Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις Ανώτερης Τάξης

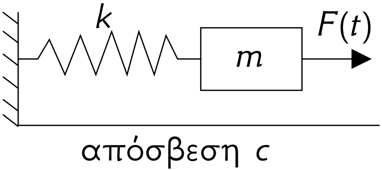
Ελεύθερες ταλαντώσεις
Μη-ομογενείς εξισώσεις
Εξαναγκασμένες ταλαντώσεις & συντονισμός

Μανόλης Βάβαλης

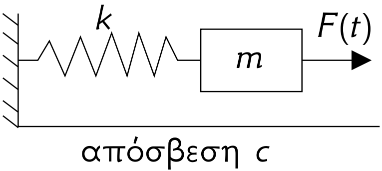
Τμήμα Μηχανικών Η/Υ Τηλεπικοινωνιών και Δικτύων
Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

15 Μαρτίου 2013, Βόλος

Ταλαντώσεις

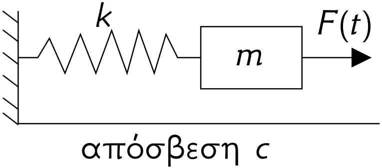


Ταλαντώσεις



Νόμος Χουκ, κανόνας απόσβεσης, 2ο νόμος Νεύτωνα

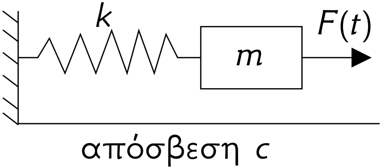
Ταλαντώσεις



Νόμος Χουκ, κανόνας απόσβεσης, 2ο νόμος Νεύτωνα

$$mx'' + cx' + kx = F(t)$$

Ταλαντώσεις



Νόμος Χουκ, κανόνας απόσβεσης, 2ο νόμος Νεύτωνα

$$mx'' + cx' + kx = F(t)$$

Ορισμοί

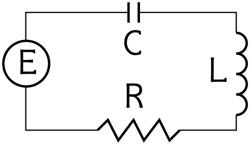
(i) $F \not\equiv 0$ *εξαναγκασμένη κίνηση*,

(ii) $F \equiv 0$ *μη-εξαναγκασμένη (ελεύθερη) κίνηση*,

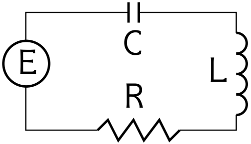
(iii) $c > 0$ *κίνηση με απόσβεση*,

(iv) $c = 0$ *κίνηση χωρίς απόσβεση*.

Κυκλώματα *RLC*

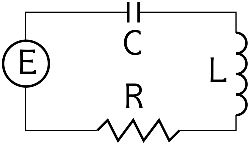


Κυκλώματα *RLC*



$$LI' + RI + {}^{Q}\!/_{C} = E.$$

Κυκλώματα *RLC*

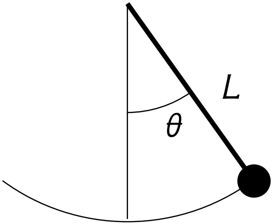


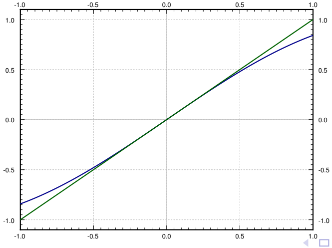
$$LI' + RI + Q/C = E.$$

$$LI''(t) + RI'(t) + \frac{1}{C}I(t) = E'(t).$$

Εκκρεμή

$$\theta'' + \frac{g}{L}\sin\theta = 0.$$





Απλή αρμονική κίνηση

$$mx'' + kx = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x'' + \omega_0^2 x = 0 \qquad \omega_0^2 = k/m.$$

$$x(t) = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t.$$

Απλή αρμονική κίνηση

$$mx'' + kx = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x'' + \omega_0^2 x = 0 \qquad \omega_0^2 = k/m.$$

$$x(t) = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t.$$

$$A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t = C\cos(\omega_0 t - \gamma).$$

όπου $C = \sqrt{A^2 + B^2}$ και $\tan\gamma = B/A$.

Απλή αρμονική κίνηση

$$mx'' + kx = 0 \;\Leftrightarrow\; x'' + \omega_0^2 x = 0 \qquad \omega_0^2 = {}^{k}\!/_{m}.$$

$$x(t) = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t.$$

$$A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t = C\cos(\omega_0 t - \gamma).$$

όπου $C = \sqrt{A^2 + B^2}$ και $\tan\gamma = {}^{B}\!/_{A}$.

$$x(t) = C\cos(\omega_0 t - \gamma)$$

Απλή αρμονική κίνηση

$$mx'' + kx = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x'' + \omega_0^2 x = 0 \qquad \omega_0^2 = k/m.$$

$$x(t) = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t.$$

$$A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t = C\cos(\omega_0 t - \gamma).$$

όπου $C = \sqrt{A^2 + B^2}$ και $\tan\gamma = B/A$.

$$x(t) = C\cos(\omega_0 t - \gamma)$$

C *πλάτος* της ταλάντωσης, ω_0 η (γωνιακή) συχνότητα, και γ *μετατόπιση φάσης*.

Το πρόβλημα

Έστω ότι $m = 2kg$ και $k = 8\frac{N}{m}$. Το σύστημα μάζας ελατηρίου βρίσκεται σε ένα όχημα το οποίο κινείται με ταχύτητα $1\frac{m}{s}$. Το όχημα συγκρούεται και σταματά. Το σωματίδιο το οποίο μέχρι τότε ήταν σε θέση 0.5 μέτρα μακριά από την θέση ισορροπίας (προς την κατεύθυνση της κίνησης) αφήνεται ελεύθερο και αρχίζει να ταλαντώνεται. Ποια είναι η συχνότητα και ποιο το πλάτος της εν λόγω ταλάντωσης;

