Διαφορικές Εξισώσεις

Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις

Μανόλης Βάβαλης

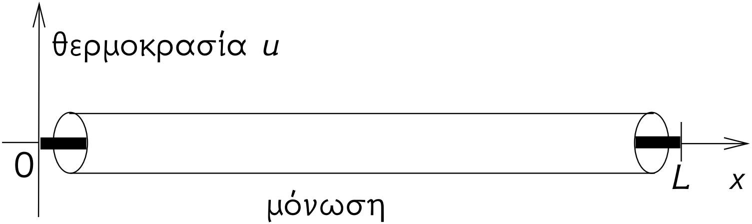
Τμήμα Μηχανικών Η/Υ Τηλεπικοινωνιών και Δικτύων
Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

24 Απριλίου 2013, Βόλος

Περιεχόμενα

Θερμότητα μονωμένου καλωδίου

- x η θέση πάνω στην ράβδο
- t ο χρόνος
- $u(x,t)$ θερμοκρασία καλωδίου στο σημείο x την χρονική στιγμή t



Θερμότητα μονωμένου καλωδίου (συνέχεια)

Η θερμοκρασία ρέει από το θερμό στο ψυχρό.

Θερμότητα μονωμένου καλωδίου (συνέχεια)

Η θερμοκρασία ρέει από το θερμό στο ψυχρό.

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},}$$

Θερμότητα μονωμένου καλωδίου (συνέχεια)

Η θερμοκρασία ρέει από το θερμό στο ψυχρό.

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},}$$

Συνοριακές Συνθήκες

Θερμότητα μονωμένου καλωδίου (συνέχεια)

Η θερμοκρασία ρέει από το θερμό στο ψυχρό.

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},}$$

Συνοριακές Συνθήκες

$$u(0,t) = 0 \qquad \text{και} \qquad u(L,t) = 0.$$

Θερμότητα μονωμένου καλωδίου (συνέχεια)

Η θερμοκρασία ρέει από το θερμό στο ψυχρό.

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},}$$

Συνοριακές Συνθήκες

$$u(0,t) = 0 \qquad \text{και} \qquad u(L,t) = 0.$$

ή

Θερμότητα μονωμένου καλωδίου (συνέχεια)

Η θερμοκρασία ρέει από το θερμό στο ψυχρό.

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},}$$

Συνοριακές Συνθήκες

$$u(0,t) = 0 \qquad \text{και} \qquad u(L,t) = 0.$$

ή

$$u_x(0,t) = 0 \qquad \text{και} \qquad u_x(L,t) = 0.$$

Θερμότητα μονωμένου καλωδίου (συνέχεια)

Η θερμοκρασία ρέει από το θερμό στο ψυχρό.

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},}$$

Συνοριακές Συνθήκες

$$u(0,t) = 0 \qquad \text{και} \qquad u(L,t) = 0.$$

ή

$$u_x(0,t) = 0 \qquad \text{και} \qquad u_x(L,t) = 0.$$

Αρχική Συνθήκη

Θερμότητα μονωμένου καλωδίου (συνέχεια)

Η θερμοκρασία ρέει από το θερμό στο ψυχρό.

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},}$$

Συνοριακές Συνθήκες

$$u(0,t) = 0 \qquad \text{και} \qquad u(L,t) = 0.$$

ή

$$u_x(0,t) = 0 \qquad \text{και} \qquad u_x(L,t) = 0.$$

Αρχική Συνθήκη

$$u(x,0) = f(x)$$

Χωρισμός Μεταβλητών

$$u_t = ku_{xx} \qquad \text{με} \quad u(0,t) = 0, \;\; u(L,t) = 0 \quad \text{και} \quad u(x,0) = f(x).$$

Χωρισμός Μεταβλητών

$u_t = ku_{xx}$ με $u(0,t)=0$, $u(L,t)=0$ και $u(x,0)=f(x)$.

