HW2 SOLS. (26/01/18)

HY342

2017-18-ΧΕΙΜ ΤΗΜΜΥ - Π.Θ.

ΑΣΚ. 1ⓐ

$x[n] = \delta[n] - \delta[n-6] + \delta[n-12] - \delta[n-18] \Rightarrow DFT_{24}\{x[n]\} = ?$

$$X[k] = \sum_{n=0}^{23} x[n] W_{24}^{kn} = W_{24}^{0\cdot k} - W_{24}^{6\cdot k} + W_{24}^{12\cdot k} - W_{24}^{18\cdot k} = \frac{1-(-1)^4 W_{24}^{4\cdot 6k}}{1-(-1)W_{24}^{6k}} =$$

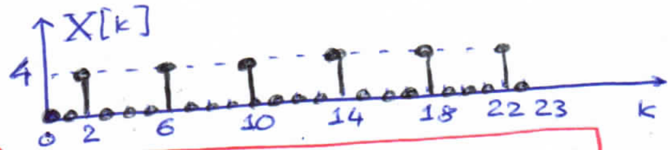
$$= \frac{1-W_{24}^{24k}}{1+W_{24}^{6k}} = \frac{1-e^{-j\frac{2\pi}{24}24k}}{1+e^{-j\frac{2\pi}{24}6k}} = \frac{1-e^{-j2\pi k}}{1+e^{-j\frac{\pi k}{2}}}, \quad (1) \quad \text{για } 0 \leq k \leq 23$$

- Ο αριθμητής της (1) είναι πάντα 0 (για όλα τα k), ενώ και ο παρονομαστής μηδενίζεται για τα k για τα οποία $e^{-j\frac{\pi k}{2}} = -1$, δηλαδή $\frac{k\pi}{2} = (2\lambda+1)\pi \Leftrightarrow \boxed{k = 4\lambda+2}$ (2)
- Για τα k που ικανοποιούν την (2) χρησιμοποιούμε τον κανόνα του de l'Hospital, και το αποτέλεσμα προκύπτει $\frac{d/dx(1-e^{-j2\pi x})}{d/dx(1+e^{-j\frac{\pi x}{2}})} = \frac{2\pi j e^{-j2\pi x}}{-j\frac{\pi}{2}e^{-j\frac{\pi x}{2}}} = \frac{-4\cdot 1}{-1} = \boxed{4}$ (3)

- Άρα, από (1),(2),(3):

$$\boxed{X[k] = \begin{cases} 4, & \text{για } k = 2,6,10,14,18,22 \\ 0, & \text{αλλού (εντός } 0 \leq k \leq 23) \end{cases}}$$

- Σχηματικά:



ΑΣΚ. 1ⓑ

$x[n] = \cos^2(\frac{\pi n}{4}) \cdot (u[n] - u[n-24]) \Rightarrow DFT_{24}\{x[n]\} = ?$

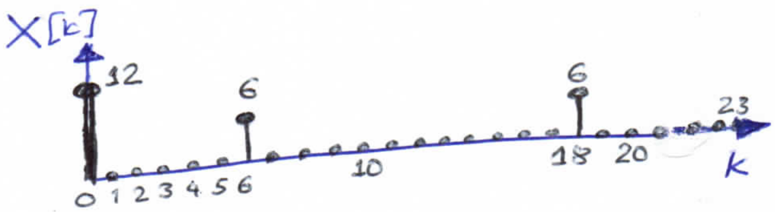
$$x[n] = \cos^2(\frac{\pi n}{4}) \cdot (\ ) = \frac{1+\cos(2\cdot\frac{\pi n}{4})}{2} \cdot (\ ) = \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(\frac{\pi n}{2})\right] \cdot (\ ) =$$

$$= \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\left(e^{+j\frac{2\pi}{24}\cdot 6n} + e^{-j\frac{2\pi}{24}\cdot 6n}\right)\right] \cdot (\ ) \Rightarrow$$ ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΙΔΙΟΤΗΤΑΣ ΔΥΙΚΟΤΗΤΑΣ

$$\Rightarrow X[k] = \frac{1}{2} 24\delta[k] + \frac{24}{4}\delta[k-6] + \frac{24}{4}\delta[\langle k+6 \rangle_{24}]$$

$$\Rightarrow \boxed{X[k] = 12\delta[k] + 6\delta[k-6] + 6\delta[k-18] \ ; \ 0 \leq k \leq 23}$$

- Σχηματικά:



