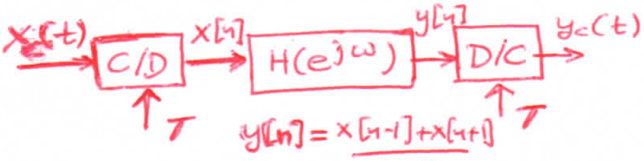
HW 1 SOLS. (21/11/17)

HY 342

2017-18-XEIM

ΑΣΚ. 1



$y[n] = \dfrac{x[n-1]+x[n+1]}{2}$

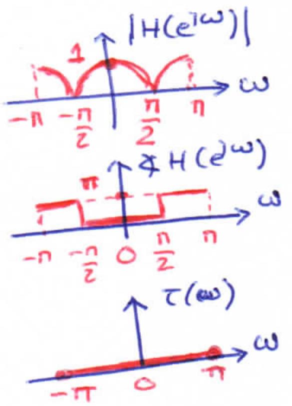
- $|H(e^{j\omega})|$, $\measuredangle H(e^{j\omega})$, $\tau(\omega)$
- $Y_c(j\Omega)$, $y_c(t)$, $\int_{-\infty}^{+\infty} y_c(t)dt$

για $x_c(t) = \dfrac{2}{\pi t}\sin\left(\dfrac{\pi t}{2}\right)$

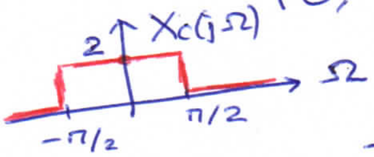
$T = 1$ & $T = 4$ sec

(a) $y[n] = \dfrac{x[n-1]+x[n+1]}{2} \Rightarrow Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})\left[\dfrac{e^{-j\omega}+e^{j\omega}}{2}\right] = X(e^{j\omega})\cos(\omega)$

$$\Rightarrow \boxed{H(e^{j\omega}) = \cos\omega} \Rightarrow \begin{cases} |H(e^{j\omega})| = |\cos\omega| \\ \measuredangle H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 0, & |\omega| \leq \pi/2 \\ \pi, & \pi < |\omega| \leq \pi \end{cases} \\ \tau(\omega) = -\dfrac{d}{d\omega}\measuredangle H(e^{j\omega}) = 0 \end{cases}$$



(B) $x_c(t) = 2\cdot\dfrac{\sin(\pi t/2)}{\pi t} \Rightarrow X_c(j\Omega) = \begin{cases} 2, & |\Omega| < \frac{\pi}{2} \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$



ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ (i)

$T = 1 \Rightarrow \Omega_s = 2\pi$

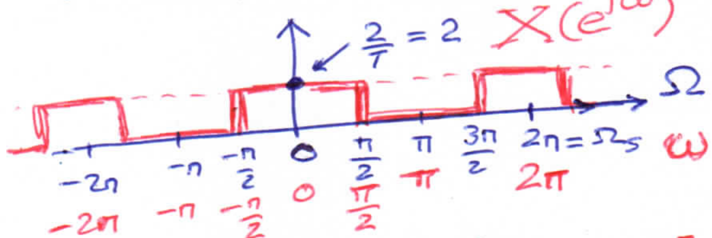
(δεν έχουμε αναδίπλωση)

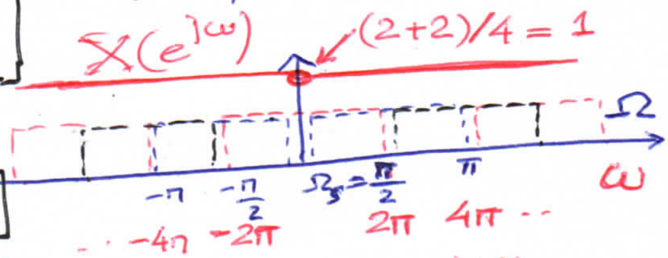
ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ (ii)

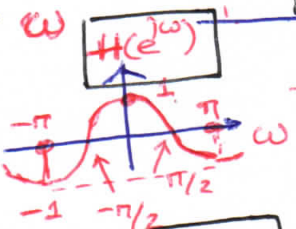
$T = 4 \Rightarrow \Omega_s = \pi/2$

(έχουμε αναδίπλωση)