Η μοντέλο του προβλήματος

$$2x'' + 8x = 0, \qquad x(0) = 0.5, \qquad x'(0) = 1\,.$$

Η μοντέλο του προβλήματος

$$2x'' + 8x = 0, \qquad x(0) = 0.5, \qquad x'(0) = 1.$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{4} = 2, \text{ συχνότητα } \frac{2}{2\pi} = \frac{1}{\pi} \approx 0.318 \; Hertz.$$

$$x(t) = A\cos 2t + B\sin 2t.$$

Η μοντέλο του προβλήματος

$$2x'' + 8x = 0, \qquad x(0) = 0.5, \qquad x'(0) = 1.$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{4} = 2, \text{ συχνότητα } \frac{2}{2\pi} = \frac{1}{\pi} \approx 0.318 \ \textit{Hertz}.$$

$$x(t) = A\cos 2t + B\sin 2t.$$

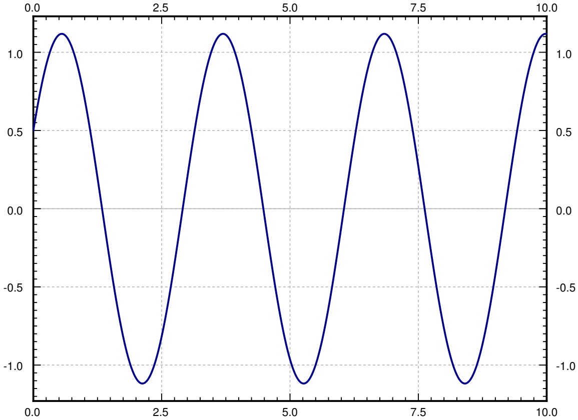
$x(0) = 0 \;\Rightarrow\; A = 0.5 \;\Rightarrow\; x'(t) = -0.5\sin 2t + B\cos 2t.$
$x'(0) = 1 \;\Rightarrow B = 1.$
πλάτος $C = \sqrt{A^2 + B^2} = \sqrt{1.25} \approx 1.118.$

Η λύση του προβλήματος

$$x(t) = 0.5\cos 2t + \sin 2t.$$

Η λύση του προβλήματος

$$x(t) = 0.5\cos 2t + \sin 2t.$$



Ελεύθερη κίνηση με απόσβεση

$$mx'' + cx' + kx = 0 \quad \Rightarrow \quad x'' + 2px' + \omega_0^2 x = 0,$$

όπου

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \qquad p = \frac{c}{2m}.$$

Ελεύθερη κίνηση με απόσβεση

$$mx'' + cx' + kx = 0 \quad \Rightarrow \quad x'' + 2px' + \omega_0^2 x = 0,$$

όπου

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \qquad p = \frac{c}{2m}.$$

$$r^2 + 2pr + \omega_0^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad r = -p \pm \sqrt{p^2 - \omega_0^2}.$$

Ελεύθερη κίνηση με απόσβεση

$$mx'' + cx' + kx = 0 \quad \Rightarrow \quad x'' + 2px' + \omega_0^2 x = 0,$$

όπου

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \qquad p = \frac{c}{2m}.$$

$$r^2 + 2pr + \omega_0^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad r = -p \pm \sqrt{p^2 - \omega_0^2}.$$

Πραγματικές ρίζες:

$$p^2 - \omega_0^2 = \left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m} = \frac{c^2 - 4km}{4m^2}.$$

Πραγματικές ρίζες ανν η $c^2 - 4km \geq 0$.
Μιγαδικές;

Ισχυρά φθίνουσα κίνηση

$$x(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t} \qquad r_{1,2} = -p \pm \sqrt{p^2 - \omega_0^2}.$$

Ισχυρά φθίνουσα κίνηση

$$x(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t} \qquad r_{1,2} = -p \pm \sqrt{p^2 - \omega_0^2}.$$

Παρατηρήσεις

- $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$

Ισχυρά φθίνουσα κίνηση

$$x(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t} \quad r_{1,2} = -p \pm \sqrt{p^2 - \omega_0^2}.$$

Παρατηρήσεις

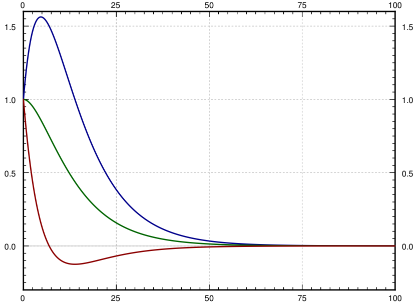
- $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$
- $0 = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t} \;\Rightarrow\; \frac{-C_1}{C_2} = e^{(r_2 - r_1)t}$.

Ισχυρά φθίνουσα κίνηση

$$x(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t} \qquad r_{1,2} = -p \pm \sqrt{p^2 - \omega_0^2}.$$

Παρατηρήσεις

- $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$
- $0 = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t} \;\Rightarrow\; \frac{-C_1}{C_2} = e^{(r_2 - r_1)t}$.



Σχήμα : Ισχυρά φθίνουσα κίνηση για διάφορες αρχικές τιμές.

Ασθενώς φθίνουσα κίνηση

$$c^2 - 4km < 0 \quad \Rightarrow \quad r = -p \pm \sqrt{-1}\sqrt{\omega_0^2 - p^2} = -p \pm i\omega_1 .$$

Ασθενώς φθίνουσα κίνηση

$$c^2 - 4km < 0 \quad \Rightarrow \quad r = -p \pm \sqrt{-1}\sqrt{\omega_0^2 - p^2} = -p \pm i\omega_1 .$$

$$x(t) = e^{-pt}\left(A\cos\omega_1 t + B\sin\omega_1 t\right) \; = \; Ce^{-pt}\cos(\omega_1 t - \gamma),$$

Ασθενώς φθίνουσα κίνηση

$$c^2 - 4km < 0 \quad \Rightarrow \quad r = -p \pm \sqrt{-1}\sqrt{\omega_0^2 - p^2} = -p \pm i\omega_1 .$$

$$x(t) = e^{-pt}\,(A\cos\omega_1 t + B\sin\omega_1 t) \;=\; Ce^{-pt}\cos(\omega_1 t - \gamma),$$

Παρατηρήσεις

- $\lim_{t\to\infty} x(t)$

Ασθενώς φθίνουσα κίνηση

$$c^2 - 4km < 0 \quad \Rightarrow \quad r = -p \pm \sqrt{-1}\sqrt{\omega_0^2 - p^2} = -p \pm i\omega_1 .$$

$$x(t) = e^{-pt}\left(A\cos\omega_1 t + B\sin\omega_1 t\right) \;=\; Ce^{-pt}\cos(\omega_1 t - \gamma),$$

Παρατηρήσεις

- $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$.

Ασθενώς φθίνουσα κίνηση

$$c^2 - 4km < 0 \quad \Rightarrow \quad r = -p \pm \sqrt{-1}\sqrt{\omega_0^2 - p^2} = -p \pm i\omega_1 .$$

$$x(t) = e^{-pt}\left(A\cos\omega_1 t + B\sin\omega_1 t\right) \;=\; Ce^{-pt}\cos(\omega_1 t - \gamma),$$

Παρατηρήσεις

- $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$.
- Περικλείουσες καμπύλες $\pm Ce^{-pt}$.