ΑΣΚ. 1 (c)

$$x[n] = \begin{cases} 0, & n \text{ άρτια εντός } [0,23] \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}}, & n \text{ περιττά εντός } [0,23] \end{cases} \Rightarrow DFT_{24}\{x[n]\} = ?$$

- Η ακολουθία (σήμα) $x[n]$ είναι η: $(0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, \ldots, -1)$

- $$X[k] = \sum_{n=0}^{23} x[n] W_{24}^{kn} \underset{n'=\frac{n-1}{2}}{=} \sum_{n'=0}^{11} (-1)^{n'} W_{24}^{k(2n'+1)} = W_{24}^{k} \cdot \sum_{n'=0}^{11} (-1)^{n'} W_{24}^{2kn'} =$$

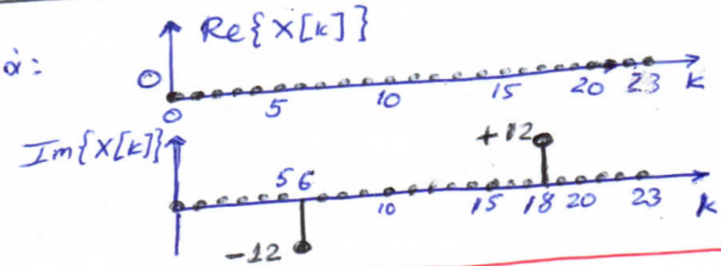
$$= W_{24}^{k} \cdot \sum_{n'=0}^{11} (-W_{24}^{2k})^{n'} = e^{-j\frac{2\pi}{24}k} \cdot \frac{1 - (-e^{-j\frac{2\pi}{24}2k})^{12}}{1 - (-e^{-j\frac{2\pi}{24}\cdot 2k})}$$

$$= e^{-j\frac{\pi k}{12}} \cdot \frac{1 - e^{-j2\pi k}}{1 + e^{-j\frac{\pi k}{6}}} \quad (1), \quad 0 \le k \le 23$$

- Ο αριθμητής της (1) είναι πάντα μηδέν, ενώ ο παρονομαστής της μηδενίζεται για $k=6$ & $k=18$ εντός των $0 \le k \le 23$. Για τις συγκεκριμένες αυτές τιμές, η τιμή του κλάσματος προκύπτει ίση με $+12$ (με βάση τον κανόνα του de l'Hospital). Επίσης για $k=6$, $e^{-j\frac{\pi k}{12}} = e^{-j\frac{\pi}{2}} = -j$, ενώ για $k=18$, $e^{-j\frac{\pi k}{12}} = e^{-j\frac{\pi 3}{2}} = +j$

- Οπότε: $\boxed{X[k] = -12j\,\delta[k-6] + 12j\,\delta[k-18] \;; 0 \le k \le 23}$

- Σχηματικά:



ΑΣΚ. 1 (d)

$$x[n] = \left[\left(\sin\frac{\pi n}{6} + \cos\frac{\pi n}{3}\right)(u[n]-u[n-24])\right] \circledast_{24} \left[\left(\sin\frac{\pi n}{3} + \cos\frac{\pi n}{6}\right)(u[n]-u[n-24])\right] \Rightarrow DFT_{24}\{x[n]\} = ?$$

Έχουμε:

$$x_1[n] = \left(\sin\frac{\pi n}{6}\right)(u[n]-u[n-24]) = \frac{1}{2j}\left(e^{j\frac{2\pi}{24}\cdot 2n} - e^{-j\frac{2\pi}{24}2n}\right)\cdot(\,) \Rightarrow X_1[k] = \frac{12}{j}\delta[k-2] - \frac{12}{j}\delta[k-22]$$

$$x_2[n] = \left(\cos\frac{\pi n}{3}\right)(u[n]-u[n-24]) = \frac{1}{2}\left(e^{j\frac{2\pi}{24}4n} + e^{-j\frac{2\pi}{24}4n}\right)\cdot(\,) \Rightarrow X_2[k] = 12\delta[k-4] + 12\delta[k-20]$$

