Διαφορικές Εξισώσεις

Μετασχηματισμοί Laplace

Μανόλης Βάβαλης

Τμήμα Μηχανικών Η/Υ Τηλεπικοινωνιών και Δικτύων
Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

Βόλος, 14 Μαΐου 2013

Περιεχόμενα

Ορισμός - Παραδείγματα

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) \overset{\text{ορισμός}}{=} \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\ dt.$$

Ορισμός - Παραδείγματα

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) \overset{\text{ορισμός}}{=} \int_0^\infty e^{-st} f(t)\ dt.$$

Παραδείγματα

$f(t) = 1\ :\ \mathcal{L}\{1\} = \int_0^\infty e^{-st}\ dt =$

Ορισμός - Παραδείγματα

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) \overset{\text{ορισμός}}{=} \int_0^\infty e^{-st} f(t)\ dt.$$

Παραδείγματα

$$f(t) = 1\ :\ \mathcal{L}\{1\} = \int_0^\infty e^{-st}\ dt = \left[\frac{e^{-st}}{-s}\right]_{t=0}^{\infty}$$

Ορισμός - Παραδείγματα

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) \overset{\text{ορισμός}}{=} \int_0^\infty e^{-st} f(t)\ dt.$$

Παραδείγματα

$f(t) = 1\ :\ \mathcal{L}\{1\} = \int_0^\infty e^{-st}\ dt = \left[\frac{e^{-st}}{-s}\right]_{t=0}^{\infty} = \frac{1}{s}.$

Ορισμός - Παραδείγματα

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) \overset{\text{ορισμός}}{=} \int_0^\infty e^{-st} f(t)\ dt.$$

Παραδείγματα

$f(t) = 1\ :\ \mathcal{L}\{1\} = \int_0^\infty e^{-st}\ dt = \left[\frac{e^{-st}}{-s}\right]_{t=0}^\infty = \frac{1}{s}.$

$f(t) = e^{-\alpha t}\ :\ \mathcal{L}\{e^{-\alpha t}\}$

Ορισμός - Παραδείγματα

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) \overset{\text{ορισμός}}{=} \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\ dt.$$

Παραδείγματα

$f(t) = 1\ :\ \mathcal{L}\{1\} = \int_0^{\infty} e^{-st}\ dt = \left[\frac{e^{-st}}{-s}\right]_{t=0}^{\infty} = \frac{1}{s}.$

$f(t) = e^{-\alpha t}\ :\ \mathcal{L}\{e^{-\alpha t}\} = \int_0^{\infty} e^{-st} e^{-\alpha t}\ dt =$

Ορισμός - Παραδείγματα

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) \overset{\text{ορισμός}}{=} \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\ dt.$$

Παραδείγματα

$f(t) = 1\ :\ \mathcal{L}\{1\} = \int_0^{\infty} e^{-st}\ dt = \left[\frac{e^{-st}}{-s}\right]_{t=0}^{\infty} = \frac{1}{s}.$

$f(t) = e^{-\alpha t}\ :\ \mathcal{L}\{e^{-\alpha t}\} = \int_0^{\infty} e^{-st} e^{-\alpha t}\ dt = \left[\frac{e^{-(s+\alpha)t}}{-(s+\alpha)}\right]_{t=0}^{\infty} = \frac{1}{s+\alpha}.$

Ορισμός - Παραδείγματα

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) \overset{\text{ορισμός}}{=} \int_0^\infty e^{-st} f(t)\ dt.$$

Παραδείγματα

$f(t) = 1\ :\ \mathcal{L}\{1\} = \int_0^\infty e^{-st}\ dt = \left[\frac{e^{-st}}{-s}\right]_{t=0}^\infty = \frac{1}{s}.$

$f(t) = e^{-\alpha t}\ :\ \mathcal{L}\{e^{-\alpha t}\} = \int_0^\infty e^{-st} e^{-\alpha t}\ dt = \left[\frac{e^{-(s+\alpha)t}}{-(s+\alpha)}\right]_{t=0}^\infty = \frac{1}{s+\alpha}.$

$f(t) = t\ :$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{t\} &= \int_0^\infty e^{-st} t\ dt \\
&= \left[\frac{-te^{-st}}{s}\right]_{t=0}^\infty + \frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-st}\ dt \\
&= 0 + \frac{1}{s}\left[\frac{e^{-st}}{-s}\right]_{t=0}^\infty = \frac{1}{s^2}.
\end{aligned}$$