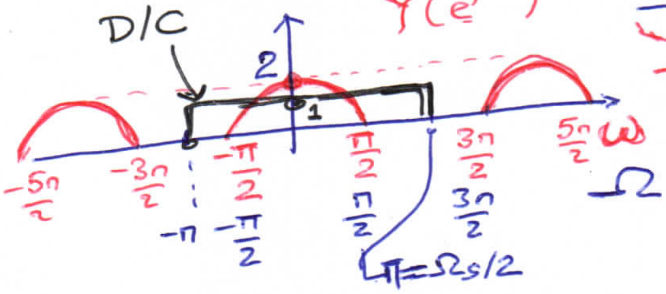
C/D

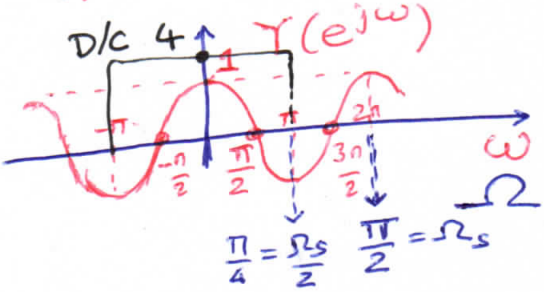




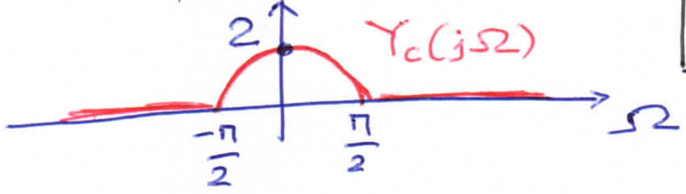


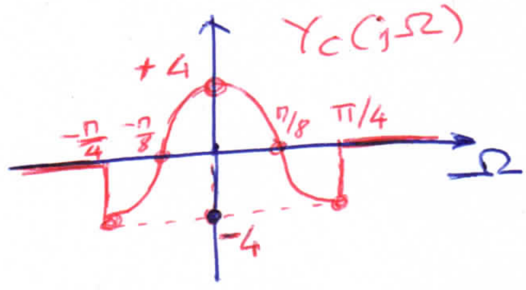
FILTERING





D/C





Άρα:

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ (i)

$$Y_c(j\Omega) = \begin{cases} 2\cos(\Omega), & |\Omega| \leq \pi/2 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ (ii)

$$Y(j\Omega) = \begin{cases} 4\cdot\cos(4\Omega), & |\Omega| \leq \frac{\pi}{4} \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

(c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} y_c(t)dt = Y_c(j\Omega)\Big|_{\Omega=0}$ (από ορισμό Μ/Ε Fourier). Άρα:

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ (i): $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} y_c(t)dt = 2$

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ (ii): $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} y_c(t)dt = 4$

Τέλος, από τον αντίστροφο Μ/Ε Fourier παίρνουμε για την περίπτωση (i):

$$y_c(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} Y_c(j\Omega)e^{j\Omega t}d\Omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/2}^{+\pi/2} 2\cos(\Omega)e^{j\Omega t}d\Omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(e^{j\Omega}+e^{-j\Omega})e^{j\Omega t}d\Omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{j\Omega(t+1)}d\Omega + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{+j\Omega(t-1)}d\Omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\frac{1}{j(t+1)}e^{j\Omega(t+1)}\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} + \frac{1}{2\pi}\frac{1}{j(t-1)}e^{j\Omega(t-1)}\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} =$$

$$= \frac{1}{2j}\left[e^{j\frac{\pi}{2}(t+1)} - e^{-j\frac{\pi}{2}(t+1)}\right]\frac{1}{\pi(t+1)} + \frac{1}{2j}\left[e^{j\frac{\pi}{2}(t-1)} - e^{-j\frac{\pi}{2}(t-1)}\right]\frac{1}{\pi(t-1)}$$

$$\Rightarrow \boxed{y_c(t) = \frac{\sin[\pi/2\cdot(t+1)]}{\pi(t+1)} + \frac{\sin[\pi/2\cdot(t-1)]}{\pi(t-1)}}$$

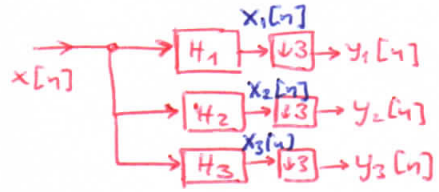
Κάνοντας παρόμοιες πράξεις, παίρνουμε για την περίπτωση (ii):

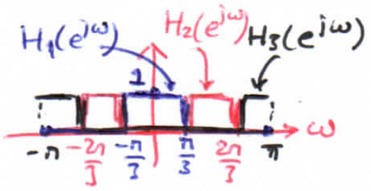
$$y_c(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/4}^{\pi/4} 2(e^{j4\Omega}+e^{-j4\Omega})\cdot e^{j\Omega t}d\Omega \Rightarrow \dots$$

$$\Rightarrow \boxed{y_c(t) = 2\cdot\left[\frac{\sin(\frac{\pi}{4}(t+4))}{\pi(t+4)} + \frac{\sin(\frac{\pi}{4}(t-4))}{\pi(t-4)}\right]}$$

Στην περίπτωση αυτή, φαίνεται καθαρά το φαινόμενο της αναδίπλωσης.

ΑΣΚ. 2





$y_{1,2,3}[n] = ?$

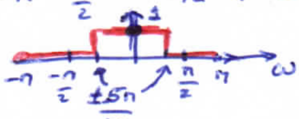
$$x[n] = \frac{1}{\pi n}\left[\sin\frac{7\pi n}{12} - \sin\frac{5\pi n}{12} + 3\left(1+(-1)^n\right)\sin\frac{\pi n}{6}\right]$$

• Δουλεύουμε στο πεδίο της συχνότητας, βρίσκοντας πρώτα το φάσμα $X(e^{j\omega})$.

Από DTFT, έχουμε:

$\frac{1}{\pi n}\sin\frac{7\pi n}{12} \longleftrightarrow$

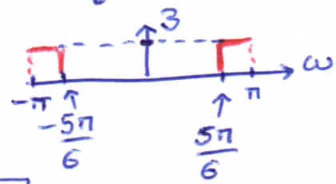
$\frac{1}{\pi n}\sin\frac{5\pi n}{12} \longleftrightarrow$



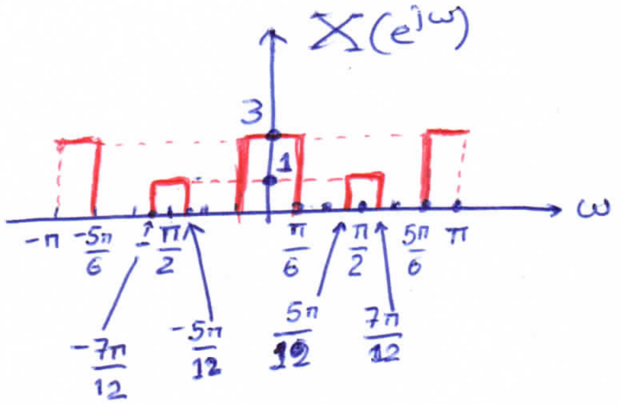
$\frac{3}{\pi n}\sin\frac{\pi n}{6} \longleftrightarrow$