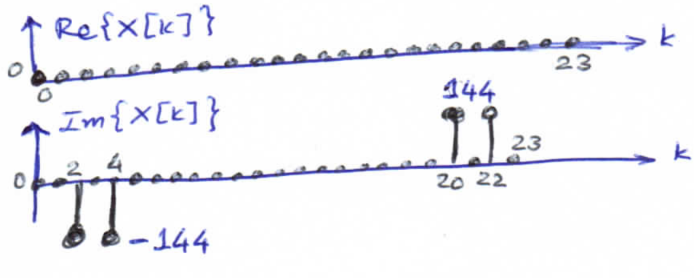
$$x_3[n] = \left(\sin\frac{\pi n}{3}\right)(u[n]-u[n-24]) = \frac{1}{2j}\left(e^{j\frac{2\pi}{24}4n} - e^{-j\frac{2\pi}{24}4n}\right)\cdot(\,) \Rightarrow X_3[k] = \frac{12}{j}\delta[k-4] - \frac{12}{j}\delta[k-20]$$

$$x_4[n] = \left(\cos\frac{\pi n}{6}\right)(u[n]-u[n-24]) = \frac{1}{2}\left(e^{j\frac{2\pi}{24}2n} - e^{-j\frac{2\pi}{24}2n}\right)(\,) \Rightarrow X_4[k] = 12\delta[k-2] + 12\delta[k-22]$$

Από εκφώνηση: $x[n] = (x_1[n] + x_2[n]) \circledast_{24} (x_3[n] + x_4[n]) \Rightarrow X[k] = (X_1[k] + X_2[k])\cdot(X_3[k] + X_4[k])$

$$\Rightarrow \boxed{X[k] = -144j\,\delta[k-2] - 144j\,\delta[k-4] + 144j\,\delta[k-20] + 144j\,\delta[k-22] \;; 0 \le k \le 23}$$

- Σχηματικά:



ΑΣΚ. 2(a)

$(\delta[n]-\delta[n-12]) \circledast_{24} \left((u[n]-u[n-24])\cdot\left(\cos\frac{\pi n}{3}+\sin\frac{\pi n}{12}\right)\right) = ?$

• Έστω $x[n]=\delta[n]-\delta[n-12]$ & $y[n]=\left(\cos\frac{\pi n}{3}+\sin\frac{\pi n}{3}\right)\cdot(u[n]-u[n-24])$

Τότε $z[n]=x[n] \circledast_{24} y[n] = IDFT_{24}\{DFT_{24}\{x[n]\}\cdot DFT_{24}\{y[n]\}\}$ **(1)**

• $DFT_{24}\{x[n]\} = 1-e^{-j\frac{2\pi}{24}12k} = 1-e^{-j\pi k} = 1-(-1)^k = \begin{cases}0, & k \text{ άρτιο}\\ 2, & k \text{ περιττό}\end{cases}$ **(2)**
εντός $[0,23]$

Έστω:

$y_1[n]=\cos\frac{\pi n}{3}\cdot(u[n]-u[n-24]) = \frac{1}{2}\left(e^{j\frac{2\pi}{24}4n}+e^{-j\frac{2\pi}{24}4n}\right)\cdot(u[n]-u[n-24]) \Rightarrow$

$\Rightarrow Y_1[k]=\frac{24}{2}\delta[k-4]+\frac{24}{2}\delta[\langle k+4\rangle_{24}] = 12\delta[k-4]+12\delta[k-20]$; $0\le k\le 23$ **(3)**

$y_2[n]=\sin\frac{\pi n}{12}\cdot(u[n]-u[n-24]) = \frac{1}{2j}\left(e^{j\frac{2\pi}{24}1n}-e^{-j\frac{2\pi}{24}1n}\right)\cdot(u[n]-u[n-24]) \Rightarrow$

$\Rightarrow Y_2[k]=\frac{12}{j}\delta[k-1]-\frac{12}{j}\delta[k-23]$; $0\le k\le 23$ **(4)**

Από (3),(4) $\Rightarrow$ $DFT_{24}\{y[n]\} = -12j\,\delta[k-1]+12\delta[k-4]+12\delta[k-20]+12j\,\delta[k-23]$
$0\le k\le 23$ **(5)**

Οπότε, από (1),(4),(5):

$DFT_{24}\{x[n]\}\cdot DFT_{24}\{y[n]\} = -24j\,\delta[k-1]+24j\,\delta[k-23] \xRightarrow{(4)}$

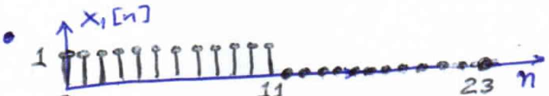
$\Rightarrow z[n] = IDFT\{\quad\} = \boxed{2\sin\frac{\pi n}{12}\cdot(u[n]-u[n-24])}$

ΑΣΚ. 2(b)

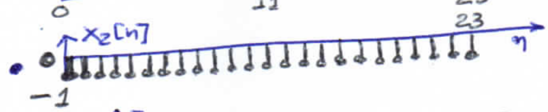
$(u[n]-u[n-12]) \circledast_{24} (u[n-24]-u[n]) \circledast_{24} (u[n-6]-u[n]) = ?$