Παράδειγμα - συνάρτηση *Heaviside*

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{αν } \; t < 0, \\ 1 & \text{αν } \; t \geq 0. \end{cases}$$

Παράδειγμα - συνάρτηση *Heaviside*

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \alpha\nu \;\; t < 0, \\ 1 & \alpha\nu \;\; t \geq 0. \end{cases}$$

$\mathcal{L}\{u(t-\alpha)\} =$

Παράδειγμα - συνάρτηση *Heaviside*

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \alpha\nu \;\; t < 0, \\ 1 & \alpha\nu \;\; t \geq 0. \end{cases}$$

$$\mathcal{L}\{u(t-\alpha)\} = \int_0^\infty e^{-st} u(t-\alpha)\, dt =$$

Παράδειγμα - συνάρτηση *Heaviside*

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{αν } t < 0, \\ 1 & \text{αν } t \geq 0. \end{cases}$$

$$\mathcal{L}\{u(t-\alpha)\} = \int_0^\infty e^{-st} u(t-\alpha)\, dt = \int_\alpha^\infty e^{-st}\, dt =$$

Παράδειγμα - συνάρτηση *Heaviside*

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \alpha\nu \;\; t < 0, \\ 1 & \alpha\nu \;\; t \geq 0. \end{cases}$$

$$\mathcal{L}\{u(t-\alpha)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} u(t-\alpha)\, dt = \int_{\alpha}^{\infty} e^{-st}\, dt = \left[\frac{e^{-st}}{-s}\right]_{t=\alpha}^{\infty} = \frac{e^{-\alpha s}}{s},$$

Πίνακας μετασχηματισμών Laplace

$f(t)$	$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$
C	$\frac{C}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$
t^2	$\frac{2}{s^3}$
t^3	$\frac{6}{s^4}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{s+\alpha}$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
$\sinh \omega t$	$\frac{\omega}{s^2-\omega^2}$
$\cosh \omega t$	$\frac{s}{s^2-\omega^2}$
$u(t-\alpha)$	$\frac{e^{-\alpha s}}{s}$

Γραμμικότητα

$$\mathcal{L}\{Cf(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} Cf(t)\ dt = C \int_0^\infty e^{-st} f(t)\ dt = C\mathcal{L}\{f(t)\}.$$

Γραμμικότητα

$$\mathcal{L}\{Cf(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} Cf(t)\ dt = C \int_0^\infty e^{-st} f(t)\ dt = C\mathcal{L}\{f(t)\}.$$

Έστω ότι A, B, και C τυχαίες σταθερές, τότε

$$\boxed{\mathcal{L}\{Af(t) + Bg(t)\} = A\mathcal{L}\{f(t)\} + B\mathcal{L}\{g(t)\},}$$

Προσοχή!

$$\mathcal{L}\{f(t)g(t)\} \neq \mathcal{L}\{f(t)\}\mathcal{L}\{g(t)\}.$$

Προσοχή!

$$\mathcal{L}\{f(t)g(t)\} \neq \mathcal{L}\{f(t)\}\mathcal{L}\{g(t)\}.$$

Δεν έχουν όλες οι συναρτήσεις μετασχηματισμό Laplace
Π.χ. οι $\tan t$ και e^{t^2}.

Αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace

Ορισμός - Έστω $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ για κάποια συνάρτηση $f(t)$.

Αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace

Ορισμός - Έστω $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ για κάποια συνάρτηση $f(t)$. Ορίζουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace ως εξής

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} \overset{\text{ορισμός}}{=} f(t).$$

Αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace

Ορισμός - Έστω $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ για κάποια συνάρτηση $f(t)$. Ορίζουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace ως εξής

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} \overset{\text{ορισμός}}{=} f(t).$$

Παράδειγμα - $F(s) = \frac{1}{s+1}$

Αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace

Ορισμός - Έστω $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ για κάποια συνάρτηση $f(t)$. Ορίζουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace ως εξής

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} \overset{\text{ορισμός}}{=} f(t).$$

Παράδειγμα - $F(s) = \frac{1}{s+1}$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} = e^{-t}.$$

Αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace

Ορισμός - Έστω $F(s)=\mathcal{L}\{f(t)\}$ για κάποια συνάρτηση $f(t)$. Ορίζουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace ως εξής