$3(-1)^n\sin\frac{\pi n}{6} \longleftrightarrow$

$\left(3e^{j\pi n}\sin\frac{\pi n}{6}\right)$



$\Longrightarrow$



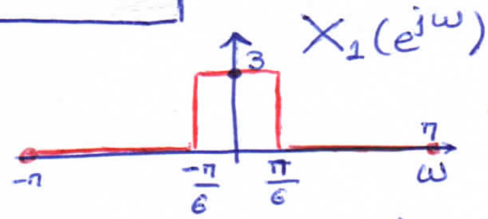
$$Y_i(e^{j\omega}) = \frac{1}{3}\left[X_i(e^{j\frac{\omega}{3}}) + X_i(e^{j(\frac{\omega}{3}-\frac{2\pi}{3})}) + X_i(e^{j(\frac{\omega}{3}-\frac{4\pi}{3})})\right]$$

• Μετά από το FILTERING:

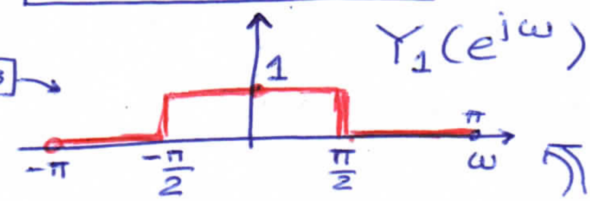
• Μετά από το COMPRESSOR ↓3

με $H_1(z)$:

$\rightarrow H_1(z) \rightarrow$



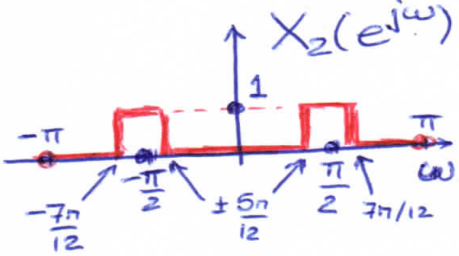
$\rightarrow$ ↓3 $\rightarrow$



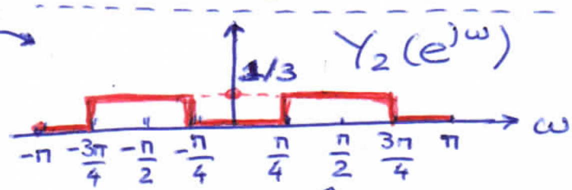
(προκύπτει από τον 1ο όρο του αθροίσματος $\pm\frac{\pi}{6} \rightarrow 3(\pm\frac{\pi}{6}) = \pm\pi/2$)

με $H_2(z)$

$\rightarrow H_2(z) \rightarrow$



$\rightarrow$ ↓3 $\rightarrow$



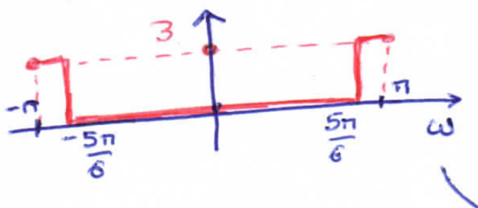
από τον 3ο όρο

Προκύπτει από τον 2ο όρο $\left[\left(-\frac{7\pi}{12}, -\frac{5\pi}{12}\right) + \frac{2\pi}{3}\right] \times 3$

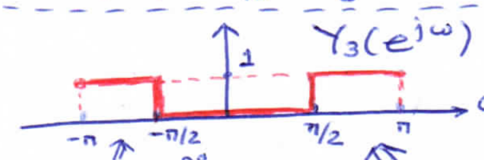
$\left[\left(-\frac{19\pi}{12}, -\frac{17\pi}{12}\right) + \frac{4\pi}{3}\right] \times 3$

με $H_3(z)$

$\rightarrow H_3(z) \rightarrow$



$\rightarrow$ ↓3 $\rightarrow$



Από τον 2ο όρο: $\left[\left(-\pi, -\frac{5\pi}{6}\right) + \frac{2\pi}{3}\right] \times 3$

από τον 3ο όρο: $\left[\left(-\frac{7\pi}{6}, -\pi\right) + \frac{4\pi}{3}\right] \times 3$

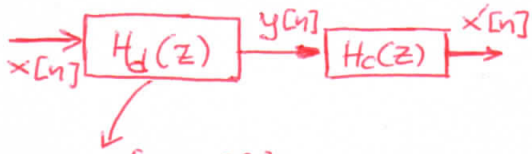
• Από τα διαγράμματα & INVERSE DTFT:

$$\boxed{y_1[n] = \frac{\sin(\pi n/2)}{\pi n}}$$

$$\boxed{y_2[n] = \frac{1}{3\pi n}\left[\sin\left(\frac{3\pi n}{4}\right) - \sin\left(\frac{\pi n}{4}\right)\right]}$$

$$\boxed{y_3[n] = (-1)^n\,\frac{\sin(\pi n/2)}{\pi n}}$$

ΑΣΚ. 3



ZEROS $= \{2, \pm 2j\}$

POLES $= \{1/2, \pm j/3\}$

$x[n] = (-1)^n \Rightarrow y[n] = 9(-1)^n$

(a) $H_d(z) = ?$

(b) DIRECT II & CASCADE IMPL.