Ασθενώς φθίνουσα κίνηση

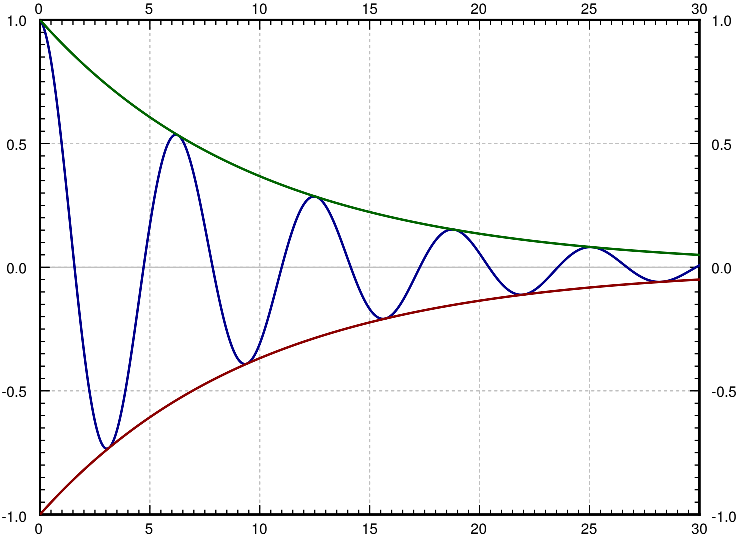
$$c^2 - 4km < 0 \quad \Rightarrow \quad r = -p \pm \sqrt{-1}\sqrt{\omega_0^2 - p^2} = -p \pm i\omega_1 .$$

$$x(t) = e^{-pt}\left(A\cos\omega_1 t + B\sin\omega_1 t\right) \;=\; Ce^{-pt}\cos(\omega_1 t - \gamma),$$

Παρατηρήσεις

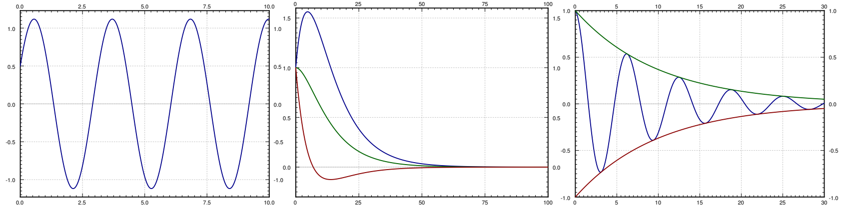
- $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$.
- Περικλείουσες καμπύλες $\pm Ce^{-pt}$.
- $c\uparrow \;\Rightarrow\; \omega_1\downarrow$.
- $c\downarrow \;\Rightarrow\; \omega_1 \;\to\; \omega_0,\; p\to 0$.

Ασθενώς φθίνουσα κίνηση



Σχήμα : Ασθενώς φθίνουσα κίνηση και περικλείουσες καμπύλες.

Συμπεράσματα



Γενική λύση μη-ομογενούς

$$y'' + 5y' + 6y = 2x + 1$$

Γενική λύση μη-ομογενούς

$$y'' + 5y' + 6y = 2x + 1 \quad \Leftrightarrow \quad Lx = 2x + 1$$

Γενική λύση μη-ομογενούς

$$y'' + 5y' + 6y = 2x + 1 \quad \Leftrightarrow \quad Lx = 2x + 1$$

Οποιεσδήποτε δύο λύσεις της μη-ομογενούς διαφέρουν μεταξύ τους κατά μια λύση της ομογενούς

Γενική λύση μη-ομογενούς

$$y'' + 5y' + 6y = 2x + 1 \quad \Leftrightarrow \quad Lx = 2x + 1$$

Οποιεσδήποτε δύο λύσεις της μη-ομογενούς διαφέρουν μεταξύ τους κατά μια λύση της ομογενούς

$$L(y_p - \tilde{y}_p) = Ly_p - L\tilde{y}_p = (2x + 1) - (2x + 1) = 0.$$

Γενική λύση μη-ομογενούς

$$y'' + 5y' + 6y = 2x + 1 \quad \Leftrightarrow \quad Lx = 2x + 1$$

Οποιεσδήποτε δύο λύσεις της μη-ομογενούς διαφέρουν μεταξύ τους κατά μια λύση της ομογενούς

$$L(y_p - \tilde{y}_p) = Ly_p - L\tilde{y}_p = (2x + 1) - (2x + 1) = 0.$$

$$y = y_c + y_p$$

- y η γενική λύση του μη-ομογενούς
- y_c η γενική λύση του ομογενούς
- y_p μια οποιαδήποτε λύση του μη-ομογενούς

Μέθοδος απροσδιόριστων συντελεστών

$$y'' + 5y' + 6y = 2x + 1\,.$$

Μέθοδος απροσδιόριστων συντελεστών

$$y'' + 5y' + 6y = 2x + 1\,.$$

Μαντεψιά $y = Ax + B$

Μέθοδος απροσδιόριστων συντελεστών

$$y'' + 5y' + 6y = 2x + 1\,.$$

Μαντεψιά $y = Ax + B$

$$y'' + 5y' + 6y = (Ax + B)'' + 5(Ax + B)' + 6(Ax + B).$$

Μέθοδος απροσδιόριστων συντελεστών

$$y'' + 5y' + 6y = 2x + 1\,.$$

Μαντεψιά $y = Ax + B$

$$y'' + 5y' + 6y = (Ax + B)'' + 5(Ax + B)' + 6(Ax + B).$$

$$6Ax + (5A + 6B) = 2x + 1 \quad \Rightarrow \quad A = {}^{1}\!/_{3}, \;\; B = {}^{-1}\!/_{9}$$

.