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} \overset{\text{ορισμός}}{=} f(t).$$

Παράδειγμα - $F(s)=\frac{1}{s+1}$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\}=e^{-t}.$$

Παράδειγμα - $F(s)=\frac{s^2+s+1}{s^3+s}$

$$F(s)=\frac{s^2+s+1}{s^3+s}=\frac{1}{s}+\frac{1}{s^2+1}.$$

Αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace

Ορισμός - Έστω $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ για κάποια συνάρτηση $f(t)$. Ορίζουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace ως εξής

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} \overset{\text{ορισμός}}{=} f(t).$$

Παράδειγμα - $F(s) = \frac{1}{s+1}$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} = e^{-t}.$$

Παράδειγμα - $F(s) = \frac{s^2+s+1}{s^3+s}$

$$F(s) = \frac{s^2+s+1}{s^3+s} = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2+1}.$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^2+s+1}{s^3+s}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\} = 1 + \sin t.$$

Μετασχηματισμοί παραγώγων

$$\mathcal{L}\left\{g'(t)\right\} = \int_0^{\infty} e^{-st} g'(t)\ dt = \left[e^{-st} g(t)\right]_{t=0}^{\infty} - \int_0^{\infty} (-s)\, e^{-st} g(t)\ dt$$
$$= -g(0) + s\mathcal{L}\{g(t)\}.$$

Μετασχηματισμοί παραγώγων

$$\mathcal{L}\left\{g'(t)\right\} = \int_0^\infty e^{-st} g'(t)\ dt = \left[e^{-st} g(t)\right]_{t=0}^\infty - \int_0^\infty (-s)\, e^{-st} g(t)\ dt$$
$$= -g(0) + s\mathcal{L}\{g(t)\}.$$

$f(t)$	$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$
$g'(t)$	$sG(s) - g(0)$
$g''(t)$	$s^2G(s) - sg(0) - g'(0)$
$g'''(t)$	$s^3G(s) - s^2g(0) - sg'(0) - g''(0)$

Επίλυση ΣΔΕ με μετασχηματισμούς Laplace

$$x''(t) + x(t) = \cos 2t, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 1\,.$$

Επίλυση ΣΔΕ με μετασχηματισμούς Laplace

$$x''(t) + x(t) = \cos 2t, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 1\,.$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{x''(t) + x(t)\} &= \mathcal{L}\{\cos 2t\}, \\ s^2 X(s) - s x(0) - x'(0) + X(s) &= \frac{s}{s^2+4}. \end{aligned}$$

Επίλυση ΣΔΕ με μετασχηματισμούς Laplace

$$x''(t) + x(t) = \cos 2t, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 1\,.$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{x''(t) + x(t)\} &= \mathcal{L}\{\cos 2t\}, \\ s^2 X(s) - sx(0) - x'(0) + X(s) &= \frac{s}{s^2+4}. \end{aligned}$$

$$s^2 X(s) - 1 + X(s) = \frac{s}{s^2+4}.$$

Επίλυση ΣΔΕ με μετασχηματισμούς Laplace

$$x''(t) + x(t) = \cos 2t, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 1\,.$$

$$\mathcal{L}\{x''(t) + x(t)\} = \mathcal{L}\{\cos 2t\},$$

$$s^2 X(s) - sx(0) - x'(0) + X(s) = \frac{s}{s^2+4}.$$

$$s^2 X(s) - 1 + X(s) = \frac{s}{s^2+4}.$$

$$X(s) = \frac{s}{(s^2+1)(s^2+4)} + \frac{1}{s^2+1}.$$

Επίλυση ΣΔΕ με μετασχηματισμούς Laplace

$$x''(t) + x(t) = \cos 2t, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 1\,.$$

$$\mathcal{L}\{x''(t) + x(t)\} = \mathcal{L}\{\cos 2t\},$$

$$s^2 X(s) - sx(0) - x'(0) + X(s) = \frac{s}{s^2+4}.$$

$$s^2 X(s) - 1 + X(s) = \frac{s}{s^2+4}.$$

$$X(s) = \frac{s}{(s^2+1)(s^2+4)} + \frac{1}{s^2+1}.$$

$$X(s) = \frac{1}{3}\frac{s}{s^2+1} - \frac{1}{3}\frac{s}{s^2+4} + \frac{1}{s^2+1}.$$