(c) $H_C(z) = ?$ st $|X'(e^{j\omega})| = |X(e^{j\omega})|$ (STABLE & CAUSAL)

(a) Από το διάγραμμα πόλων και μηδενικών του $H_d(z)$:
$$H_d(z) = A \cdot \frac{(1-2z^{-1})(1+4z^{-2})}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1+\frac{1}{9}z^{-2})}$$

Παρατηρούμε ότι $(-1)^n = z_0^n \Big|_{z_0=-1}$, συνεπώς η έξοδος θα είναι $H(z_0) \cdot z_0^n$ $\Rightarrow$

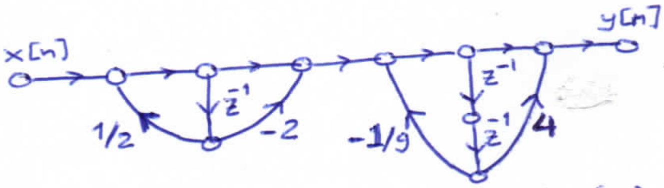
Από την εκφώνηση $x[n] = (-1)^n \Rightarrow y[n] = 9(-1)^n$, άρα $H(-1) = 9$

$$\Rightarrow 9 = A\frac{(1+2)(1+4)}{(1+\frac{1}{2})(1+\frac{1}{9})} = \frac{A \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{5}}{\frac{\cancel{3}}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{10}}{9}} = 9A \Rightarrow \boxed{A = 1}$$

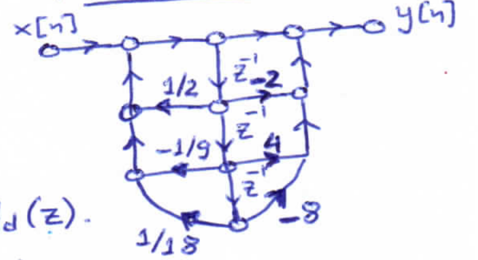
Άρα: $$H_d(z) = \frac{(1-2z^{-1})(1+4z^{-2})}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1+\frac{1}{9}z^{-2})} \Rightarrow \boxed{H_d(z) = \frac{1-2z^{-1}+4z^{-2}-8z^{-3}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}+\frac{1}{9}z^{-2}-\frac{1}{18}z^{-3}}}$$

(b) ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ ΥΛΟΠΟΙΗΣΗΣ :

CASCADE:



DIRECT FORM II:



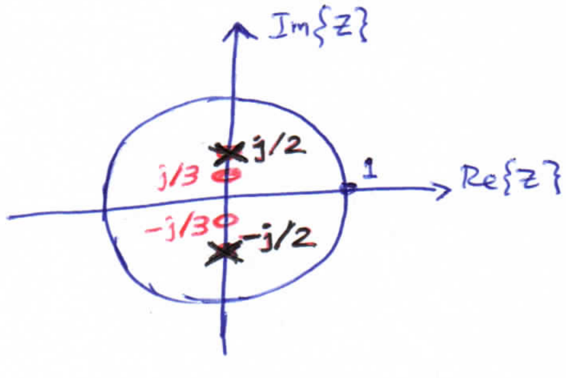
(c) Η πρώτη σκέψη ίσως να ήταν να θέσουμε $H_C(z) = 1/H_d(z)$. Το φίλτρο όμως δεν θα ήταν ευσταθές (πόλοι στο 2 & $\pm 2j$). Αντ' αυτού, αναλύουμε το $H_d(z)$ σε γινόμενο MIN-PHASE & ALL-PASS, και αντιστρέφουμε το MIN-PHASE για να πάρουμε το ζητούμενο $H_C(z)$.

Άρα: $$H_d(z) = \frac{(1-2z^{-1})(1+4z^{-2})}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1+\frac{1}{9}z^{-2})} = \underbrace{\frac{1+\frac{1}{4}z^{-2}}{1+\frac{1}{9}z^{-2}} \cdot 4 \cdot 2}_{H_{d,MIN}(z)} \cdot \underbrace{\frac{1+4z^{-1}}{1+\frac{1}{4}z^{-1}} \cdot \frac{1-2z^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}}_{H_{ALLPASS}(z),\ \text{με } |\cdot|=1}$$

Άρα: $$H_C(z) = \frac{1}{H_{d,MIN}(z)} = \boxed{\frac{1}{8} \cdot \frac{1+\frac{1}{9}z^{-2}}{1+\frac{1}{4}z^{-2}}}$$

ΠΟΛΟΙ της $H_C(z)$: $\{\pm j/2\}$

ΜΗΔΕΝΙΚΑ της $H_C(z)$: $\{\pm j/3\}$



ΑΣΚ. 4

FIR, TYPE III
$M=6$
$h[n] \in \mathbb{R}$
ZERO @ $j/\sqrt{2}$
$|H(e^{j\omega})|\Big|_{\omega=\pi/2} = 1$, $\measuredangle H(e^{j\omega})\Big|_{\omega=\pi/2} = \pi$

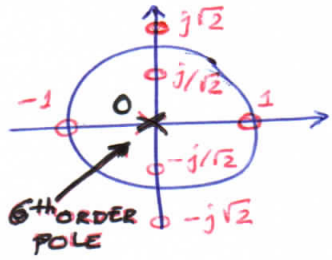
$\Rightarrow$ ZEROS ? $H(z)=?$ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΥΛΟΠΟΙΗΣΗΣ

