{v-1} = De^{2x}$$

$$\tfrac{x-y+2}{x-y} = De^{2x} \text{ και } y = x, \text{ και } y = x + 2.$$

$$x - y + 2 = (x - y)De^{2x} \quad\Rightarrow\quad y = \frac{Dxe^{2x} - x - 2}{De^{2x} - 1}.$$

Μαντεψιές

Όταν δεις	δοκίμασε
yy'	y^2
y^2y'	y^3
$(\cos y)y'$	$\sin y$
$(\sin y)y'$	$\cos y$
$y'e^y$	e^y

Εξισώσεις *Bernoulli*

$$y' + p(x)y = q(x)y^n.$$

Μαντεψιά: $v = y^{1-n}$

Παράδειγμα

$$xy' + y(x+1) + xy^5 = 0, \qquad y(1) = 1.$$

Αντικατάσταση

$$v = y^{1-5} = y^{-4}, \qquad \Rightarrow \qquad v' = -4y^{-5}y' \qquad \Rightarrow \qquad \frac{-y^5}{4}v' = y'$$

Παράδειγμα

$$xy' + y(x+1) + xy^5 = 0, \qquad y(1) = 1.$$

Αντικατάσταση

$$v = y^{1-5} = y^{-4}, \quad \Rightarrow \quad v' = -4y^{-5}y' \quad \Rightarrow \quad \frac{-y^5}{4}v' = y'$$

$$\begin{aligned} xy' + y(x+1) + xy^5 &= 0, \\ \frac{-xy^5}{4}v' + y(x+1) + xy^5 &= 0, \\ \frac{-x}{4}v' + y^{-4}(x+1) + x &= 0, \\ \frac{-x}{4}v' + v(x+1) + x &= 0, \end{aligned}$$

$$v' - \frac{4(x+1)}{x}v = 4.$$

Παράδειγμα (συνέχεια)

$$v' - \frac{4(x+1)}{x} v = 4.$$

Παράδειγμα (συνέχεια)

$$v' - \frac{4(x+1)}{x}v = 4.$$

$$r(x) = \exp\left(\int \frac{-4(x+1)}{x}\,dx\right) = e^{-4x-4\ln(x)} = e^{-4x}x^{-4} = \frac{e^{-4x}}{x^4}.$$

Παράδειγμα (συνέχεια)

$$v' - \frac{4(x+1)}{x} v = 4.$$

$$r(x) = \exp\left(\int \frac{-4(x+1)}{x} \, dx \right) = e^{-4x - 4\ln(x)} = e^{-4x} x^{-4} = \frac{e^{-4x}}{x^4}.$$

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{e^{-4x}}{x^4} v \right] = 4\frac{e^{-4x}}{x^4},$$

$$\frac{e^{-4x}}{x^4} v = \int_1^x 4\frac{e^{-4s}}{s^4} \, ds + 1,$$

$$v = e^{4x} x^4 \left(4 \int_1^x \frac{e^{-4s}}{s^4} \, ds + 1 \right).$$

Παράδειγμα (συνέχεια)

$$v' - \frac{4(x+1)}{x}v = 4.$$

$$r(x) = \exp\left(\int \frac{-4(x+1)}{x}\,dx\right) = e^{-4x-4\ln(x)} = e^{-4x}x^{-4} = \frac{e^{-4x}}{x^4}.$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left[\frac{e^{-4x}}{x^4}v\right] &= 4\frac{e^{-4x}}{x^4}, \\
\frac{e^{-4x}}{x^4}v &= \int_1^x 4\frac{e^{-4s}}{s^4}\,ds + 1, \\
v &= e^{4x}x^4\left(4\int_1^x \frac{e^{-4s}}{s^4}\,ds + 1\right).
\end{aligned}$$

$$y^{-4} = e^{4x}x^4\left(4\int_1^x \frac{e^{-4s}}{s^4}\,ds + 1\right),$$

$$y = \frac{e^{-x}}{x\left(4\int_1^x \frac{e^{-4s}}{s^4}\,ds + 1\right)^{1/4}}.$$

Ομογενείς εξισώσεις

$$y' = F\left(\frac{y}{x}\right).$$

Μετασχηματισμός

$$v = \frac{y}{x} \qquad \Rightarrow \qquad y' = v + xv'.$$

Ομογενείς εξισώσεις

$$y' = F\left(\frac{y}{x}\right).$$

Μετασχηματισμός

$$v = \frac{y}{x} \qquad \Rightarrow \qquad y' = v + xv'.$$

$$v + xv' = F(v) \qquad \Rightarrow \qquad xv' = F(v) - v \qquad \Rightarrow \qquad \frac{v'}{F(v) - v} = \frac{1}{x}.$$