Ας υποθέσουμε ότι $u(x,t) = X(x)T(t)$. Τότε

$$X(x)T'(t) = kX''(x)T(t) \quad \Rightarrow \quad \frac{T'(t)}{kT(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}$$

Χωρισμός Μεταβλητών

$u_t = k u_{xx} \qquad$ με $\quad u(0,t) = 0, \quad u(L,t) = 0 \quad$ και $\quad u(x,0) = f(x).$

Ας υποθέσουμε ότι $u(x,t) = X(x)T(t)$. Τότε

$$X(x)T'(t) = kX''(x)T(t) \quad \Rightarrow \quad \frac{T'(t)}{kT(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda.$$

Χωρισμός Μεταβλητών

$u_t = k u_{xx}$ με $u(0,t) = 0$, $u(L,t) = 0$ και $u(x,0) = f(x)$.

Ας υποθέσουμε ότι $u(x,t) = X(x)T(t)$. Τότε

$$X(x)T'(t) = kX''(x)T(t) \quad \Rightarrow \quad \frac{T'(t)}{kT(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda.$$

Δηλαδή

Χωρισμός Μεταβλητών

$$u_t = ku_{xx} \qquad \text{με} \quad u(0,t)=0, \quad u(L,t)=0 \quad \text{και} \quad u(x,0)=f(x).$$

Ας υποθέσουμε ότι $u(x,t) = X(x)T(t)$. Τότε

$$X(x)T'(t) = kX''(x)T(t) \quad \Rightarrow \quad \frac{T'(t)}{kT(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda.$$

Δηλαδή

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0,$$
$$T'(t) + \lambda kT(t) = 0.$$

Θεμελιώδεις λύσεις

$$X'' + \lambda X = 0, \quad X(0) = 0, \;\; X(L) = 0.$$

Θεμελιώδεις λύσεις

$$X'' + \lambda X = 0, \quad X(0) = 0, \;\; X(L) = 0.$$

Ιδιοτιμές, ιδιοσυναρτήσεις

Θεμελιώδεις λύσεις

$$X'' + \lambda X = 0, \quad X(0) = 0, \; X(L) = 0.$$

Ιδιοτιμές, ιδιοσυναρτήσεις

$$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{L^2}, \quad X_n(x) = \sin\frac{n\pi}{L}x.$$

Θεμελιώδεις λύσεις

$$X'' + \lambda X = 0, \quad X(0) = 0, \; X(L) = 0.$$

Ιδιοτιμές, ιδιοσυναρτήσεις

$$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{L^2}, \quad X_n(x) = \sin \frac{n\pi}{L} x.$$

$$T_n'(t) + \frac{n^2\pi^2}{L^2} k T_n(t) = 0.$$

Θεμελιώδεις λύσεις

$$X'' + \lambda X = 0, \quad X(0) = 0, \ X(L) = 0.$$

Ιδιοτιμές, ιδιοσυναρτήσεις

$$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{L^2}, \quad X_n(x) = \sin\frac{n\pi}{L}x.$$

$$T_n'(t) + \frac{n^2\pi^2}{L^2}kT_n(t) = 0.$$

Με ολοκληρωτικούς παράγοντες (ή αλλιώς),

Θεμελιώδεις λύσεις

$$X'' + \lambda X = 0, \quad X(0) = 0, \;\; X(L) = 0.$$

Ιδιοτιμές, ιδιοσυναρτήσεις

$$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{L^2}, \quad X_n(x) = \sin\frac{n\pi}{L}x.$$

$$T_n'(t) + \frac{n^2\pi^2}{L^2}kT_n(t) = 0.$$

Με ολοκληρωτικούς παράγοντες (ή αλλιώς),

$$T_n(t) = e^{\frac{-n^2\pi^2}{L^2}kt}.$$

Θεμελιώδεις λύσεις

$$X'' + \lambda X = 0, \quad X(0) = 0, \;\; X(L) = 0.$$

Ιδιοτιμές, ιδιοσυναρτήσεις

$$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{L^2}, \quad X_n(x) = \sin\frac{n\pi}{L}x.$$

$$T_n'(t) + \frac{n^2\pi^2}{L^2}kT_n(t) = 0.$$

Με ολοκληρωτικούς παράγοντες (ή αλλιώς),

$$T_n(t) = e^{\frac{-n^2\pi^2}{L^2}kt}.$$

Θεμελιώδεις λύσεις της ΜΔΕ

Θεμελιώδεις λύσεις

$$X'' + \lambda X = 0, \quad X(0) = 0, \ X(L) = 0.$$

Ιδιοτιμές, ιδιοσυναρτήσεις

$$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{L^2}, \quad X_n(x) = \sin\frac{n\pi}{L}x.$$

$$T'_n(t) + \frac{n^2\pi^2}{L^2}kT_n(t) = 0.$$

Με ολοκληρωτικούς παράγοντες (ή αλλιώς),

$$T_n(t) = e^{\frac{-n^2\pi^2}{L^2}kt}.$$

Θεμελιώδεις λύσεις της ΜΔΕ

$$u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t) = \left(\sin\frac{n\pi}{L}x\right) e^{\frac{-n^2\pi^2}{L^2}kt}.$$