Μέθοδος απροσδιόριστων συντελεστών

$$y'' + 5y' + 6y = 2x + 1\,.$$

Μαντεψιά $y = Ax + B$

$$y'' + 5y' + 6y = (Ax+B)'' + 5(Ax+B)' + 6(Ax+B).$$

$$6Ax + (5A + 6B) = 2x + 1 \quad \Rightarrow \quad A = 1/3,\ \ B = -1/9$$

.

$$y_p = \frac{1}{3}x - \frac{1}{9} = \frac{3x-1}{9}$$

Μέθοδος απροσδιόριστων συντελεστών

$$y'' + 5y' + 6y = 2x + 1\,.$$

Μαντεψιά $y = Ax + B$

$$y'' + 5y' + 6y = (Ax + B)'' + 5(Ax + B)' + 6(Ax + B).$$

$$6Ax + (5A + 6B) = 2x + 1 \quad \Rightarrow \quad A = 1/3, \;\; B = -1/9$$

.

$$y_p = \frac{1}{3}x - \frac{1}{9} = \frac{3x - 1}{9}$$

$$y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-3x} + \frac{3x - 1}{9}.$$

Μέθοδος απροσδιόριστων συντελεστών

$$y'' + 5y' + 6y = 2x + 1\,.$$

Μαντεψιά $y = Ax + B$

$$y'' + 5y' + 6y = (Ax + B)'' + 5(Ax + B)' + 6(Ax + B).$$

$$6Ax + (5A + 6B) = 2x + 1 \quad \Rightarrow \quad A = 1/3,\;\; B = -1/9$$

.

$$y_p = \frac{1}{3}x - \frac{1}{9} = \frac{3x - 1}{9}$$

$$y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-3x} + \frac{3x - 1}{9}.$$

αν $y(0) = 0$ και $y'(0) = 1/3 \cdots$.

$$y(x) = \frac{3e^{-2x} - 2e^{-3x} + 3x - 1}{9}.$$

Μαντεψιές

$$y'' + 2y' + 2y = \cos 2x$$

Μαντεψιές

$$y'' + 2y' + 2y = \cos 2x \quad y = A\cos 2x + B\sin 2x.$$

Μαντεψιές

$$y'' + 2y' + 2y = \cos 2x \quad y = A\cos 2x + B\sin 2x.$$

$$Ly = e^{3x}$$

Μαντεψιές

$$y'' + 2y' + 2y = \cos 2x \quad y = A\cos 2x + B\sin 2x.$$

$$Ly = e^{3x} \quad y = Ae^{3x}$$

Μαντεψιές

$$y'' + 2y' + 2y = \cos 2x \quad y = A\cos 2x + B\sin 2x.$$

$$Ly = e^{3x} \quad y = Ae^{3x}$$

$$Ly = (1 + 3x^2)\, e^{-x} \cos \pi x$$

Μαντεψιές

$$y'' + 2y' + 2y = \cos 2x \quad y = A\cos 2x + B\sin 2x.$$

$$Ly = e^{3x} \quad y = Ae^{3x}$$

$$Ly = (1 + 3x^2)\, e^{-x} \cos \pi x$$

$$y = (A + Bx + Cx^2)\, e^{-x} \cos \pi x + (D + Ex + Fx^2)\, e^{-x} \sin \pi x$$

Προσοχή στον γορίλα

$$y'' - 9y = e^{3x} \quad y = Ae^{3x}.$$

Προσοχή στον γορίλα

$$y'' - 9y = e^{3x} \quad y = Ae^{3x}.$$

$$y'' - 9y = 9Ae^{3x} - 9Ae^{3x} = 0 \neq e^{3x}.$$

Προσοχή στον γορίλα

$$y'' - 9y = e^{3x} \quad y = Ae^{3x}.$$

$$y'' - 9y = 9Ae^{3x} - 9Ae^{3x} = 0 \neq e^{3x}.$$

Τι συνέβη;

$$y_c = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{3x}$$

Προσοχή στον γορίλα

$$y'' - 9y = e^{3x} \quad y = Ae^{3x}.$$

$$y'' - 9y = 9Ae^{3x} - 9Ae^{3x} = 0 \neq e^{3x}.$$

Τι συνέβη;

$$y_c = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{3x}$$

Λύση $y = Axe^{3x}$ $y' = Ae^{3x} + 3Axe^{3x}$ $y'' = 4Ae^{3x} + 9Axe^{3x}$.

$$y'' - 9y = 4Ae^{3x} + 9Axe^{3x} - 9Axe^{3x} = 4Ae^{3x}.$$

Προσοχή στον γορίλα

$$y'' - 9y = e^{3x} \quad y = Ae^{3x}.$$

$$y'' - 9y = 9Ae^{3x} - 9Ae^{3x} = 0 \neq e^{3x}.$$

Τι συνέβη;

$$y_c = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{3x}$$

Λύση $y = Axe^{3x}$ $y' = Ae^{3x} + 3Axe^{3x}$ $y'' = 4Ae^{3x} + 9Axe^{3x}$.

$$y'' - 9y = 4Ae^{3x} + 9Axe^{3x} - 9Axe^{3x} = 4Ae^{3x}.$$

$$y = y_c + y_p = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{3x} + \frac{1}{4} xe^{3x}.$$

Προσοχή στον γορίλα (συνέχεια)

$$y'' - 6y' + 9 = e^{3x}.$$

Προσοχή στον γορίλα (συνέχεια)

$$y'' - 6y' + 9 = e^{3x}.$$

$$y_c = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x}.$$

Προσοχή στον γορίλα (συνέχεια)

$$y'' - 6y' + 9 = e^{3x}.$$

$y_c = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x}.$
Μαντεψιά $y = Axe^{3x}$;

Άθροισμα όρων μη-ομογενούς μέρους

Αντιμετώπισε κάθε όρο ξεχωριστά

$$Ly = e^{2x} + \cos x.$$

Άθροισμα όρων μη-ομογενούς μέρους

Αντιμετώπισε κάθε όρο ξεχωριστά

$$Ly = e^{2x} + \cos x.$$

- u η λύση της εξίσωσης $Lu = e^{2x}$
- v η λύση της εξίσωσης $Lv = \cos x$

Άθροισμα όρων μη-ομογενούς μέρους

Αντιμετώπισε κάθε όρο ξεχωριστά

$$Ly = e^{2x} + \cos x.$$

- u η λύση της εξίσωσης $Lu = e^{2x}$
- v η λύση της εξίσωσης $Lv = \cos x$

$$y = u + v \;\Rightarrow\; Ly = L(u+v) = Lu + Lv = e^{2x} + \cos x.$$

$$y'' + y = \tan x$$

Μέθοδος διακύμανσης των παραμέτρων

$$Ly = y'' + y = \tan x.$$

Μέθοδος διακύμανσης των παραμέτρων

$$Ly = y'' + y = \tan x.$$

$y_c = C_1 y_1 + C_2 y_2$ όπου $y_1 = \cos x$ και $y_2 = \sin x$.