Επίλυση ΣΔΕ με μετασχηματισμούς Laplace

$$x''(t) + x(t) = \cos 2t, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 1 .$$

$$\mathcal{L}\{x''(t) + x(t)\} = \mathcal{L}\{\cos 2t\},$$

$$s^2 X(s) - sx(0) - x'(0) + X(s) = \frac{s}{s^2+4}.$$

$$s^2 X(s) - 1 + X(s) = \frac{s}{s^2+4}.$$

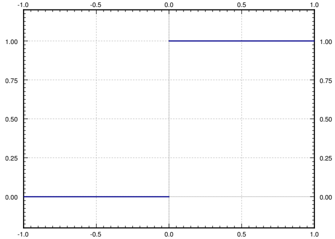
$$X(s) = \frac{s}{(s^2+1)(s^2+4)} + \frac{1}{s^2+1}.$$

$$X(s) = \frac{1}{3}\,\frac{s}{s^2+1} - \frac{1}{3}\,\frac{s}{s^2+4} + \frac{1}{s^2+1}.$$

$$x(t) = \frac{1}{3}\cos t - \frac{1}{3}\cos 2t + \sin t .$$

Η συνάρτηση *Heaviside*

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{αν } t < 0, \\ 1 & \text{αν } t \geq 1\,. \end{cases}$$



Παραδείγματα χρήσης

1. $f(t)$ είναι ένα 'σήμα' και ότι έχουμε αρχίσει να λαμβάνουμε το σήμα $\sin t$ την χρονική στιγμή t

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{αν } t < \pi, \\ \sin t & \text{αν } t \geq \pi. \end{cases}$$

τότε

Παραδείγματα χρήσης

1. $f(t)$ είναι ένα 'σήμα' και ότι έχουμε αρχίσει να λαμβάνουμε το σήμα $\sin t$ την χρονική στιγμή t

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \alpha\nu \;\; t < \pi, \\ \sin t & \alpha\nu \;\; t \geq \pi. \end{cases}$$

τότε

$$f(t) = u(t - \pi) \sin t.$$

Παραδείγματα χρήσης

1. $f(t)$ είναι ένα 'σήμα' και ότι έχουμε αρχίσει να λαμβάνουμε το σήμα $\sin t$ την χρονική στιγμή t

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{αν } t < \pi, \\ \sin t & \text{αν } t \geq \pi. \end{cases}$$

τότε

$$f(t) = u(t - \pi) \sin t.$$

2. $f(t)$ είναι 1 στο διάστημα $[1, 2)$ και μηδέν αλλού

Παραδείγματα χρήσης

1. $f(t)$ είναι ένα 'σήμα' και ότι έχουμε αρχίσει να λαμβάνουμε το σήμα $\sin t$ την χρονική στιγμή t

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{αν } t < \pi, \\ \sin t & \text{αν } t \geq \pi. \end{cases}$$

τότε

$$f(t) = u(t - \pi)\sin t.$$

2. $f(t)$ είναι 1 στο διάστημα $[1, 2)$ και μηδέν αλλού

$$f(t) = u(t - 1) - u(t - 2).$$

Παραδείγματα χρήσης

1. $f(t)$ είναι ένα 'σήμα' και ότι έχουμε αρχίσει να λαμβάνουμε το σήμα $\sin t$ την χρονική στιγμή t

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{αν } t < \pi, \\ \sin t & \text{αν } t \geq \pi. \end{cases}$$

   τότε

$$f(t) = u(t - \pi) \sin t.$$

2. $f(t)$ είναι 1 στο διάστημα $[1, 2)$ και μηδέν αλλού

$$f(t) = u(t - 1) - u(t - 2).$$

3. $f(t)$ ίση με t όταν το $t \in [0, 1]$, ίση με $-t + 2$ όταν $t \in [1, 2]$ και μηδέν αλλού

Παραδείγματα χρήσης

1. $f(t)$ είναι ένα 'σήμα' και ότι έχουμε αρχίσει να λαμβάνουμε το σήμα $\sin t$ την χρονική στιγμή t

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{αν } t < \pi, \\ \sin t & \text{αν } t \geq \pi. \end{cases}$$

τότε

$$f(t) = u(t - \pi)\sin t.$$

2. $f(t)$ είναι 1 στο διάστημα $[1, 2)$ και μηδέν αλλού

$$f(t) = u(t-1) - u(t-2).$$

3. $f(t)$ ίση με t όταν το $t \in [0, 1]$, ίση με $-t + 2$ όταν $t \in [1, 2]$ και μηδέν αλλού

$$f(t) = t\big(u(t) - u(t-1)\big) + (-t+2)\big(u(t-1) - u(t-2)\big).$$

Παραδείγματα χρήσης

1. $f(t)$ είναι ένα 'σήμα' και ότι έχουμε αρχίσει να λαμβάνουμε το σήμα $\sin t$ την χρονική στιγμή t

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{αν } t < \pi, \\ \sin t & \text{αν } t \geq \pi. \end{cases}$$

   τότε

$$f(t) = u(t-\pi)\sin t.$$

2. $f(t)$ είναι 1 στο διάστημα $[1,2)$ και μηδέν αλλού

$$f(t) = u(t-1) - u(t-2).$$

3. $f(t)$ ίση με t όταν το $t \in [0,1]$, ίση με $-t+2$ όταν $t \in [1,2]$ και μηδέν αλλού

$$f(t) = t\big(u(t) - u(t-1)\big) + (-t+2)\big(u(t-1) - u(t-2)\big).$$

Ιδιότητες μετατώπισης

1.
$$\mathcal{L}\{u(t-\alpha)\} = \frac{e^{-\alpha s}}{s}.$$

2.
$$\boxed{\mathcal{L}\{f(t-\alpha)u(t-\alpha)\} = e^{-\alpha s}\mathcal{L}\{f(t)\}.}$$

Παράδειγμα ΣΔΕ

$$x''(t) + x(t) = u(t-1) - u(t-3), \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 0,$$

Παράδειγμα ΣΔΕ

$$x''(t) + x(t) = u(t-1) - u(t-3), \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 0,$$

$$s^2 X(s) + X(s) = \frac{e^{-s}}{s} - \frac{e^{-3s}}{s} \Rightarrow X(s) = \frac{e^{-s}}{s(s^2+1)} - \frac{e^{-3s}}{s(s^2+1)}.$$

Παράδειγμα ΣΔΕ

$$x''(t) + x(t) = u(t-1) - u(t-3), \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 0,$$

$$s^2 X(s) + X(s) = \frac{e^{-s}}{s} - \frac{e^{-3s}}{s} \Rightarrow X(s) = \frac{e^{-s}}{s(s^2+1)} - \frac{e^{-3s}}{s(s^2+1)}.$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2+1)}\right\} = 1 - \cos t \Rightarrow (?)\mathcal{L}\{1 - \cos t\} = \frac{1}{s(s^2+1)}$$

Παράδειγμα ΣΔΕ

$$x''(t) + x(t) = u(t-1) - u(t-3), \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 0,$$

$$s^2 X(s) + X(s) = \frac{e^{-s}}{s} - \frac{e^{-3s}}{s} \Rightarrow X(s) = \frac{e^{-s}}{s(s^2+1)} - \frac{e^{-3s}}{s(s^2+1)}.$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2+1)}\right\} = 1 - \cos t \Rightarrow (?)\mathcal{L}\{1-\cos t\} = \frac{1}{s(s^2+1)}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-s}}{s(s^2+1)}\right\} = e^{-s}\mathcal{L}\{1-\cos t\} = \big(1-\cos(t-1)\big)\,u(t-1).$$

Παράδειγμα ΣΔΕ

$$x''(t) + x(t) = u(t-1) - u(t-3), \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 0,$$

$$s^2 X(s) + X(s) = \frac{e^{-s}}{s} - \frac{e^{-3s}}{s} \Rightarrow X(s) = \frac{e^{-s}}{s(s^2+1)} - \frac{e^{-3s}}{s(s^2+1)}.$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2+1)}\right\} = 1 - \cos t \Rightarrow (?)\mathcal{L}\{1-\cos t\} = \frac{1}{s(s^2+1)}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-s}}{s(s^2+1)}\right\} = e^{-s}\mathcal{L}\{1-\cos t\} = \big(1 - \cos(t-1)\big)\,u(t-1).$$

$$x(t) = \big(1 - \cos(t-1)\big)\,u(t-1) - \big(1 - \cos(t-3)\big)\,u(t-3)$$

Γραφική παράσταση της λύσης