• Έστω $x_1[n]=u[n]-u[n-12]$; $x_2[n]=u[n-24]-u[n]$; $x_3[n]=u[n-6]-u[n]$

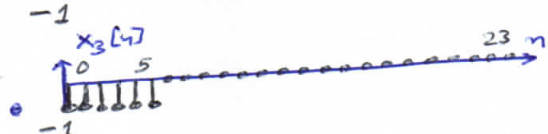
Τότε $z[n]=x_1[n]\circledast_{24}x_2[n]\circledast_{24}x_3[n] = IDFT_{24}\{DFT_{24}\{x_1[n]\}\cdot DFT_{24}\{x_2[n]\}\cdot DFT_{24}\{x_3[n]\}\}$ **(1)**

• 

$\Rightarrow X_1[k]=\sum_{n=0}^{11}W_{24}^{kn}$ **(2)**

• 

$\Rightarrow X_2[k]=-\sum_{n=0}^{23}W_{24}^{kn} = -\frac{1-e^{-j\frac{2\pi}{24}24k}}{1-e^{-j\frac{2\pi}{24}k}} = \begin{cases}-24, & k=0\\ 0, & k=1\ldots 23\end{cases} = -24\delta[k]$ **(3)**

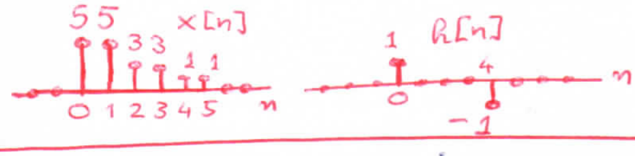
• 

$\Rightarrow X_3[k]=-\sum_{n=0}^{5}W_{24}^{kn}$ **(4)**

• Άρα $X_1[k]\cdot X_2[k]\cdot X_3[k] = -24\,\underbrace{X_1[0]}_{12}\,\underbrace{X_3[0]}_{-6}\cdot\delta[k] = 72\cdot 24\cdot\delta[k] \xRightarrow{(3),(1)}$

$\Rightarrow z[n] = IDFT_{24}\{72\cdot 24\cdot\delta[k]\} = \boxed{72\cdot(u[n]-u[n-24])}$

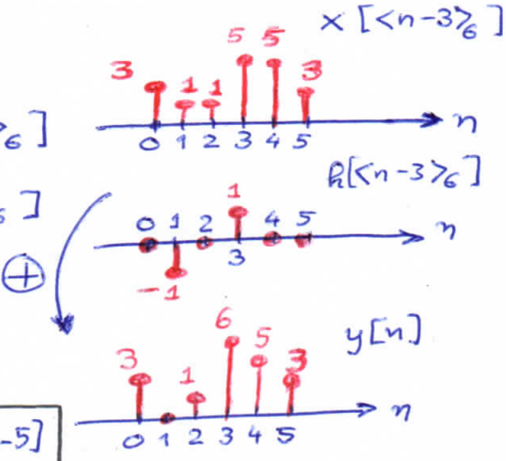
ΑΣΚ. 3



3(α) $y[n] = ?$ με $Y_6[k] = (-1)^k [H[k] + X[k]]$

$$(-1)^k X_6[k] = e^{-j\frac{2\pi}{6}3k} X_6[k] \overset{DFT_6}{\longleftrightarrow} x[\langle n-3\rangle_6]$$

$$(-1)^k H_6[k] = e^{-j\frac{2\pi}{6}3k} H_6[k] \overset{DFT_6}{\longleftrightarrow} h[\langle n-3\rangle_6]$$



- Συνεπώς:

$$y[n] = x[\langle n-3\rangle_6] + h[\langle n-3\rangle_6] =$$

$$= \boxed{3\delta[n] + \delta[n-2] + 6\delta[n-3] + 5\delta[n-4] + 3\delta[n-5]}$$