Έμμεση λύση

$$\int \frac{1}{F(v) - v}\, dv = \ln|x| + C.$$

Παράδειγμα

$$x^2y' = y^2 + xy, \qquad y(1) = 1.$$

Παράδειγμα

$$x^2y' = y^2 + xy, \qquad y(1) = 1.$$

$y' = \left(\frac{y}{x}\right)^2 + \frac{y}{x}$. Μετασχηματισμός $v = \frac{y}{x}$

Παράδειγμα

$$x^2y' = y^2 + xy, \qquad y(1) = 1.$$

$y' = \left(\frac{y}{x}\right)^2 + \frac{y}{x}$. Μετασχηματισμός $v = \frac{y}{x}$

$$xv' = v^2 + v - v = v^2,$$

Παράδειγμα

$$x^2y' = y^2 + xy, \qquad y(1) = 1.$$

$y' = \left(\frac{y}{x}\right)^2 + \frac{y}{x}$. Μετασχηματισμός $v = \frac{y}{x}$

$$xv' = v^2 + v - v = v^2,$$

$$\int \frac{1}{v^2}\,dv = \ln|x| + C,$$

$$\frac{-1}{v} = \ln|x| + C,$$

$$v = \frac{-1}{\ln|x| + C}.$$

Παράδειγμα (συνέχεια)

$$\begin{aligned} y/x &= \frac{-1}{\ln|x| + C}, \\ y &= \frac{-x}{\ln|x| + C}. \end{aligned}$$

Παράδειγμα (συνέχεια)

$$y/x = \frac{-1}{\ln|x| + C},$$
$$y = \frac{-x}{\ln|x| + C}.$$

$$1 = y(1) = \frac{-1}{\ln|1| + C} = \frac{-1}{C}.$$

Παράδειγμα (συνέχεια)

$$
\begin{aligned}
y/x &= \frac{-1}{\ln|x| + C}, \\
y &= \frac{-x}{\ln|x| + C}.
\end{aligned}
$$

$$1 = y(1) = \frac{-1}{\ln|1| + C} = \frac{-1}{C}.$$

$$y = \frac{-x}{\ln|x| - 1}.$$

Παράδειγμα (συνέχεια)

$$
\begin{aligned}
y/x &= \frac{-1}{\ln|x| + C}, \\
y &= \frac{-x}{\ln|x| + C}.
\end{aligned}
$$

Παράδειγμα (συνέχεια)

$$
\begin{aligned}
y/x &= \frac{-1}{\ln|x| + C}, \\
y &= \frac{-x}{\ln|x| + C}.
\end{aligned}
$$

$$1 = y(1) = \frac{-1}{\ln|1| + C} = \frac{-1}{C}.$$

Παράδειγμα (συνέχεια)

$$
\begin{aligned}
y/x &= \frac{-1}{\ln|x| + C}, \\
y &= \frac{-x}{\ln|x| + C}.
\end{aligned}
$$

$$1 = y(1) = \frac{-1}{\ln|1| + C} = \frac{-1}{C}.$$

$$y = \frac{-x}{\ln|x| - 1}.$$

Αυτόνομες Εξισώσεις

$$\frac{dx}{dt} = f(x).$$

Αυτόνομες Εξισώσεις

$$\frac{dx}{dt} = f(x).$$

Μοντέλα

- Το πρόβλημα του καφέ $\frac{dx}{dt} = -k(x - A)$.
- Πληθυσμιακό μοντέλο (βακτηρίδια) $\frac{dP}{dt} = kP$.