Μέθοδος διακύμανσης των παραμέτρων

$$Ly = y'' + y = \tan x.$$

$y_c = C_1 y_1 + C_2 y_2$ όπου $y_1 = \cos x$ και $y_2 = \sin x$.

$$y_p = y = u_1 y_1 + u_2 y_2,$$

Μέθοδος διακύμανσης των παραμέτρων

$$Ly = y'' + y = \tan x.$$

$y_c = C_1 y_1 + C_2 y_2$ όπου $y_1 = \cos x$ και $y_2 = \sin x$.

$$y_p = y = u_1 y_1 + u_2 y_2,$$

$$y' = (u_1' y_1 + u_2' y_2) + (u_1 y_1' + u_2 y_2').$$

Μέθοδος διακύμανσης των παραμέτρων

$$Ly = y'' + y = \tan x.$$

$y_c = C_1 y_1 + C_2 y_2$ όπου $y_1 = \cos x$ και $y_2 = \sin x$.

$$y_p = y = u_1 y_1 + u_2 y_2,$$

$$y' = (u_1' y_1 + u_2' y_2) + (u_1 y_1' + u_2 y_2').$$

Ζητάω $(u_1' y_1 + u_2' y_2) = 0.$

Μέθοδος διακύμανσης των παραμέτρων

$$Ly = y'' + y = \tan x.$$

$y_c = C_1 y_1 + C_2 y_2$ όπου $y_1 = \cos x$ και $y_2 = \sin x$.

$$y_p = y = u_1 y_1 + u_2 y_2,$$

$$y' = (u_1' y_1 + u_2' y_2) + (u_1 y_1' + u_2 y_2').$$

Ζητάω $(u_1' y_1 + u_2' y_2) = 0$.

$$y' = u_1 y_1' + u_2 y_2',$$
$$y'' = (u_1' y_1' + u_2' y_2') + (u_1 y_1'' + u_2 y_2'').$$

Μέθοδος διακύμανσης των παραμέτρων

$$Ly = y'' + y = \tan x.$$

$y_c = C_1 y_1 + C_2 y_2$ όπου $y_1 = \cos x$ και $y_2 = \sin x$.

$$y_p = y = u_1 y_1 + u_2 y_2,$$

$$y' = (u_1' y_1 + u_2' y_2) + (u_1 y_1' + u_2 y_2').$$

Ζητάω $(u_1' y_1 + u_2' y_2) = 0$.

$$y' = u_1 y_1' + u_2 y_2',$$
$$y'' = (u_1' y_1' + u_2' y_2') + (u_1 y_1'' + u_2 y_2'').$$

$$y'' = (u_1' y_1' + u_2' y_2') - (u_1 y_1 + u_2 y_2).$$

Σημειώστε ότι

$$y'' = (u_1' y_1' + u_2' y_2') - y,$$

Μέθοδος διακύμανσης των παραμέτρων (συν.)

Λύνουμε ώς πρός u_1 και u_2

$$\begin{aligned} u_1' \cos x + u_2' \sin x &= 0, \\ -u_1' \sin x + u_2' \cos x &= \tan x. \end{aligned}$$

Μέθοδος διακύμανσης των παραμέτρων (συν.)

Λύνουμε ώς πρός u_1 και u_2

$$\begin{aligned} u_1' \cos x + u_2' \sin x &= 0, \\ -u_1' \sin x + u_2' \cos x &= \tan x. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_1' \cos x \sin x + u_2' \sin^2 x &= 0, \\ -u_1' \sin x \cos x + u_2' \cos^2 x &= \tan x \cos x = \sin x. \end{aligned}$$

Μέθοδος διακύμανσης των παραμέτρων (συν.)

Λύνουμε ώς πρός u_1 και u_2

$$\begin{aligned} u_1' \cos x + u_2' \sin x &= 0, \\ -u_1' \sin x + u_2' \cos x &= \tan x. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_1' \cos x \sin x + u_2' \sin^2 x &= 0, \\ -u_1' \sin x \cos x + u_2' \cos^2 x &= \tan x \cos x = \sin x. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_2'(\sin^2 x + \cos^2 x) &= \sin x, \\ u_2' &= \sin x, \\ u_1' &= \frac{-\sin^2 x}{\cos x} = -\tan x \sin x. \end{aligned}$$

Μέθοδος διακύμανσης των παραμέτρων (συν.)

$$u_1 = \int u_1' \; dx = \int -\tan x \sin x \; dx = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{(\sin x) - 1}{(\sin x) + 1} \right| + \sin x,$$

$$u_2 = \int u_2' \; dx = \int \sin x \; dx = -\cos x.$$

Μέθοδος διακύμανσης των παραμέτρων (συν.)

$$u_1 = \int u_1' \ dx = \int -\tan x \sin x \ dx = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{(\sin x) - 1}{(\sin x) + 1} \right| + \sin x,$$

$$u_2 = \int u_2' \ dx = \int \sin x \ dx = -\cos x.$$

$$y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2 = \frac{1}{2} \cos x \ln \left| \frac{(\sin x) - 1}{(\sin x) + 1} \right| + \cos x \sin x - \cos x \sin x =$$

$$= \frac{1}{2} \cos x \ln \left| \frac{(\sin x) - 1}{(\sin x) + 1} \right| .$$

Μέθοδος διακύμανσης των παραμέτρων (συν.)

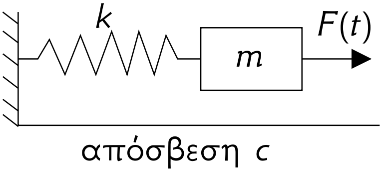
$$u_1 = \int u_1' \ dx = \int -\tan x \sin x \ dx = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{(\sin x) - 1}{(\sin x) + 1} \right| + \sin x,$$
$$u_2 = \int u_2' \ dx = \int \sin x \ dx = -\cos x.$$

$$y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2 = \frac{1}{2} \cos x \ln \left| \frac{(\sin x) - 1}{(\sin x) + 1} \right| + \cos x \sin x - \cos x \sin x =$$
$$= \frac{1}{2} \cos x \ln \left| \frac{(\sin x) - 1}{(\sin x) + 1} \right|.$$

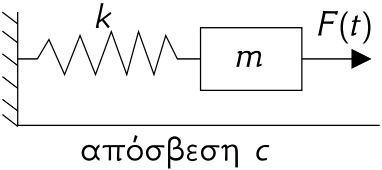
Γενική λύση της $y'' + y = \tan x$

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \frac{1}{2} \cos x \ln \left| \frac{(\sin x) - 1}{(\sin x) + 1} \right|.$$