3(β) $y[n] = ?$ με $Y_6[k] = X_6[k] H_6[k], 0 \le k \le 5$

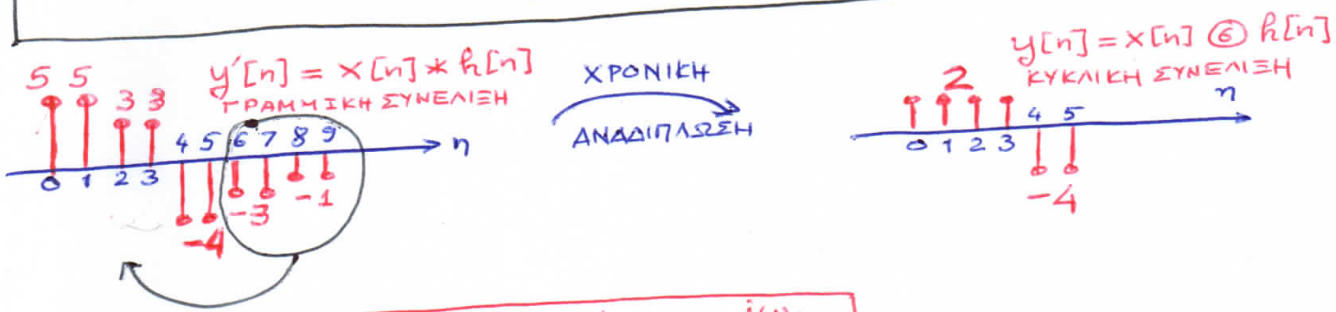
- Από την ιδιότητα της κυκλικής συνέλιξης, $y[n] = x[n] \circledast_6 h[n]$ ← κυκλική συνέλιξη με $N=6$
- Για να υπολογίσουμε το $y[n]$, μπορούμε να βρούμε πρώτα τη γραμμική συνέλιξη $y'[n] = x[n] * h[n]$, και στη συνέχεια το $y[n]$ θα προκύψει με αναδίπλωση (ως προς $N=6$) της $y'[n]$.
- Έχουμε λοιπόν: $y'[n] = x[n] * h[n] = x[n] * \delta[n] - x[n] * \delta[n-4] =$

$$= x[n] - x[n-4] = 5\delta[n] + 5\delta[n-1] + 3\delta[n-2] + 3\delta[n-3] + \delta[n-4] + \delta[n-5]$$
$$- 5\delta[n-4] - 5\delta[n-5] - 3\delta[n-6] - 3\delta[n-7] - \delta[n-8] - \delta[n-9]$$

$$\Rightarrow \boxed{y'[n] = x[n] * h[n] = 5\delta[n] + 5\delta[n-1] + 3\delta[n-2] + 3\delta[n-3] - 4\delta[n-4] - 4\delta[n-5] - 3\delta[n-6] - 3\delta[n-7] - \delta[n-8] - \delta[n-9]}$$

- Στη συνέχεια, με χρονική αναδίπλωση της $y'[n]$:

$$\boxed{y[n] = x[n] \circledast_6 h[n] = 2\delta[n] + 2\delta[n-1] + 2\delta[n-2] + 2\delta[n-3] - 4\delta[n-4] - 4\delta[n-5]}$$



3(ε) $y[n] = ?$ με $Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) H(e^{j\omega})$

- Από την ιδιότητα DTFT της γραμμικής συνέλιξης, $y[n] = x[n] * h[n]$
- Η απάντηση έχει δοθεί στο ερώτημα 3(β), ως $y'[n]$.

(Βλέπε επίσης αριστερό σχήμα πιο πάνω).

3(c) $y[n] = ?$ με $Y_6[k] = Re\{X_6[k]\} + j\,Im\{H_6[k]\}$, $0 \le k \le 5$

• Από τις ιδιότητες συμμετρίας του DFT, έχουμε:

$$Re\{X_6[k]\} \xleftrightarrow{DFT_6} \frac{1}{2}\{x[n] + x^*[\langle -n\rangle_6]\}$$

$$j\,Im\{X_6[k]\} \xleftrightarrow{DFT_6} \frac{1}{2}\{h[n] - h^*[\langle -n\rangle_6]\}$$

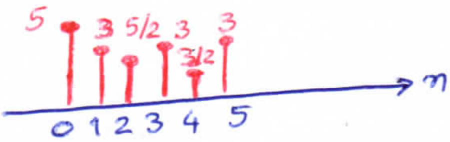
• Λόγω πραγματικών $x[n], h[n]$, και αθροίζοντας τα παραπάνω έχουμε:

$$y[n] = \frac{1}{2}\left[x[n] + x[\langle -n\rangle_6] + h[n] - h[\langle -n\rangle_6]\right] =$$

$$\begin{aligned} = \frac{1}{2}\{ & 5\delta[n] + 5\delta[n-1] + 3\delta[n-2] + 3\delta[n-3] + \delta[n-4] + \delta[n-5] \\ & + 5\delta[n] + \delta[n-1] + \delta[n-2] + 3\delta[n-3] + 3\delta[n-4] + 5\delta[n-5] \\ & + \delta[n] \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - \delta[n-4] \\ & - \delta[n] \qquad + \delta[n-2] \quad \} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{y[n] = 5\delta[n] + 3\delta[n-1] + \frac{5}{2}\delta[n-2] + 3\delta[n-3] + \frac{3}{2}\delta[n-4] + 3\delta[n-5]}$$