Λύση του προβλήματος ΜΔΕ

Θεμελιώδεις λύσεις της ΜΔΕ

$$u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t) = \left(\sin\frac{n\pi}{L}x\right) e^{\frac{-n^2\pi^2}{L^2}kt}.$$

Λύση του προβλήματος ΜΔΕ

Θεμελιώδεις λύσεις της ΜΔΕ

$$u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t) = \left(\sin \frac{n\pi}{L} x\right) e^{\frac{-n^2\pi^2}{L^2}kt}.$$

Ανάπτυγμα της περιττής περιοδικής επέκτασης

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{L} x.$$

Λύση του προβλήματος ΜΔΕ

Θεμελιώδεις λύσεις της ΜΔΕ

$$u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t) = \left(\sin\frac{n\pi}{L}x\right) e^{\frac{-n^2\pi^2}{L^2}kt}.$$

Ανάπτυγμα της περιττής περιοδικής επέκτασης

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi}{L}x.$$

Υπέρθεση για την λύση

Λύση του προβλήματος ΜΔΕ

Θεμελιώδεις λύσεις της ΜΔΕ

$$u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t) = \left(\sin\frac{n\pi}{L}x\right) e^{\frac{-n^2\pi^2}{L^2}kt}.$$

Ανάπτυγμα της περιττής περιοδικής επέκτασης

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi}{L}x.$$

Υπέρθεση για την λύση

$$\boxed{u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \left(\sin\frac{n\pi}{L}x\right) e^{\frac{-n^2\pi^2}{L^2}kt}.}$$

Παράδειγμα

Πρόβλημα Μονωμένο καλώδιο μήκους 1, τα άκρα βυθισμένα σε πάγο, $k = 0.003$, και $u(x, 0) = 50\,x\,(1 - x)$.

Παράδειγμα

Πρόβλημα Μονωμένο καλώδιο μήκους 1, τα άκρα βυθισμένα σε πάγο, $k = 0.003$, και $u(x,0) = 50\,x\,(1-x)$.

Μοντέλο

$$
\begin{aligned}
& u_t = 0.003\,u_{xx}, \\
& u(0,t) = u(1,t) = 0, \\
& u(x,0) = 50\,x\,(1-x) \qquad \text{για } 0 < x < 1 .
\end{aligned}
$$

Παράδειγμα

Πρόβλημα Μονωμένο καλώδιο μήκους 1, τα άκρα βυθισμένα σε πάγο, $k = 0.003$, και $u(x,0) = 50\,x\,(1-x)$.
Μοντέλο

$$
\begin{aligned}
u_t &= 0.003\,u_{xx},\\
u(0,t) &= u(1,t) = 0,\\
u(x,0) &= 50\,x\,(1-x) \qquad \text{για } 0 < x < 1\,.
\end{aligned}
$$

$$
b_n = 2\int_0^1 50\,x\,(1-x)\sin n\pi x\;dx = \begin{cases} 0 & \text{για } n \text{ άρτιο,}\\ \frac{400}{\pi^3 n^3} & \text{για } n \text{ περιττό.}\end{cases}
$$

Παράδειγμα

Πρόβλημα Μονωμένο καλώδιο μήκους 1, τα άκρα βυθισμένα σε πάγο, $k = 0.003$, και $u(x,0) = 50\,x\,(1-x)$.
Μοντέλο

$$\begin{aligned} &u_t = 0.003\,u_{xx}, \\ &u(0,t) = u(1,t) = 0, \\ &u(x,0) = 50\,x\,(1-x) \qquad \text{για } 0 < x < 1. \end{aligned}$$

$$b_n = 2\int_0^1 50\,x\,(1-x)\sin n\pi x\;dx = \begin{cases} 0 & \text{για } n \text{ άρτιο,} \\ \frac{400}{\pi^3 n^3} & \text{για } n \text{ περιττό.} \end{cases}$$

$$u(x,t) = \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ περιττό}}}^{\infty} \frac{400}{\pi^3 n^3} (\sin n\pi x)\; e^{-n^2\pi^2\,0.003\,t}.$$