Αυτόνομες Εξισώσεις

$$\frac{dx}{dt} = f(x).$$

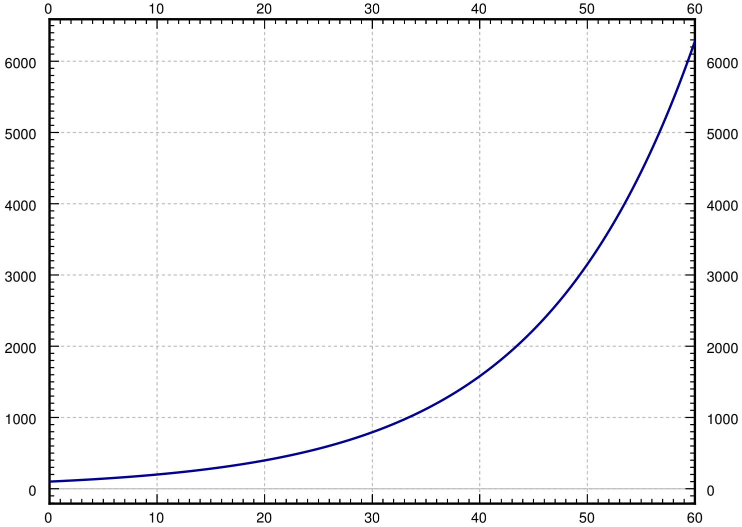
Μοντέλα

- Το πρόβλημα του καφέ $\frac{dx}{dt} = -k(x - A)$.
- Πληθυσμιακό μοντέλο (βακτηρίδια) $\frac{dP}{dt} = kP$.

Ορισμοί

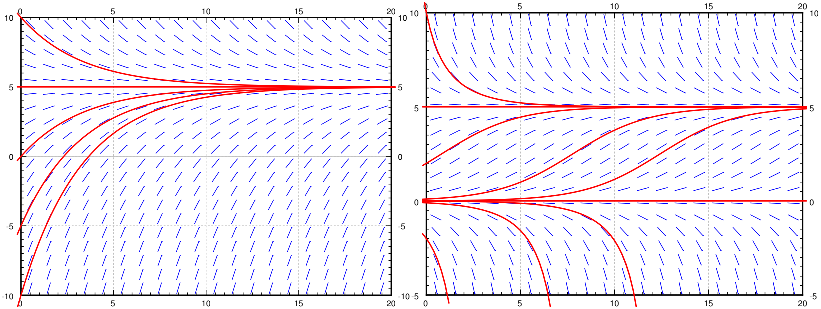
- Τα σημεία του x άξονα στα οποία έχουμε $f(x) = 0$ τα λέμε *κρίσιμα σημεία*.
- Αποτελούν λύσεις των αυτόνομων εξισώσεων και τις λέμε *λύσεις ισορροπίας*.

Παραδείγματα



Σχήμα : Πληθυσμιακό μοντέλο.

Παραδείγματα



Σχήμα : Πεδία κατευθύνσεων και γραφική παράσταση μερικών λύσεων των εξισώσεων $x' = -0.3(x-5)$ και $x' = -0.1x(5-x)$.

Ευσταθείς Λύσεις

Μια λύση (ή ένα κρίσιμο σημείο) λέγετε ‘ευσταθής’ όταν μικρές διαταραχές στο x δεν οδηγούν σε ουσιαστικά διαφορετικές λύσεις για αρκετά μεγάλο t.

Παράδειγμα - Λογιστική Εξίσωση

$$\frac{dx}{dt} = kx(M - x),$$

Πληθυσμιακό μοντέλο εάν γνωρίσουμε ότι ο πληθυσμός ενός είδους δεν μπορεί να υπερβεί τον αριθμό M.

Παράδειγμα - Λογιστική Εξίσωση

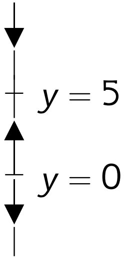
$$\frac{dx}{dt} = kx(M - x),$$

Πληθυσμιακό μοντέλο εάν γνωρίσουμε ότι ο πληθυσμός ενός είδους δεν μπορεί να υπερβεί τον αριθμό M.

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \begin{cases} 5 & \text{αν } x(0) > 0, \\ 0 & \text{αν } x(0) = 0, \\ \text{ΔΥ ή } -\infty & \text{αν } x(0) < 0. \end{cases}$$

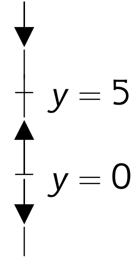
Διάγραμμα Φάσης

Συμπεριφορά της λύσης σε βάθος χρόνου

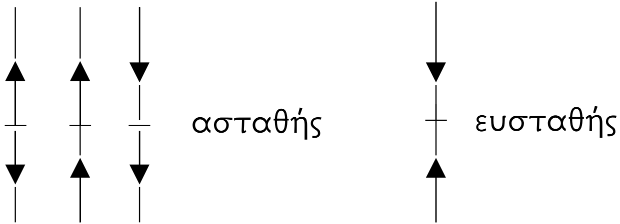


Διάγραμμα Φάσης

Συμπεριφορά της λύσης σε βάθος χρόνου



Γενικά



Λογιστική Εξίσωση με Κατανάλωση

Μια ομάδα ανθρώπων βασίζει την επιβίωσή της στην εκτροφή μια αγέλης ζώων.