• Σχηματικά:

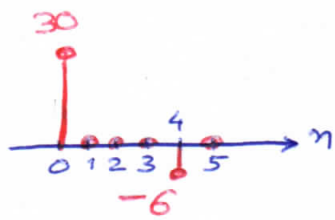


3(d) $y[n] = ?$ με $Y_6[k] = H_6[k] ⑥ X_6[k]$, $0 \le k \le 5$

• Από τη δυϊκότητα ιδιότητας γινομένου/κυκλικής συνέλιξης, έχουμε:

$$y[n] = 6\,x[n]\,h[n] \xleftrightarrow{DFT_6} X_6[k] ⑥ H_6[k]$$

• Συνεπώς, $\boxed{y[n] = 30\delta[n] - 6\delta[n-4]}$



ΑΣΚ. 4 | FFT_{16} IMPLEMENTATION DIAGRAM (decimation in time)

- Τα 16 στοιχεία της εισόδου προκύπτουν από την αναδιάταξη του $x[n]$, $n=0,\dots,15$ ως εξής:

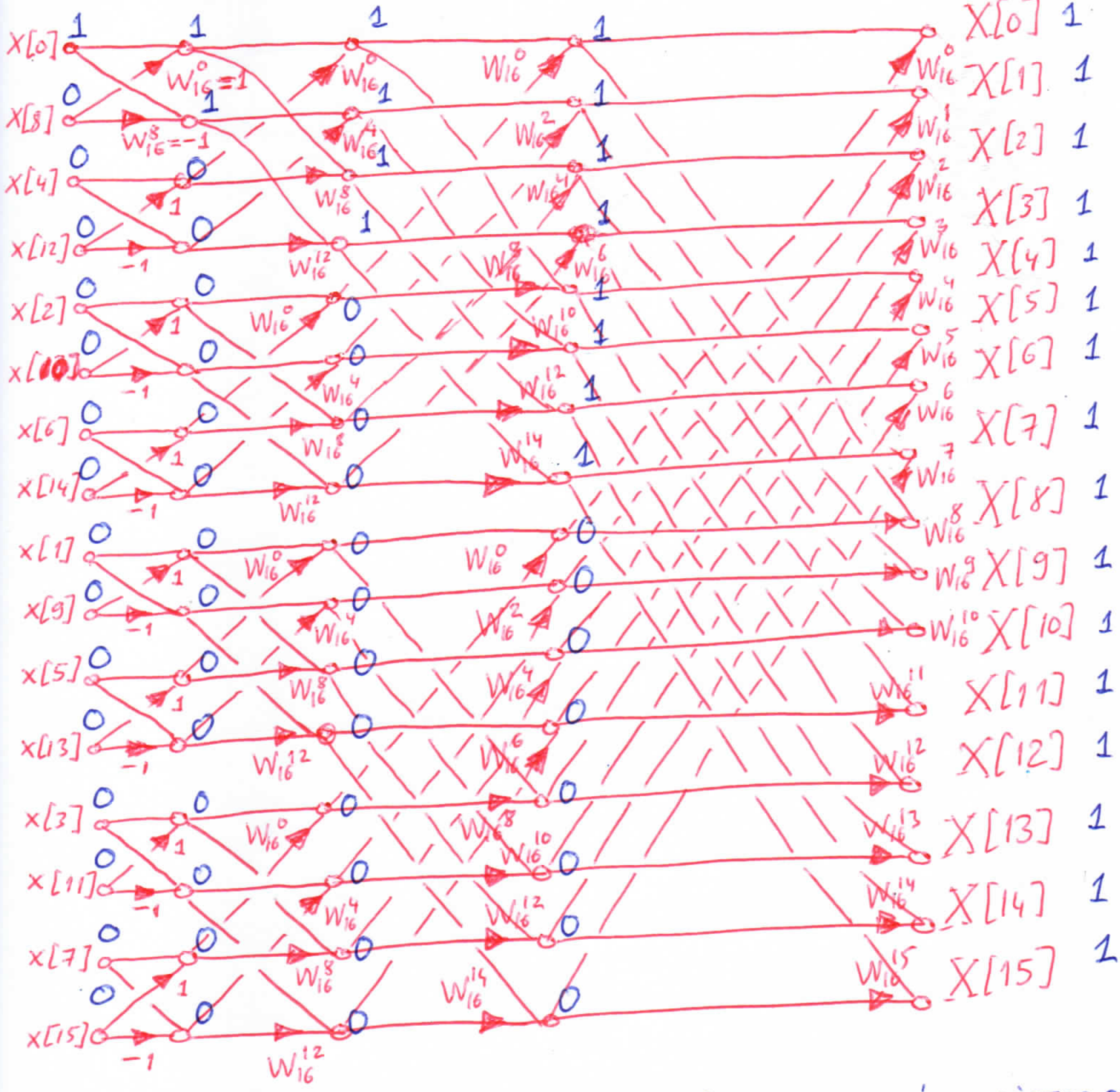
0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15