Εξαναγκασμένες ταλαντώσεις

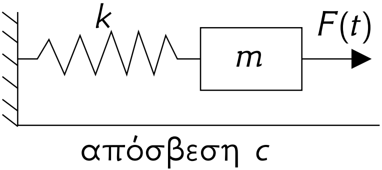


Εξαναγκασμένες ταλαντώσεις

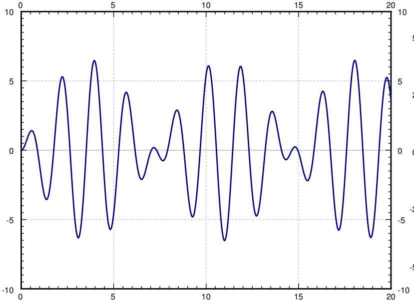


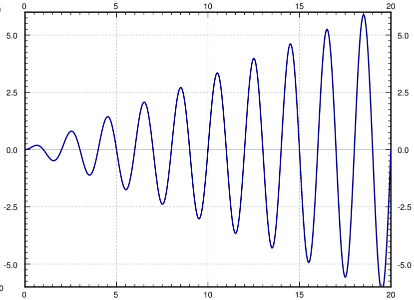
$$mx'' + cx' + kx = F(t)$$

Εξαναγκασμένες ταλαντώσεις



$$mx'' + cx' + kx = F(t)$$





Εξαναγκασμένη κίνηση χωρίς απόσβεση

$$mx'' + kx = F_0 \cos \omega t.$$

Εξαναγκασμένη κίνηση χωρίς απόσβεση

$$mx'' + kx = F_0 \cos \omega t.$$

$$x_c = C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t, \qquad \omega_0 = \sqrt{k/m}$$

Εξαναγκασμένη κίνηση χωρίς απόσβεση

$$mx'' + kx = F_0 \cos \omega t.$$

$$x_c = C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t, \qquad \omega_0 = \sqrt{k/m}$$

Αν $\omega_0 \neq \omega$, μαντεψιά $x_p = A \cos \omega t$.

$$x_p = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos \omega t.$$

Εξαναγκασμένη κίνηση χωρίς απόσβεση

$$mx'' + kx = F_0 \cos \omega t.$$

$$x_c = C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t, \qquad \omega_0 = \sqrt{k/m}$$

Αν $\omega_0 \neq \omega$, μαντεψιά $x_p = A \cos \omega t$.

$$x_p = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos \omega t.$$

$$\boxed{x = C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t + \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos \omega t.}$$

Εξαναγκασμένη κίνηση χωρίς απόσβεση

$$mx'' + kx = F_0 \cos \omega t.$$

$$x_c = C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t, \qquad \omega_0 = \sqrt{k/m}$$

Αν $\omega_0 \neq \omega$, μαντεψιά $x_p = A \cos \omega t$.

$$x_p = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos \omega t.$$

$$\boxed{x = C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t + \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos \omega t.}$$

$$x = C \cos(\omega_0 t - \gamma) + \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos \omega t.$$

Παράδειγμα

$$0.5x'' + 8x = 10\cos\pi t, \quad x(0) = 0, \; x'(0) = 0$$

Παράδειγμα

$$0.5x'' + 8x = 10\cos \pi t, \quad x(0) = 0, \ x'(0) = 0$$

$\omega = \pi, \ \omega_0 = \sqrt{8/0.5} = 4, \ F_0 = 10, \ m = 0.5.$

Παράδειγμα

$$0.5x'' + 8x = 10\cos \pi t, \quad x(0) = 0, \ x'(0) = 0$$

$\omega = \pi, \ \omega_0 = \sqrt{8/0.5} = 4, \ F_0 = 10, \ m = 0.5.$

$$x = C_1 \cos 4t + C_2 \sin 4t + \frac{20}{16 - \pi^2} \cos \pi t.$$

Παράδειγμα

$$0.5x'' + 8x = 10\cos \pi t, \quad x(0) = 0, \; x'(0) = 0$$

$\omega = \pi, \; \omega_0 = \sqrt{8/0.5} = 4, \; F_0 = 10, \; m = 0.5.$

$$x = C_1 \cos 4t + C_2 \sin 4t + \frac{20}{16 - \pi^2} \cos \pi t.$$

$$x = \frac{20}{16 - \pi^2}(\cos \pi t - \cos 4t).$$

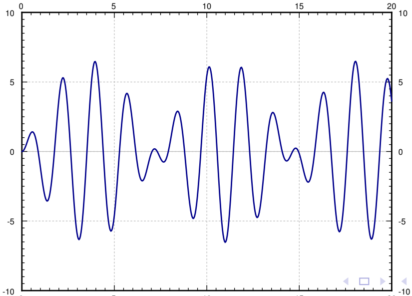
Παράδειγμα

$$0.5x'' + 8x = 10\cos\pi t, \quad x(0) = 0, \ x'(0) = 0$$

$$\omega = \pi, \ \omega_0 = \sqrt{8/0.5} = 4, \ F_0 = 10, \ m = 0.5.$$

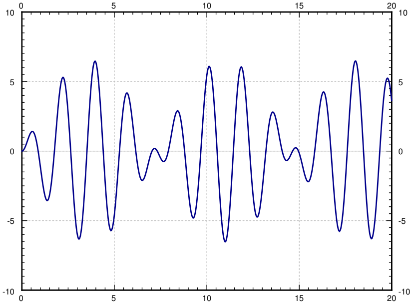
$$x = C_1 \cos 4t + C_2 \sin 4t + \frac{20}{16 - \pi^2}\cos\pi t.$$

$$x = \frac{20}{16 - \pi^2}(\cos\pi t - \cos 4t).$$



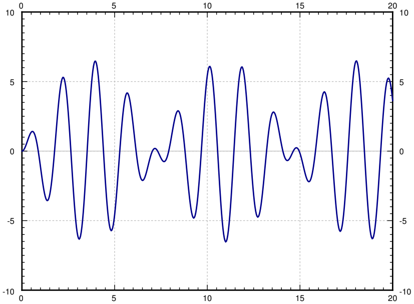
Σύστημα μάζας-ελατηρίου

$$x = \frac{20}{16-\pi^2}(\cos \pi t - \cos 4t).$$



Σύστημα μάζας-ελατηρίου

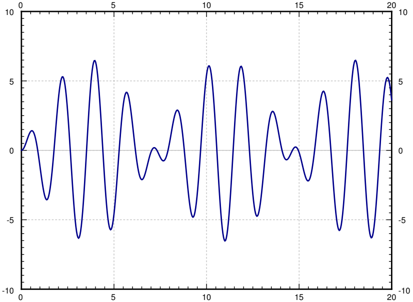
$$x = \frac{20}{16 - \pi^2}(\cos \pi t - \cos 4t).$$



$$2\, \sin\left(\frac{A - B}{2}\right)\, \sin\left(\frac{A + B}{2}\right) = \cos B - \cos A$$