Λογιστική Εξίσωση με Κατανάλωση

Μια ομάδα ανθρώπων βασίζει την επιβίωσή της στην εκτροφή μια αγέλης ζώων.

Έστω

- Τα καταναλώνει με ρυθμό h ζώα τον χρόνο.
- x πλήθος ζώων (χιλιάδες)
- t χρόνος (έτη).
- M ελάχιστος πληθυσμός κάτω από τον οποίο δεν επιτρέπεται η κατανάλωση ζώων.
- $k > 0$ σταθερά αναπαραγωγής των ζώων.

Λογιστική Εξίσωση με Κατανάλωση

Μια ομάδα ανθρώπων βασίζει την επιβίωσή της στην εκτροφή μια αγέλης ζώων.

Έστω

- Τα καταναλώνει με ρυθμό h ζώα τον χρόνο.
- x πλήθος ζώων (χιλιάδες)
- t χρόνος (έτη).
- M ελάχιστος πληθυσμός κάτω από τον οποίο δεν επιτρέπεται η κατανάλωση ζώων.
- $k > 0$ σταθερά αναπαραγωγής των ζώων.

$$\frac{dx}{dt} = kx(M - x) - h.$$

Λογιστική Εξίσωση με Κατανάλωση

Μια ομάδα ανθρώπων βασίζει την επιβίωσή της στην εκτροφή μια αγέλης ζώων.

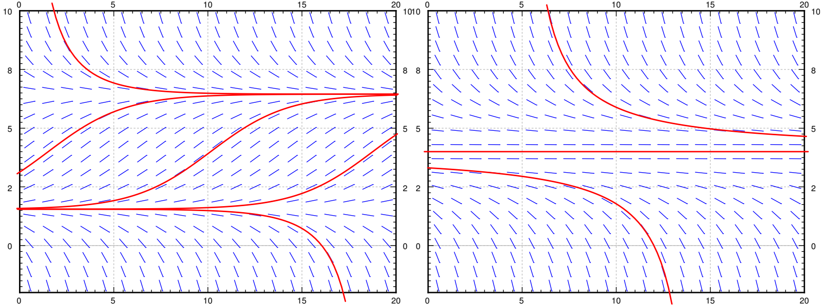
Έστω

- Τα καταναλώνει με ρυθμό h ζώα τον χρόνο.
- x πλήθος ζώων (χιλιάδες)
- t χρόνος (έτη).
- M ελάχιστος πληθυσμός κάτω από τον οποίο δεν επιτρέπεται η κατανάλωση ζώων.
- $k > 0$ σταθερά αναπαραγωγής των ζώων.

$$\frac{dx}{dt} = kx(M - x) - h.$$

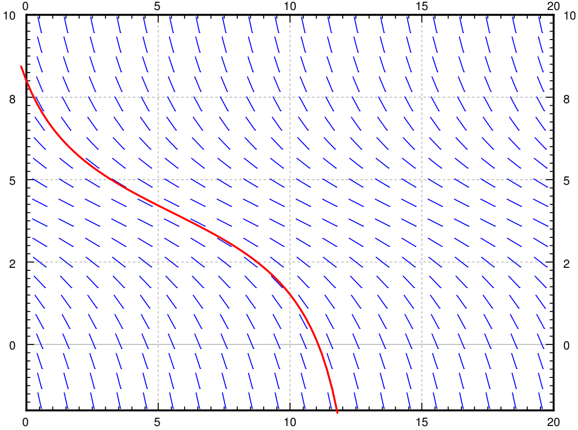
Κρίσιμα σημεία: $A, B = \frac{kM \pm \sqrt{(kM)^2 - 4hk}}{2k}$.

Λογιστική Εξίσωση με Κατανάλωση (h=1, 1.6)



Σχήμα : Πεδία κατευθύνσεων και μερικές λύσεις των εξισώσεων $x' = -0.1x(8-x) - 1$ και $x' = -0.1x(8-x) - 1.6$.

Λογιστική Εξίσωση με Κατανάλωση ($h=2$)



Σχήμα : Πεδία κατευθύνσεων και μερικές λύσεις των εξισώσεων $x' = -0.1x(8-x) - 2$.