0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14	1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15

0, 4, 8, 12	2, 6, 10, 14	1, 5, 9, 13	3, 7, 11, 15

0, 8	4, 12	2, 10	6, 14	1, 9	5, 13	3, 11	7, 15

- Το διάγραμμα υλοποίησης προκύπτει ως εξής:



4α | Computational Cost

Με την υλοποίηση αυτή το κόστος είναι $O(N\log_2 N)$ (δηλαδή $16\log_2 16 = 64$) αντί για $O(N^2)$ (δηλ. 256) [πολ/σμοί].

4b | $x[n]=\delta[n] \Rightarrow X[k]=?$

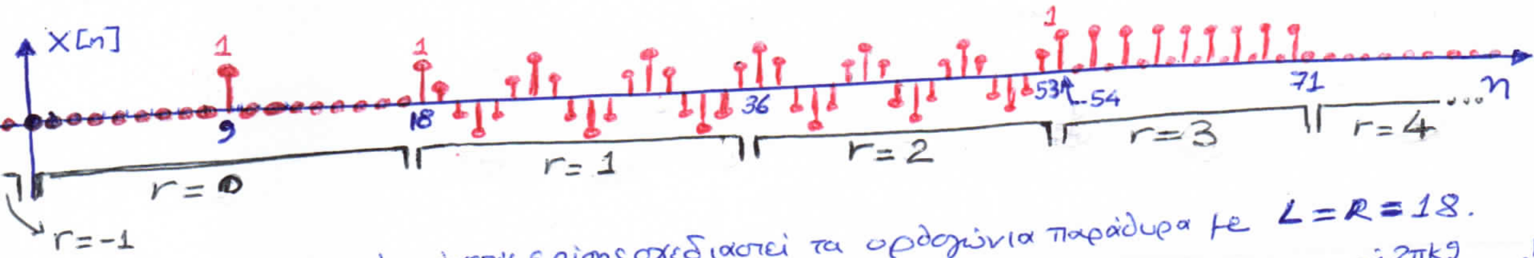
Οι τιμές φαίνονται στο παραπάνω διάγραμμα (με μπλε).

ΑΣΚ. 5

$$x[n] = \begin{cases} 0, & 0 \le n \le 8 \\ 1, & n = 9 \\ 0, & 0 \le n \le 17 \\ \cos\left(\frac{\pi n}{3}\right), & 18 \le n \le 53 \\ 1, & n \text{ άρτιος εντός } 54 \le n \le 71 \\ 0, & n \text{ περιττός εντός } 54 \le n \le 71 \end{cases} \Rightarrow$$

Φασματογράφημα με $N = L = R = 18$ (ορθογώνιο παράθυρο)

• Σχεδιάζουμε πρώτα το σήμα $x[n]$:



• Στο παραπάνω σχήμα έχουν επίσης σχεδιαστεί τα ορθογώνια παράθυρα με $L = R = 18$.

• Για $r=0$, το παράθυρο "βλέπει" το σήμα $x'_0[n] = \begin{cases} 1, & n=9 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \xrightarrow{DFT_{18}} X'_0[k] = e^{-j\frac{2\pi k 9}{18}} = (-1)^k$

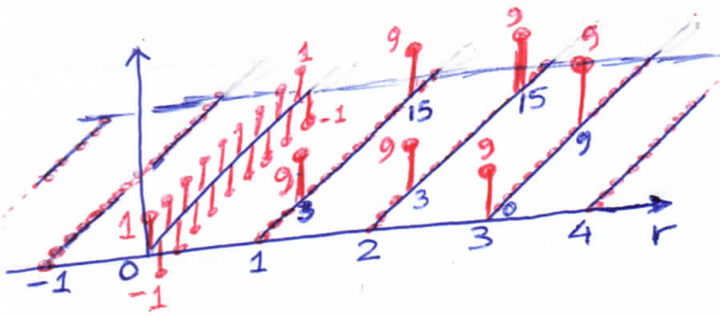
• Για $r=1$ & $r=2$, τα παράθυρα "βλέπουν" το σήμα $x'_{1,2}[n] = \cos\frac{\pi n}{3} \cdot (u[n] - u[n-18]) =$
$= \frac{1}{2}\left(e^{j\frac{2\pi}{18}3n} + e^{-j\frac{2\pi}{18}3n}\right) \cdot (u[n] - u[n-18]) \xrightarrow{DFT_{18}} X'_{1,2}[k] = 9\,\delta[k-3] + 9\,\delta[k-15]$