Σύστημα μάζας-ελατηρίου

$$x = \frac{20}{16-\pi^2}(\cos \pi t - \cos 4t).$$



$$2\,\sin\left(\frac{A-B}{2}\right)\,\sin\left(\frac{A+B}{2}\right) = \cos B - \cos A$$

$$x = \frac{20}{16-\pi^2}\left(2\,\sin\left(\frac{4-\pi}{2}t\right)\,\sin\left(\frac{4+\pi}{2}t\right)\right).$$

$\omega_0 = \omega$ Συντονισμός

Μαντεψιά $x_p = At\cos\omega t + Bt\sin\omega t$

$$x'' + \omega^2 x = \frac{F_0}{m}\cos\omega t.$$

$\omega_0 = \omega$ Συντονισμός

Μαντεψιά $x_p = At\cos\omega t + Bt\sin\omega t$

$$x'' + \omega^2 x = \frac{F_0}{m}\cos\omega t.$$

$$2B\omega\cos\omega t - 2A\omega\sin\omega t = \frac{F_0}{m}\cos\omega t.$$

$\omega_0 = \omega$ Συντονισμός

Μαντεψιά $x_p = At\cos\omega t + Bt\sin\omega t$

$$x'' + \omega^2 x = \frac{F_0}{m}\cos\omega t.$$

$$2B\omega\cos\omega t - 2A\omega\sin\omega t = \frac{F_0}{m}\cos\omega t.$$

$$x = C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t + \frac{F_0}{2m\omega}t\sin\omega t.$$

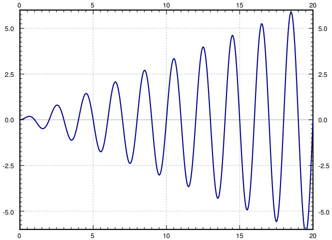
$\omega_0 = \omega$ Συντονισμός

Μαντεψιά $x_p = At\cos\omega t + Bt\sin\omega t$

$$x'' + \omega^2 x = \frac{F_0}{m}\cos\omega t.$$

$$2B\omega\cos\omega t - 2A\omega\sin\omega t = \frac{F_0}{m}\cos\omega t.$$

$$x = C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t + \frac{F_0}{2m\omega}t\sin\omega t.$$



Εξαναγκασμένη ταλάντωση με απόσβεση

$$mx'' + cx' + kx = F_0 \cos \omega t, \quad c > 0 \tag{1}$$

Εξαναγκασμένη ταλάντωση με απόσβεση

$$mx'' + cx' + kx = F_0 \cos \omega t, \quad c > 0 \tag{1}$$

$$x'' + 2px' + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \omega t.$$

Εξαναγκασμένη ταλάντωση με απόσβεση

$$mx'' + cx' + kx = F_0 \cos \omega t, \quad c > 0 \tag{1}$$

$$x'' + 2px' + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \omega t.$$

$$x_c = \begin{cases} C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t} & \text{όταν } c^2 > 4km, \\ C_1 e^{-pt} + C_2 t e^{-pt} & \text{όταν } c^2 = 4km, \\ e^{-pt}(C_1 \cos \omega_1 t + C_2 \sin \omega_1 t) & \text{όταν } c^2 < 4km \ , \end{cases}$$

όπου $r_1, r_2 = -p \pm \sqrt{p^2 - \omega_0^2}$, $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - p^2}$

Εξαναγκασμένη ταλάντωση με απόσβεση

$$mx'' + cx' + kx = F_0 \cos \omega t, \quad c > 0 \tag{1}$$

$$x'' + 2px' + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \omega t.$$

$$x_c = \begin{cases} C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t} & \text{όταν } c^2 > 4km, \\ C_1 e^{-pt} + C_2 t e^{-pt} & \text{όταν } c^2 = 4km, \\ e^{-pt}(C_1 \cos \omega_1 t + C_2 \sin \omega_1 t) & \text{όταν } c^2 < 4km \ , \end{cases}$$

όπου $r_1, r_2 = -p \pm \sqrt{p^2 - \omega_0^2}$, $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - p^2}$

Παρατήρηση $x_c(t) \to 0$ όταν $t \to \infty$

Λύση μη-ομογενούς

μαντεψιά $x_p = A\cos\omega t + B\sin\omega t$.

Λύση μη-ομογενούς

μαντεψιά $x_p = A\cos\omega t + B\sin\omega t$.

$$((\omega_0^2-\omega^2)B-2\omega pA)\sin\omega t+((\omega_0^2-\omega^2)A+2\omega pB)\cos\omega t = \frac{F_0}{m}\cos\omega t.$$

Λύση μη-ομογενούς

μαντεψιά $x_p = A\cos\omega t + B\sin\omega t$.

$$((\omega_0^2-\omega^2)B-2\omega pA)\sin\omega t+((\omega_0^2-\omega^2)A+2\omega pB)\cos\omega t = \frac{F_0}{m}\cos\omega t.$$

$$A = \frac{(\omega_0^2-\omega^2)F_0}{m(2\omega p)^2+m(\omega_0^2-\omega^2)^2}$$
$$B = \frac{2\omega pF_0}{m(2\omega p)^2+m(\omega_0^2-\omega^2)^2}.$$

Λύση μη-ομογενούς

μαντεψιά $x_p = A\cos\omega t + B\sin\omega t.$

$$((\omega_0^2-\omega^2)B-2\omega pA)\sin\omega t+((\omega_0^2-\omega^2)A+2\omega pB)\cos\omega t = \frac{F_0}{m}\cos\omega t.$$

$$A = \frac{(\omega_0^2-\omega^2)F_0}{m(2\omega p)^2 + m(\omega_0^2-\omega^2)^2}$$

$$B = \frac{2\omega p F_0}{m(2\omega p)^2 + m(\omega_0^2-\omega^2)^2}.$$

$$C = \frac{F_0}{m\sqrt{(2\omega p)^2 + (\omega_0^2-\omega^2)^2}}.$$

Λύση μη-ομογενούς

μαντεψιά $x_p = A\cos\omega t + B\sin\omega t$.