Χρήση της λύσης

Πότε η μέγιστη θερμοκρασία θα μειωθεί στο μισό;

Χρήση της λύσης

Πότε η μέγιστη θερμοκρασία θα μειωθεί στο μισό;

$$u(0.5,t) = \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ περιττό}}}^{\infty} \frac{400}{\pi^3 n^3} (\sin n\pi\, 0.5)\, e^{-n^2\pi^2\, 0.003\, t} =$$

Χρήση της λύσης

Πότε η μέγιστη θερμοκρασία θα μειωθεί στο μισό;

$$u(0.5,t) = \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ περιττό}}}^{\infty} \frac{400}{\pi^3 n^3} (\sin n\pi\, 0.5)\, e^{-n^2\pi^2\, 0.003\, t} = {}^{12.5}\!/_{2} = 6.25$$

Χρήση της λύσης

Πότε η μέγιστη θερμοκρασία θα μειωθεί στο μισό;

$$u(0.5,t) = \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ περιττό}}}^{\infty} \frac{400}{\pi^3 n^3} (\sin n\pi\, 0.5)\, e^{-n^2\pi^2\, 0.003\, t} = {}^{12.5}\!/_{2} = 6.25$$

$$t = \frac{\ln \frac{6.25\,\pi^3}{400}}{-\pi^2 0.003} \approx 24.5.$$

Μονωμένα άκρα

$$u_t = ku_{xx}, \quad u_x(0,t) = 0, \quad u_x(L,t) = 0 \quad \text{και} \quad u(x,0) = f(x).$$

Μονωμένα άκρα

$$u_t = ku_{xx}, \quad u_x(0,t) = 0, \quad u_x(L,t) = 0 \quad \text{και} \quad u(x,0) = f(x).$$

$$\begin{aligned} X''(x) + \lambda X(x) &= 0, \\ T'(t) + \lambda k T(t) &= 0. \end{aligned}$$

$$u_x(0,t) = 0 \Rightarrow X'(0)T(t) = 0 \Rightarrow X'(0) = 0$$

Μονωμένα άκρα

$$u_t = ku_{xx}, \quad u_x(0,t) = 0, \quad u_x(L,t) = 0 \quad \text{και} \quad u(x,0) = f(x).$$

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0,$$
$$T'(t) + \lambda k T(t) = 0.$$

$$u_x(0,t) = 0 \Rightarrow X'(0)T(t) = 0 \Rightarrow X'(0) = 0$$

Πρόβλημα ιδιοτιμών $X'' + \lambda X = 0, \; X'(0) = 0, \; X'(L) = 0.$

$$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{L^2}, \quad x_n = \cos\frac{n\pi}{L} \quad x \quad n \geq 0.$$

Μονωμένα άκρα

$$u_t = ku_{xx}, \quad u_x(0,t) = 0, \quad u_x(L,t) = 0 \quad \text{και} \quad u(x,0) = f(x).$$

$$\begin{aligned} X''(x) + \lambda X(x) &= 0, \\ T'(t) + \lambda k T(t) &= 0. \end{aligned}$$

$$u_x(0,t) = 0 \Rightarrow X'(0)T(t) = 0 \Rightarrow X'(0) = 0$$

Πρόβλημα ιδιοτιμών $X'' + \lambda X = 0, \; X'(0) = 0, \; X'(L) = 0.$

$$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{L^2}, \quad x_n = \cos\frac{n\pi}{L} \quad x \quad n \geq 0.$$

$$X_n(x) = \cos\frac{n\pi}{L}x \qquad \text{και} \qquad X_0(x) = 1\,.$$

Λύση σε σειρά συνημίτονων

$$T_n'(t) + \frac{n^2\pi^2}{L^2} k T_n(t) = 0 \Rrightarrow T_n(t) = e^{\frac{-n^2\pi^2}{L^2}kt}.$$