- Λόγω του ότι είναι τύπου III, έχουμε μηδενικά στα ± 1.
- Λόγω γραμμικότητας φάσης, z_0 ZERO $\Rightarrow$ $1/z_0$ ZERO
- Λόγω $h[n] \in \mathbb{R}$, z_0 ZERO $\Rightarrow$ z_0^* ZERO
- ZERO @ $j/\sqrt{2}$

$\Longrightarrow$ ZEROS @ $\pm j/\sqrt{2}$, $\pm j\sqrt{2}$

- $M=6$ (ZEROS)

$\Longrightarrow$ $\boxed{\text{ZEROS @ } \pm 1, \pm j/\sqrt{2}, \pm j\sqrt{2}}$



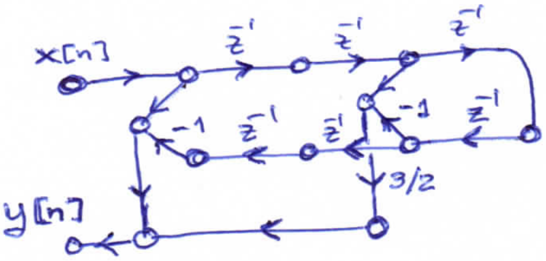
Άρα: $H(z) = A(1-z^{-1})(1+z^{-1})(1+\frac{z^{-2}}{2})(1+2z^{-2}) =$
$= A(1-z^{-2})(1+\frac{5}{2}z^{-2}+z^{-4}) = A(1+\frac{3}{2}z^{-2}-\frac{3}{2}z^{-4}-z^{-6})$

Επίσης: $\omega=\pi/2 \Longleftrightarrow z=j$
$H(e^{j\omega})\Big|_{\omega=\pi/2} = 1 \cdot e^{j\pi} = -1$
$H(j) = A(1-\frac{3}{2}-\frac{3}{2}+1) = -A$

$\Rightarrow \boxed{A=+1}$

$$\Rightarrow \boxed{H(z) = 1+\frac{3}{2}z^{-2}-\frac{3}{2}z^{-4}-z^{-6}}$$

- Διάγραμμα υλοποίησης εκμεταλλευόμενοι την συμμετρία της $H(z)$:



ΑΣΚ. 5

LOW PASS BUTTERWORTH WITH IMPULSE INVARIANCE METHOD

N	ω_c @ 3dB
1	1 (also 0.1)
2	1
3	1

• Περιπτωση N=1: Ριζες του $H_c(s)H_c(-s)$: $s_n = \Omega_c \exp\left(j\pi \frac{2+2n}{2}\right)$, $n=0,1 \Rightarrow$

$\Rightarrow s_0 = -\Omega_c,\ s_1 = \Omega_c$

ΔΙΑΛΕΓΟΥΜΕ για την $H_c(s)$ το s_0

Αρα: $$H_c^{(1)}(s) = \frac{\Omega_c}{s+\Omega_c}$$

ΜΕ IMPULSE INVARIANCE $\Omega_c = \omega_c$ $$\Rightarrow H_c^{(1)}(s) = \frac{\omega_c}{s+\omega_c} \Rightarrow H^{(1)}(z) = \frac{\omega_c}{1-e^{-\omega_c}z^{-1}}$$

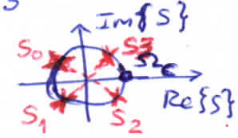
Αρα με $\omega_c = 1$: $$\boxed{H^{(1)}(z) = \frac{1}{1-0.368\,z^{-1}}} \quad (1)$$

με $\omega_c = 0.1$: $$\boxed{H^{(1)}(z) = \frac{0.1}{1-0.905\,z^{-1}}} \quad (2)$$

• Περιπτωση N=2: Ριζες του $H_c(s)H_c(-s)$: $s_n = \Omega_c \exp\left(j\pi \frac{3+2n}{4}\right)$, $n=0,1,2,3$

$\Rightarrow s_0 = \Omega_c e^{j3\pi/4},\ s_1 = \Omega_c e^{j\frac{5\pi}{4}},\ s_2 = \Omega_c e^{j\frac{7\pi}{4}},\ s_3 = \Omega_c e^{j\frac{\pi}{4}}$

ΔΙΑΛΕΓΟΥΜΕ ΓΙΑ ΤΗΝ $H_c(s)$ ΤΙΣ ΡΙΖΕΣ ΣΤΟ ΑΡΙΣΤΕΡΟ ΗΜΙΕΠΙΠΕΔΟ ($Re\{s\}<0$), ΑΡΑ: $s_0, s_1 = \Omega_c e^{\pm j\frac{3\pi}{4}}$



Αρα: $$H_c^{(2)}(s) = \frac{\Omega_c^2}{(s-\Omega_c e^{j\frac{3\pi}{4}})(s-\Omega_c e^{-j\frac{3\pi}{4}})} = \frac{\Omega_c^2}{s^2+\sqrt{2}\,\Omega_c s + \Omega_c^2}$$

ΜΕ IMPULSE INVARIANCE, $\Omega_c = \omega_c = 1$, ΣΥΝΕΠΩΣ:

$$H_c^{(2)}(s) = \frac{1}{s^2+\sqrt{2}s+1} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{(s+\frac{1}{\sqrt{2}})^2+(\frac{1}{\sqrt{2}})^2}\cdot\sqrt{2} \xRightarrow{\mathcal{L}^{-1}(\cdot)} h_c^{(2)}(t) = \sqrt{2}\,e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}t}\sin\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)u(t) \Rightarrow$$