• Τέλος, για $r=3$, το παράθυρο "βλέπει" το $x'_3[n] = \begin{cases} 1, & n = 0, 2, \dots, 16 \\ 0, & n = 1, 3, \dots, 17 \end{cases} \xrightarrow{DFT_{18}}$

$\Rightarrow X'_3[k] = \begin{cases} 9, & \text{για } k = 0, 9 \\ 0, & \text{για } k = 1, 2, \dots 8, 10, \dots 17 \end{cases}$

Συνεπώς:

$$X[rR, k] = \begin{cases} (-1)^k, & \text{για } r = 0,\ k \in [0, 17] \\ 9, & \text{για } r = 1, 2;\ k = 3, 15 \\ 9, & \text{για } r = 3;\ k = 0, 9 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

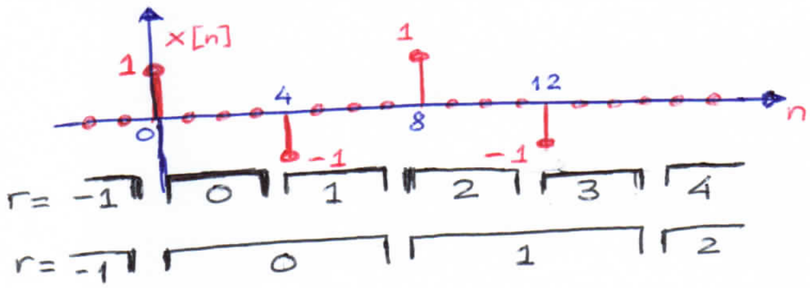


ΑΣΚ. 6 $x[n]=\sum_{\ell=0}^{3}(-1)^{\ell}\,\delta[n-4\ell]$ ⇒ φασματόγραμμα με ορθ. παράθυρα

(α) $N=L=R=4$

(β) $N=L=R=8$

• Σχεδιάζουμε πρώτα το σήμα $x[n]$:



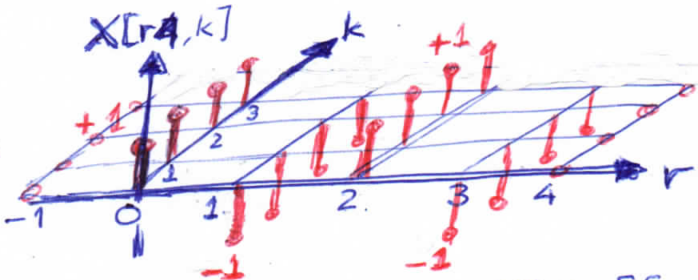
$L=R=4$

$L=R=8$

• Τα ορθογώνια παράθυρα στις περιπτώσεις $L=R=4$ & $L=R=8$ έχουν επίσης σχεδιαστεί. Συνεπώς:

• <u>Περίπτωση $N=L=R=4$:</u> Τα παράθυρα "βλέπουν" το σήμα $\delta[n]$ (για $r=0,2$) ή $-\delta[n]$ (για $r=1,3$). Συνεπώς, έχουμε DFTs ίσους με $+1$ ή -1 αντίστοιχα, άρα το φασματόγραμμα είναι το:

$$X[rR,k]=\begin{cases}+1, & r=0,2;\ k=0,1,2,3\\ -1, & r=1,3;\ k=0,1,2,3\\ 0 & \text{αλλού}\end{cases}$$



• <u>Περίπτωση $N=L=R=8$:</u> Τα παράθυρα "βλέπουν" το σήμα $\delta[n]-\delta[n-4]$ για $r=0$ & $r=1$. Συνεπώς, έχουμε DFTs ίσους με $1-(-1)^k=\begin{cases}0, & k \text{ άρτια}\\ 2, & k \text{ περιττά}\end{cases}$

άρα το φασματόγραμμα είναι το:

$$X[rR,k]=\begin{cases}+2, & r=0,1;\ k=1,3,5,7\\ 0, & \text{αλλού}\end{cases}$$