$$\left((\omega_0^2-\omega^2)B-2\omega pA\right)\sin\omega t+\left((\omega_0^2-\omega^2)A+2\omega pB\right)\cos\omega t = \frac{F_0}{m}\cos\omega t.$$

$$A = \frac{(\omega_0^2-\omega^2)F_0}{m(2\omega p)^2+m(\omega_0^2-\omega^2)^2}$$

$$B = \frac{2\omega pF_0}{m(2\omega p)^2+m(\omega_0^2-\omega^2)^2}.$$

$$C = \frac{F_0}{m\sqrt{(2\omega p)^2+(\omega_0^2-\omega^2)^2}}.$$

$$x_p = \frac{(\omega_0^2-\omega^2)F_0}{m(2\omega p)^2+m(\omega_0^2-\omega^2)^2}\cos\omega t+\frac{2\omega pF_0}{m(2\omega p)^2+m(\omega_0^2-\omega^2)^2}\sin\omega t$$

Λύση μη-ομογενούς

$$\tan\gamma = \frac{B}{A} = \frac{2\omega p}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

Λύση μη-ομογενούς

$$\tan\gamma = \frac{B}{A} = \frac{2\omega p}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

$$\boxed{x_p = \frac{F_0}{m\sqrt{(2\omega p)^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)^2}}\cos(\omega t - \gamma).}$$

Λύση μη-ομογενούς

$$\tan\gamma = \frac{B}{A} = \frac{2\omega p}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

$$\boxed{x_p = \frac{F_0}{m\sqrt{(2\omega p)^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)^2}}\cos(\omega t - \gamma).}$$

Όταν $\omega = \omega_0$, $A = 0$, $B = C = \frac{F_0}{2m\omega p}$ και $\gamma = \pi/2$.

Γενικευμένη Λύση

$$x = x_c + x_p.$$

Γενικευμένη Λύση

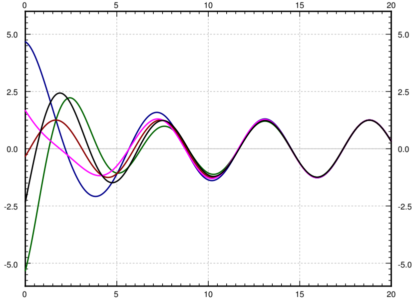
$$x = x_c + x_p.$$

x_c *μεταβατική λύση*, x_p *ευσταθή περιοδική λύση*

Γενικευμένη Λύση

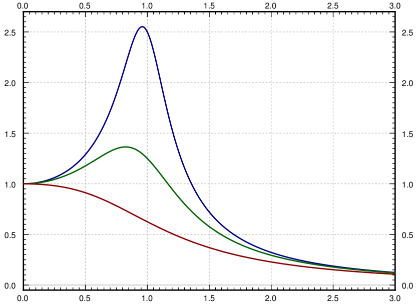
$$x = x_c + x_p.$$

x_c μεταβατική λύση, x_p ευσταθή περιοδική λύση



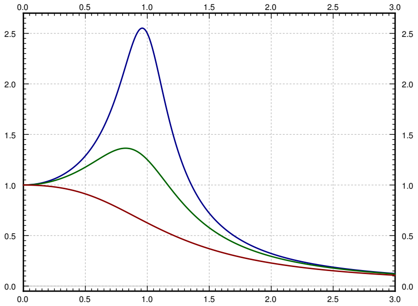
Σχήμα : Διαφορετικές αρχικές συνθήκες και $k = 1$, $m = 1$, $F_0 = 1$, $c = 0.7$, $\omega = 1.1$.

Συντονισμός



Σχήμα : $C(\omega)$ $k = 1$, $m = 1$, $F_0 = 1$. Η επάνω καμπύλη είναι για $c = 0.4$, η μεσαία για $c = 0.8$, και η κάτω για $c = 1.6$.

Συντονισμός



Σχήμα : $C(\omega)$ $k = 1$, $m = 1$, $F_0 = 1$. Η επάνω καμπύλη είναι για $c = 0.4$, η μεσαία για $c = 0.8$, και η κάτω για $c = 1.6$.

δεν υπάρχει όρος ο οποίος να τείνει στο άπειρο.

Μέγιστο Πλάτος Ταλάντωσης

$$\boxed{x_p = \frac{F_0}{m\sqrt{(2\omega p)^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)^2}} \cos(\omega t - \gamma).}$$

Μέγιστο Πλάτος Ταλάντωσης

$$\boxed{x_p = \frac{F_0}{m\sqrt{(2\omega p)^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)^2}} \cos(\omega t - \gamma).}$$

$$C'(\omega) = \frac{-4\omega(2p^2 + \omega^2 - \omega_0^2)F_0}{m\left((2\omega p)^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)^2\right)^{3/2}}.$$

Μέγιστο Πλάτος Ταλάντωσης

$$\boxed{x_p = \frac{F_0}{m\sqrt{(2\omega p)^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)^2}} \cos(\omega t - \gamma).}$$

$$C'(\omega) = \frac{-4\omega(2p^2 + \omega^2 - \omega_0^2)F_0}{m\left((2\omega p)^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)^2\right)^{3/2}}.$$

μηδενίζετε όταν $\omega = 0$ ή όταν $2p^2 + \omega^2 - \omega_0^2 = 0$ δηλαδή όταν.

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2p^2} \text{ ή } 0$$

Μέγιστο Πλάτος Ταλάντωσης

$$\boxed{x_p = \frac{F_0}{m\sqrt{(2\omega p)^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)^2}} \cos(\omega t - \gamma).}$$

$$C'(\omega) = \frac{-4\omega(2p^2 + \omega^2 - \omega_0^2)F_0}{m\left((2\omega p)^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)^2\right)^{3/2}}.$$

μηδενίζετε όταν $\omega = 0$ ή όταν $2p^2 + \omega^2 - \omega_0^2 = 0$ δηλαδή όταν.

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2p^2} \text{ ή } 0$$

Φυσικός συντονισμός

Μέγιστο Πλάτος Ταλάντωσης

$$\boxed{x_p = \frac{F_0}{m\sqrt{(2\omega p)^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)^2}} \cos(\omega t - \gamma).}$$

$$C'(\omega) = \frac{-4\omega(2p^2 + \omega^2 - \omega_0^2)F_0}{m\left((2\omega p)^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)^2\right)^{3/2}}.$$

μηδενίζετε όταν $\omega = 0$ ή όταν $2p^2 + \omega^2 - \omega_0^2 = 0$ δηλαδή όταν.

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2p^2} \text{ ή } 0$$

Φυσικός συντονισμός
Η βάση για τις σειρές *Fourier*.