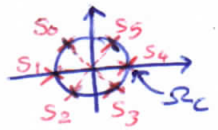
$$\xRightarrow[\text{INVARIANCE}]{\text{IMPULSE}} h^{(2)}[n] = \sqrt{2}\,e^{-\frac{n}{\sqrt{2}}}\sin\left(\frac{n}{\sqrt{2}}\right)u[n] \xRightarrow{\mathcal{Z}(\cdot)} H^{(2)}(z) = \sqrt{2}\,\frac{e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}}\sin(\frac{1}{\sqrt{2}})\,z}{z^2-2e^{-1/\sqrt{2}}\cos(\frac{1}{\sqrt{2}})z+e^{-\sqrt{2}}}$$

$$\Rightarrow H^{(2)}(z) = \frac{\sqrt{2}\,e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}}\sin(\frac{1}{\sqrt{2}})\,z^{-1}}{1-2e^{-1/\sqrt{2}}\cos(\frac{1}{\sqrt{2}})z^{-1}+e^{-\sqrt{2}}z^{-2}} = \boxed{\frac{0.453\,z^{-1}}{1-0.75\,z^{-1}+0.243\,z^{-2}}} \quad (3)$$

• Περίπτωση $\underset{\sim}{N=3}$: Ρίζες του $H_c(s)H_c(-s)$: $s_n = \Omega_c \exp\left(j\pi \frac{4+2n}{6}\right)$, $n = 0,\dots,5$

$\Rightarrow s_0 = \Omega_c e^{j\frac{2\pi}{3}}$, $s_1 = \Omega_c e^{j\pi} = -\Omega_c$, $s_2 = \Omega_c e^{j\frac{4\pi}{3}}$, $s_3 = \Omega_c e^{j\frac{5\pi}{3}}$, $s_4 = \Omega_c$, $s_5 = \Omega_c e^{j\frac{\pi}{3}}$

Διαλέγουμε για την $H_c(s)$ τις ρίζες στο αριστερό ημιεπίπεδο ($Re\{s\}<0$), άρα:



$s_{0,2} = \Omega_c e^{\pm j\frac{2\pi}{3}}$, $s_1 = -\Omega_c$

Άρα: $$H_c^{(3)}(s) = \frac{\Omega_c^3}{(s+\Omega_c)(s-\Omega_c e^{j\frac{2\pi}{3}})(s-\Omega_c e^{-j\frac{2\pi}{3}})} = \frac{\Omega_c^3}{(s+\Omega_c)(s^2+\Omega_c s+\Omega_c^2)}$$

$\hookrightarrow -2Re\{\Omega_c e^{j\frac{2\pi}{3}}\}$

Με IMPULSE INVARIANCE, $\Omega_c = \omega_c = 1$, συνεπώς:

$$H_c^{(3)}(s) = \frac{1}{(s+1)(s^2+s+1)} = \frac{1}{s+1} - \frac{s}{s^2+s+1} = \frac{1}{s+1} - \frac{s+\frac{1}{2}}{(s+\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2} + \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot(\frac{\sqrt{3}}{2})}{(\ )^2+(\ )^2}$$

$$\xRightarrow{\mathcal{L}^{-1}(\cdot)} h_c^{(3)}(t) = \left[e^{-t} - e^{-\frac{t}{2}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + \frac{1}{\sqrt{3}} e^{-\frac{t}{2}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right]\cdot u(t)$$

$$\xRightarrow[\text{INVARIANCE}]{\text{IMPULSE}} h^{(3)}[n] = \left[e^{-n} - e^{-\frac{n}{2}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}n\right) + \frac{1}{\sqrt{3}} e^{-\frac{n}{2}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}n\right)\right]\cdot u[n]$$

$$\xRightarrow{Z(\cdot)} H^{(3)}(z) = \frac{1}{1-e^{-1}z^{-1}} - \frac{z^2 - e^{-\frac{1}{2}}\cos(\frac{\sqrt{3}}{2})\cdot z - \frac{1}{\sqrt{3}}e^{-\frac{1}{2}}\sin(\frac{\sqrt{3}}{2})z}{z^2 - 2e^{-\frac{1}{2}}\cos(\frac{\sqrt{3}}{2})\cdot z + e^{-1}} =$$

$$= \frac{1}{1-e^{-1}z^{-1}} - \frac{1-[e^{-\frac{1}{2}}\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}) + (\sqrt{3})^{-1}e^{-\frac{1}{2}}\sin(\frac{\sqrt{3}}{2})]z^{-1}}{1-2e^{-\frac{1}{2}}\cos(\frac{\sqrt{3}}{2})z^{-1} + e^{-1}z^{-2}}$$

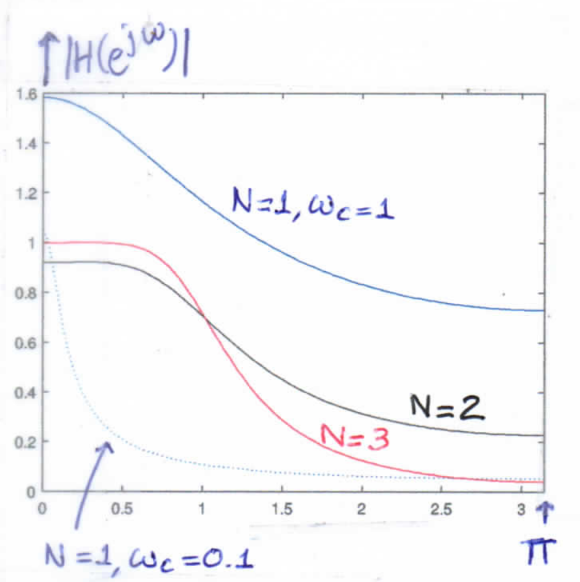
$$\Rightarrow \boxed{H^{(3)}(z) = \frac{1}{1-0.368z^{-1}} - \frac{1-0.66z^{-1}}{1-0.786z^{-1}+0.368z^{-2}}} \quad (4)$$