Λύση σε σειρά συνημίτονων

$$T_n'(t) + \frac{n^2\pi^2}{L^2} k T_n(t) = 0 \Rrightarrow T_n(t) = e^{\frac{-n^2\pi^2}{L^2}kt}.$$

$$u_n(x,t) = X_n(x) T_n(t) = \left(\cos\frac{n\pi}{L}x\right) e^{\frac{-n^2\pi^2}{L^2}kt},$$

Ανάπτυγμα της άρτιας περιοδικής επέκτασης της $f(x)$

$$f(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos\frac{n\pi}{L} x.$$

Λύση σε σειρά συνημίτονων

$$T'_n(t) + \frac{n^2\pi^2}{L^2} k T_n(t) = 0 \Rrightarrow T_n(t) = e^{\frac{-n^2\pi^2}{L^2}kt}.$$

$$u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t) = \left(\cos\frac{n\pi}{L}x\right) e^{\frac{-n^2\pi^2}{L^2}kt},$$

Ανάπτυγμα της άρτιας περιοδικής επέκτασης της $f(x)$

$$f(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos\frac{n\pi}{L}x.$$

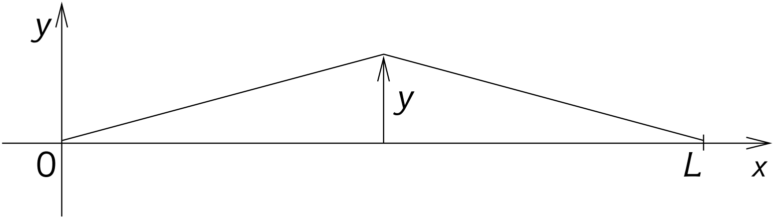
$$\boxed{u(x,t) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n u_n(x,t) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \left(\cos\frac{n\pi}{L}x\right) e^{\frac{-n^2\pi^2}{L^2}kt}.}$$

Χορδή και εξίσωση κύματος

Μια χορδή μήκους L. x θέση πάνω στην χορδή, y την μετατόπιση από την θέση ισορροπίας του σημείου x της χορδής την χρονική στιγμή t.

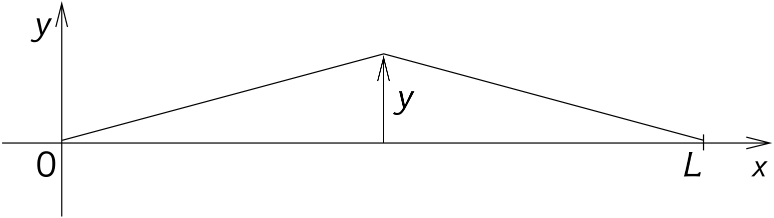
Χορδή και εξίσωση κύματος

Μια χορδή μήκους L. x θέση πάνω στην χορδή, y την μετατόπιση από την θέση ισορροπίας του σημείου x της χορδής την χρονική στιγμή t.



Χορδή και εξίσωση κύματος

Μια χορδή μήκους L. x θέση πάνω στην χορδή, y την μετατόπιση από την θέση ισορροπίας του σημείου x της χορδής την χρονική στιγμή t.



Εξίσωση Μοντέλο:

$$\boxed{y_{tt} = \alpha^2 y_{xx}, \quad \alpha > 0}$$

Πρόβλημα ΜΔΕ

$$
\begin{aligned}
&y_{tt} = \alpha^2 y_{xx}, \\
&y(0,t) = y(L,t) = 0, \\
&y(x,0) = f(x) && \gamma\iota\alpha \;\; 0 < x < L, \\
&y_t(x,0) = g(x) && \gamma\iota\alpha \;\; 0 < x < L.
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Δύο ομογενή προβλήματα ΜΔΕ

$$
\begin{aligned}
&w_{tt} = \alpha^2 w_{xx}, \\
&w(0,t) = w(L,t) = 0, \\
&w(x,0) = 0 && \text{για } 0 < x < L, \\
&w_t(x,0) = g(x) && \text{για } 0 < x < L.
\end{aligned} \tag{2}
$$

Δύο ομογενή προβλήματα ΜΔΕ

$$\begin{aligned} & w_{tt} = \alpha^2 w_{xx}, & & \\ & w(0,t) = w(L,t) = 0, & & \\ & w(x,0) = 0 & & \text{για } 0 < x < L, \\ & w_t(x,0) = g(x) & & \text{για } 0 < x < L. \end{aligned} \tag{2}$$

και

$$\begin{aligned} & z_{tt} = \alpha^2 z_{xx}, & & \\ & z(0,t) = z(L,t) = 0, & & \\ & z(x,0) = f(x) & & \text{για } 0 < x < L, \\ & z_t(x,0) = 0 & & \text{για } 0 < x < L. \end{aligned} \tag{3}$$

Δύο λύσεις

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n w_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{L}{n\pi\alpha} \left(\sin \frac{n\pi}{L} x\right) \left(\sin \frac{n\pi\alpha}{L} t\right).$$

Δύο λύσεις

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n w_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{L}{n\pi\alpha} \left(\sin \frac{n\pi}{L} x\right) \left(\sin \frac{n\pi\alpha}{L} t\right).$$

$$z(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n z_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \left(\sin \frac{n\pi}{L} x\right) \left(\cos \frac{n\pi\alpha}{L} t\right).$$

Η λύση

$$
\begin{aligned}
y(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{L}{n\pi\alpha} \left(\sin \frac{n\pi}{L} x\right) \left(\sin \frac{n\pi\alpha}{L} t\right) + c_n \left(\sin \frac{n\pi}{L} x\right) \left(\cos \frac{n\pi}{L}\right. \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sin \frac{n\pi}{L} x\right) \left[b_n \frac{L}{n\pi\alpha} \left(\sin \frac{n\pi\alpha}{L} t\right) + c_n \left(\cos \frac{n\pi\alpha}{L} t\right)\right].
\end{aligned}
$$

Θερμοκρασία κατάστασης ισορροπίας

1 χωρική διάσταση

$$u_t = k u_{xx} \to u_{xx} = 0$$

Θερμοκρασία κατάστασης ισορροπίας

1 χωρική διάσταση

$$u_t = ku_{xx} \to u_{xx} = 0$$

2 χωρικές διαστάσεις

$$u_t = k(u_{xx} + u_{yy}) \to u_{xx} + u_{yy} = 0, \tag{4}$$

Θερμοκρασία κατάστασης ισορροπίας

1 χωρική διάσταση

$$u_t = k u_{xx} \to u_{xx} = 0$$

2 χωρικές διαστάσεις

$$u_t = k(u_{xx} + u_{yy}) \to u_{xx} + u_{yy} = 0, \tag{4}$$

Γενική μορφή $u_t = k\Delta u$ ή $u_t = k\nabla^2 u$

Πρόβλημα Dirichlet

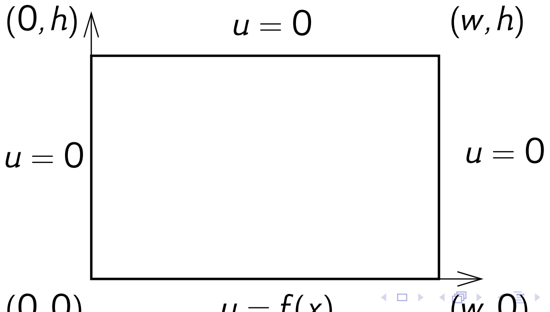
$$\Delta u = 0$$

$$u(0,y) = 0 \text{ για } 0 < y < h$$

$$u(x,h) = 0 \text{ για } 0 < x < w$$

$$u(w,y) = 0 \text{ για } 0 < y < h$$

$$u(x,0) = f(x) \text{ για } 0 < x < w$$



Λύση

$$\boxed{u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n u_n(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \left(\sin \frac{n\pi}{w} x\right) \left(\frac{\sinh \frac{n\pi(h-y)}{w}}{\sinh \frac{n\pi h}{w}}\right).}$$

Παράδειγμα $w = h = \pi$, $f(x) = \pi$

$$f(x) = \sum_{\substack{n=1 \\ n \ \text{οδδ}}}^{\infty} \frac{4}{n} \sin nx.$$

Παράδειγμα $w = h = \pi$, $f(x) = \pi$

$$f(x) = \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ οδδ}}}^{\infty} \frac{4}{n} \sin nx.$$

$$u(x,y) = \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ περιττό}}}^{\infty} \frac{4}{n} (\sin nx) \left(\frac{\sinh n(\pi - y)}{\sinh n\pi} \right).$$

Παράδειγμα $w = h = \pi$, $f(x) = \pi$