• Από (1)-(4):

	($z=1$) $\omega=0$	($z=-1$) $\omega=\pi$
$N=1$, $\omega_c=0.1$	1.05	0.05
$N=1$, $\omega_c=1$	1.58	0.73
$N=2$, $\omega_c=1$	0.92	0.23
$N=3$, $\omega_c=1$	0.998	0.04

ΤΙΜΕΣ ΤΗΣ $|H(e^{j\omega})|$

• Οι παρατηρήσεις αυτές φαίνονται πιο καθαρά στα διαγράμματα των $|H(e^{j\omega})|$ με MATLAB:



• Παρατηρούμε την ύπαρξη του φαινομένου της αναδίπλωσης, που έχει ως αποτέλεσμα να λαμβάνουμε τιμές όχι ίσες με τις επιθυμητές $|H(e^{j0})|=1$ & $H(e^{j\pi})=0$.

• Το φαινόμενο μειώνεται αν μικρύνει το ω_c ή αυξηθεί το N.

ΑΣΚ. 6

BANDSTOP BUTTERWORTH

$N=3,\ \omega_{p_1}=\frac{\pi}{4},\ \omega_{p_2}=\frac{3\pi}{4}$

3dB freqs.

BILINEAR TRANSFORM

- Από την ΑΣΚ(5), έχουμε: $H_c(s)=\dfrac{\Omega_c^3}{(s+\Omega_c)(s^2+\Omega_c s+\Omega_c^2)}$ (1)

- Θα σχεδιάσουμε πρώτα ένα LOW-PASS φίλτρο (από το οποίο θα προκύψει στη συνέχεια το BAND-STOP), και διαλέγουμε $\boxed{\theta_p=\pi/2}$ ως τη συχνότητα 3dB.

- Λόγω του διγραμμικού Μ/Σ, έχουμε $\Omega_c=2\tan\left(\frac{\theta_p}{2}\right)=2\underbrace{\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)}_{1}\Rightarrow\boxed{\Omega_c=2}$ (2)

- Από (1), (2): $H_c(s)=\dfrac{8}{(s+2)(s^2+2s+4)}$ (3)

- Από διγραμμικό μετασχηματισμό: $H_{LP}(Z)=H_c(s)\Big|_{s=2\frac{1-Z^{-1}}{1+Z^{-1}}}\Longrightarrow H_{LP}(Z)=\dfrac{1}{\left(\frac{1-Z^{-1}}{1+Z^{-1}}+1\right)\left[\left(\frac{1-Z^{-1}}{1+Z^{-1}}\right)^2+\frac{1-Z^{-1}}{1+Z^{-1}}+1\right]}$

$$\Longrightarrow\boxed{H_{LP}(Z)=\frac{(1+Z^{-1})^3}{2(3+Z^{-2})}}\quad(4)$$

- Στη συνέχεια, μετατρέπουμε το LOW-PASS σε BAND-STOP με χρήση της:

$$Z^{-1}=\frac{z^{-2}-\frac{2a}{1+k}z^{-1}+\frac{1-k}{1+k}}{\frac{1-k}{1+k}z^{-2}-\frac{2a}{1+k}z^{-1}+1}$$

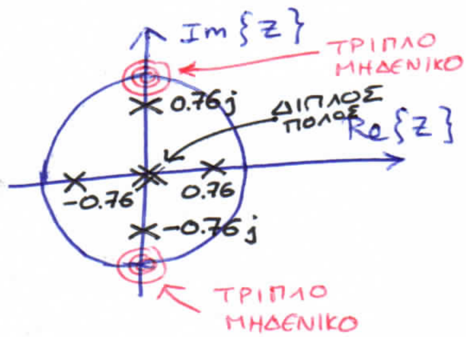
όπου: $a=\dfrac{\cos[(\omega_{p_2}+\omega_{p_1})/2]}{\cos[(\omega_{p_2}-\omega_{p_1})/2]}=\dfrac{\cos(\frac{\pi}{2})}{\cos(\frac{\pi}{4})}=0$

και $k=\tan\left(\frac{\omega_{p_2}-\omega_{p_1}}{2}\right)\cdot\tan\left(\frac{\theta_p}{2}\right)=\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)\cdot\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$

$$\Rightarrow\boxed{Z^{-1}=z^{-2}}\quad(5)$$

- Άρα, από (4), (5) $\Rightarrow H_{BS}(z)=H_{LP}(Z)\Big|_{Z^{-1}=z^{-2}}\Rightarrow\boxed{H_{BS}(z)=\dfrac{(1+z^{-2})^3}{2(3+z^{-4})}}$ (6)

- ΜΗΔΕΝΙΚΑ $\{\{\pm j\}\times 3$ φορές$\}$
- ΠΟΛΟΙ: $\{\underbrace{\pm\left(\tfrac{1}{3}\right)^{1/4},\ \pm\left(\tfrac{1}{3}\right)^{1/4}\cdot j}_{0.76},\ 0,\ 0\}$



- Επιβεβαιώνουμε από την (6) ότι:

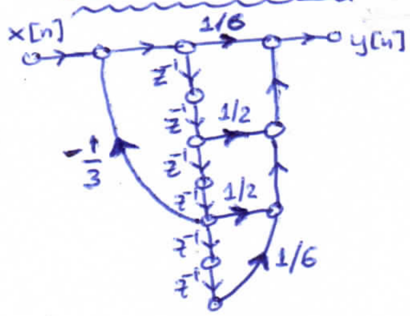
ω	$\Leftrightarrow z$	$H(z)$
0	1	$8/8=1$
π	-1	$8/8=1$
$\frac{\pi}{2}$	j	$\frac{(1-1)^3}{2(3+1)}=0$

✓

- Κάνοντας πράξεις στην (6):

$$H_{BP}(z)=\frac{1+3z^{-2}+3z^{-4}+z^{-6}}{6+2z^{-4}}=\frac{\frac{1}{6}+\frac{1}{2}z^{-2}+\frac{1}{2}z^{-4}+\frac{1}{6}z^{-6}}{1+\frac{1}{3}z^{-4}}$$

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΥΛΟΠΟΙΗΣΗΣ ΣΕ ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΜΟΡΦΗ

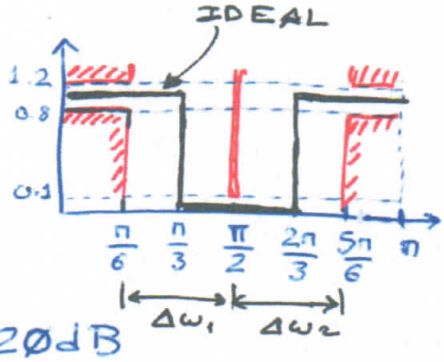


ΑΣΚ. 7

BANDSTOP
FIR TYPE I

$|H(e^{j\omega})| < 0.1, \quad \omega \approx \pi/2$

$0.8 < |H(e^{j\omega})| < 1.2, \quad |\omega| \leq \frac{\pi}{6} \ \& \ \frac{5\pi}{6} \leq |\omega| \leq \pi$



- Επειδή $\min\{0.2, 0.1\} = 0.1 \Rightarrow \delta = -20\log 10^{-1} = 20dB$

- Η απαίτηση αυτή καλύπτεται από πολλούς τύπους παραθύρων (πχ ορθογώνιο & Hanning), αλλά προτιμούμε το $\boxed{\text{ορθογώνιο}}$ (1) λόγω του στενότερου κύριου λοβού του, που θα οδηγήσει σε μικρότερο μήκος φίλτρου (μικρότερο M).

- Στην περίπτωση μας έχουμε $\Delta\omega_1 = \Delta\omega_2 = \pi/3 \xrightarrow{\text{ορθογώνιο παράθυρο}} \frac{4\pi}{M+1} = \frac{\pi}{3} \rightarrow \boxed{M=11}$

Καθώς όμως μας ζητείται FIR φίλτρο τύπου I, χρειαζόμαστε $\boxed{M=12}$ (2) (ΑΡΤΙΟ)

(εφόσον το M=11 δίνει τύπου II με μηδενικό στο −1, δηλ στο π)

- Χρησιμοποιώντας τον τύπο (7.81) για πολυζωνικά φίλτρα και τις (1), (2) παίρνουμε

$\left(G_1=1,\ G_2=0,\ G_3=1,\ G_4=0,\ \omega_1 = \left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}\right)/2 = \frac{\pi}{3},\ \omega_2 = \left(\frac{\pi}{2}+\frac{5\pi}{6}\right)/2 = \frac{2\pi}{3},\ \omega_3 = \pi \right)$:

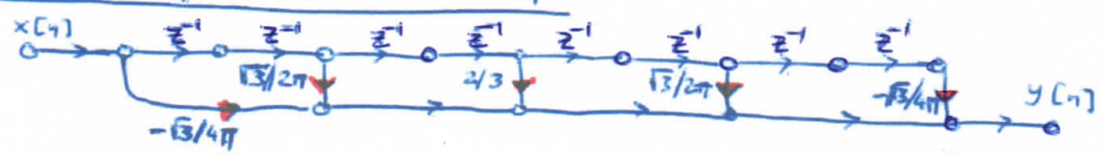
$$\boxed{h[n] = \frac{\sin\left[\frac{\pi}{3}(n-6)\right] - \sin\left[\frac{2\pi}{3}(n-6)\right] + \sin[\pi(n-6)]}{\pi(n-6)}, \quad 0 \leq n \leq 12 \quad \text{(ΜΗΔΕΝ ΑΛΛΟΥ)}}$$

- Μετά από πράξεις, βρίσκουμε τις 13 τιμές του $h[n]$:

$$H(z) = -\frac{\sqrt{3}}{4\pi} z^{-2} + \frac{\sqrt{3}}{2\pi} z^{-4} + \frac{2}{3} z^{-6} + \frac{\sqrt{3}}{2\pi} z^{-8} - \frac{\sqrt{3}}{4\pi} z^{-10} = z^{-2} H'(z), \text{ όπου}$$

$$\boxed{H'(z) = -\frac{\sqrt{3}}{4\pi} + \frac{\sqrt{3}}{2\pi} z^{-2} + \frac{2}{3} z^{-4} + \frac{\sqrt{3}}{2\pi} z^{-6} - \frac{\sqrt{3}}{4\pi} z^{-8}}$$

- ΥΛΟΠΟΙΗΣΗ ΣΕ ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΜΟΡΦΗ:



- ΥΛΟΠΟΙΗΣΗ ΕΚΜΕΤΑΛΛΕΥΟΜΕΝΟΙ ΤΗ ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ: