HW2 SOLS (11/1/17)

ΗΥ342 — **2016-17-ΧΕΙΜ**

ΑΣΚ. 1 (A)

$$DFT_{24}\{\delta[n]+\delta[n-6]+\delta[n-12]+\delta[n-18]\} = ?$$

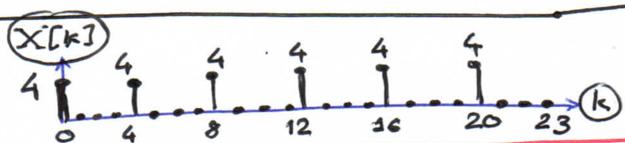
$$X[k] = \sum_{n=0}^{23} x[n] W_{24}^{kn} = W_{24} + W_{24}^{6k} + W_{24}^{12k} + W_{24}^{18k} = \frac{1-W_{24}^{24k}}{1-W_{24}^{6k}} =$$

$$= \frac{1-e^{-j\frac{2\pi}{24}24k}}{1-e^{-j\frac{2\pi}{24}6k}} = \frac{1-e^{-j2\pi k}}{1-e^{-j\frac{\pi k}{2}}}, \quad \text{για } 0 \le k \le 23 \qquad (1)$$

Ο αριθμητής της (1) είναι πάντα μηδέν, ο παρανομαστής επίσης μηδενίζεται για $k=4\lambda$ (πολλ/σιο του 4). Για τέτοια k, χρησιμοποιούμε τον κανόνα του de l'Hospital, και το αποτέλεσμα προκύπτει ίσο με 4.

Άρα:

$$\boxed{X[k] = \begin{cases} 4, & \text{για } k=0,4,8,12,16,20 \text{ (πολλ/σιο του 4)} \\ 0, & \text{για } k=1,2,3,5,6,7,9,10,11,13,14,15,17,18,19,21,22,23 \text{ (αλλού)} \end{cases}}$$



ΑΣΚ. 1 (B)

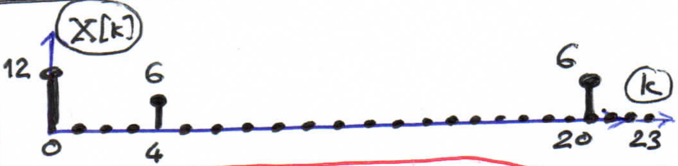
$$DFT_{24}\{\cos^2(\tfrac{\pi n}{6})\}$$

$$x[n] = \cos^2\left(\frac{\pi n}{6}\right) = \frac{1+\cos\left(2\cdot\frac{\pi n}{6}\right)}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi n}{3}\right) =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\left(e^{+j\frac{2\pi}{24}\cdot 4n} + e^{-j\frac{2\pi}{24}\cdot 4n}\right) \xRightarrow[\text{ΔΥΙΚΟΤΗΤΑΣ}]{\text{ΙΔΙΟΤΗΤΑ}}$$

$$\Rightarrow X[k] = \frac{1}{2}24\delta[k] + \frac{24}{4}\delta[k-4] + \frac{24}{4}\delta[\langle k+4\rangle_{24}]$$

$$\Rightarrow \boxed{X[k] = 12\delta[k] + 6\delta[k-4] + 6\delta[k-20]; \; 0\le k\le 23}$$



ΑΣΚ. 1 (C)

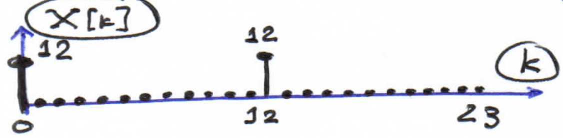
$$x[n] = \begin{cases} 1, & n \text{ ΑΡΤΙΟ} \\ 0, & n \text{ ΠΕΡΙΤΤΟ} \end{cases} \quad (0\le n\le 23) \Rightarrow DFT_{24}\{x[n]\} = ?$$

$$X[k] = \sum_{n=0}^{23} x[n] W_{24}^{kn} = \sum_{n'=0}^{11} W_{24}^{2kn'} = \frac{1-e^{-j\frac{2\pi}{24}24k}}{1-e^{-j\frac{2\pi}{24}2k}} = \frac{1-e^{-j2\pi k}}{1-e^{-j\frac{\pi k}{6}}}; \quad 0\le k\le 23 \qquad (1)$$

Ο αριθμητής της (1) μηδενίζεται για όλα τα k, ο παρανομαστής μόνο για $k=0,12$ (εκεί, με de l'Hospital παίρνουμε 12)

Άρα:

$$\boxed{X[k] = \begin{cases} 12, & k=0,12 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \quad (0\le k\le 23)}$$



ΑΣΚ. 1 (D)

$x[n] = \cos\frac{\pi n}{12} \; (24) \; \sin\frac{\pi n}{12} \; ; 0 \le n \le 23 \Longrightarrow DFT_{24}\{x[n]\} = ?$

- Έστω $x_1[n] = \cos\frac{\pi n}{12} \; ; 0 \le n \le 23$ και $x_2[n] = \sin\frac{\pi n}{12} \; ; \; 0 \le n \le 23$,

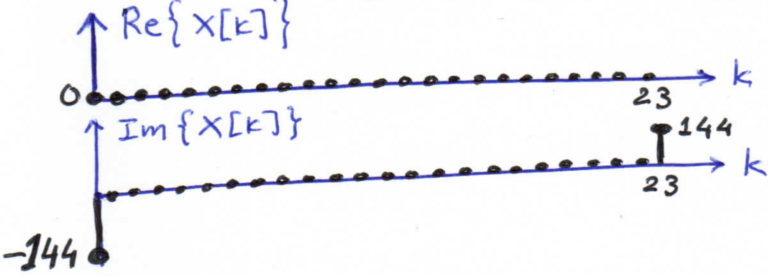
κατά συνέπεια, $x[n] = x_1[n] \; (24) \; x_2[n] \Longrightarrow X[k] = X_1[k]\, X_2[k]$. (1)

ΙΔΙΟΤΗΤΑ ΚΥΚΛΙΚΗΣ ΣΥΝΕΛΙΞΗΣ (για DFT's μήκους 24).

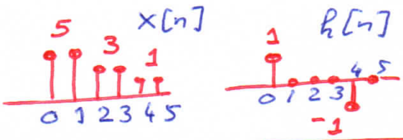
- $x_1[n] = \cos\frac{\pi n}{12} = \frac{1}{2}\left(e^{j\frac{2\pi}{24}\cdot 1n} + e^{-j\frac{2\pi}{24}1n}\right) \Rightarrow X_1[k] = 12\delta[k-1] + 12\delta[k-23]$ (2)

- $x_2[n] = \sin\frac{\pi n}{12} = \frac{1}{2j}\left(e^{j\frac{2\pi}{24}1n} - e^{-j\frac{2\pi}{24}1n}\right) \Longrightarrow X_2[k] = \frac{12}{j}\delta[k-1] - \frac{12}{j}\delta[k-23]$ (3)

- Από (1),(2),(3) $\Longrightarrow$ $\boxed{X[k] = -144j\,\delta[k-1] + 144j\,\delta[k-23]}$ $\boxed{0 \le k \le 23}$



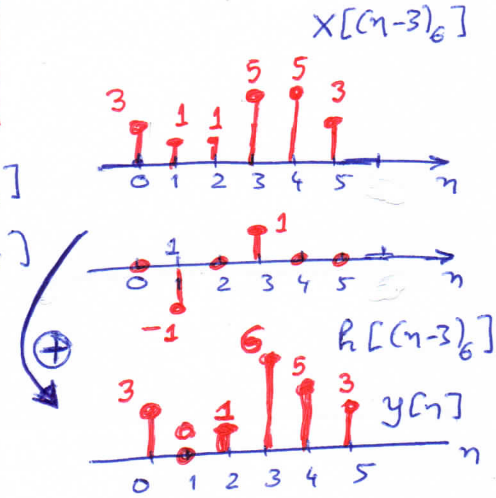
ΑΣΚ. (2)



(A) $y[n] = ?$, με $Y_6[k] = (-1)^k\{X_6[k] + H_6[k]\}$

$(-1)^k X_6[k] = e^{-j\frac{2\pi}{6}3k} X_6[k] \overset{DFT_6}{\longleftrightarrow} x[(n-3)_6]$

$(-1)^k H_6[k] = \cdots\cdots\cdots \overset{DFT_6}{\longleftrightarrow} h[(n-3)_6]$



Αθροίζοντας:

$$\boxed{y[n] = 3\delta[n] + \delta[n-2] + 6\delta[n-3] + 5\delta[n-4] + 3\delta[n-5]}$$

(B) $y[n]=?$, με $\underset{6}{Y}[k]=\underset{6}{X}[k]\,\underset{6}{H}[k]$, $0\leq k\leq 5$

- Από την ιδιότητα της κυκλικής συνέλιξης, $y[n]=x[n] \circledast_6 h[n]$ → κυκλική συνέλιξη με $N=6$

- Για να υπολογίσουμε το $y[n]$, μπορούμε να βρούμε τη γραφική συνέλιξη των $x[n]*h[n]$ (έστω $y'[n]$) και στη συνέχεια το $y[n]$ θα προκύψει με αναδίπλωση με $N=6$ της $y'[n]$.

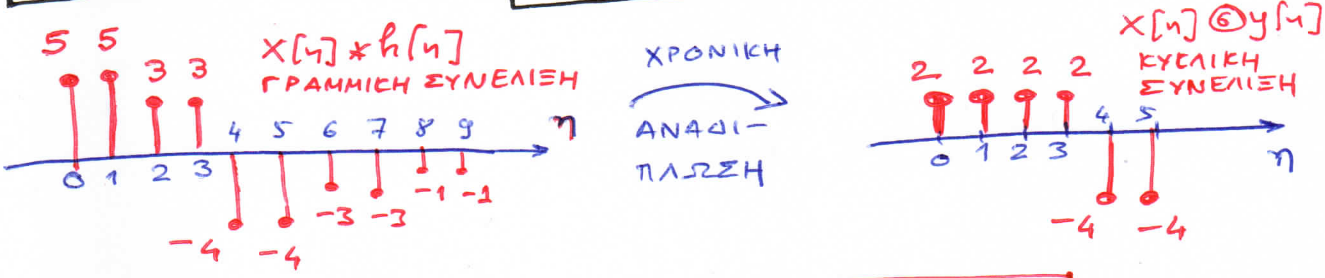
- Έχουμε: $y'[n]=x[n]*h[n] = x[n]*\delta[n] - x[n]*\delta[n-4] =$

$$= x[n]-x[n-4] = 5\delta[n]+5\delta[n-1]+3\delta[n-2]+3\delta[n-3]+\delta[n-4]+\delta[n-5]$$
$$-5\delta[n-4]-5\delta[n-5]-3\delta[n-6]-3\delta[n-7]-\delta[n-8]-\delta[n-9]$$

$$\Longrightarrow \boxed{x[n]*h[n] = 5\delta[n]+5\delta[n-1]+3\delta[n-2]+3\delta[n-3]-4\delta[n-4] -4\delta[n-5]-3\delta[n-6]-3\delta[n-7]-\delta[n-8]-\delta[n-9]}$$

- Στη συνέχεια, με χρονική αναδίπλωση:

$$\boxed{y[n]=x[n]\circledast_6 h[n] = 2\delta[n]+2\delta[n-1]+2\delta[n-2]+2\delta[n-3] -4\delta[n-4]-4\delta[n-5]}$$



(E) $y[n]=?$ με $Y(e^{j\omega})=X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$

- Από ιδιότητα DTFT:

$$y[n]=x[n]*h[n]$$ → ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΣΥΝΕΛΙΞΗ

- Η απάντηση έχει ήδη δοθεί στην 2(B) – βλέπε επίσης αριστερό σχήμα, πιό πάνω.

(C) $y[n]=?$, με $Y_6[k]=Re\{X_6[k]\}+j\,Im\{H_6[k]\}$, $0\le k\le 5$

- Από τις ιδιότητες συμμετρίας του DFT, έχουμε:

$$Re\{X_6[k]\} \xleftrightarrow{DFT_6} \frac{1}{2}\{x[n]+x^*[(-n)_6]\}$$

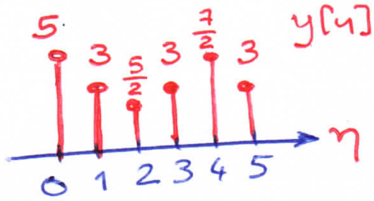
$$j\,Im\{H_6[k]\} \xleftrightarrow{DFT_6} \frac{1}{2}\{h[n]-h^*[(-n)_6]\}$$

- Λόγω πραγματικών $x[n]$, $h[n]$, κ αθροίζοντας τα παραπάνω, έχουμε:

$$\begin{aligned} y[n] &= \frac{1}{2}[x[n]+x[\langle -n\rangle_6]+h[n]-h[\langle -n\rangle_6]] = \\ &= \frac{1}{2}\{5\delta[n]+5\delta[n-1]+3\delta[n-2]+3\delta[n-3]+\delta[n-4]+\delta[n-5] \\ &\quad +5\delta[n]+\delta[n-1]+\delta[n-2]+3\delta[n-3]+3\delta[n-4]+5\delta[n-5] \\ &\quad +\delta[n]-\delta[n-4]-\delta[n]+\delta[n-2]\} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{y[n]=5\delta[n]+3\delta[n-1]+\frac{5}{2}\delta[n-2]+3\delta[n-3]+\frac{7}{2}\delta[n-4]+3\delta[n-5]}$$

- Σχήμα της $y[n]$:



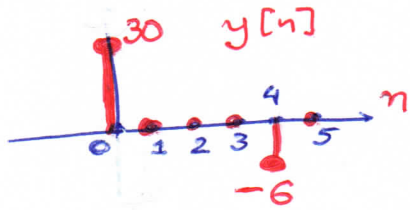
(D) $y[n]=?$, με $Y_6[k]=H_6[k] \circledast_6 X_6[k]$, $0\le k\le 5$

- Από τη δυϊκότητα ιδιότητας γινομένου / κυκλικής συνέλιξης, έχουμε:

$$y[n]=6\,x[n]\,h[n] \xleftrightarrow{DFT_6} X_6[k] \circledast_6 H_6[k]$$

- Συνεπώς:

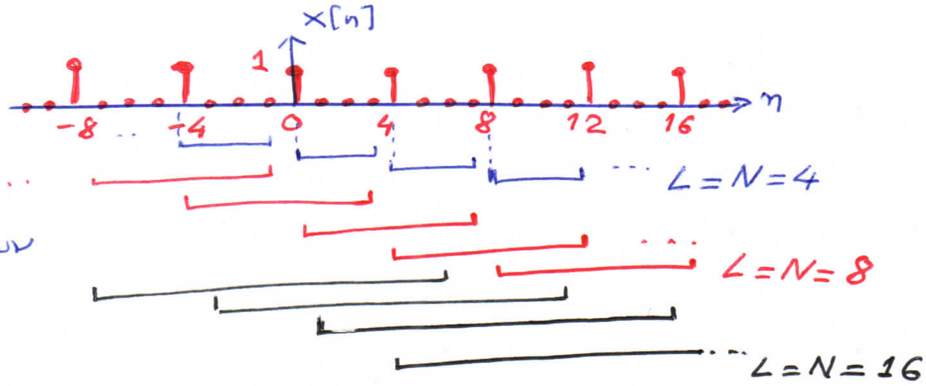
$$\boxed{y[n]=30\cdot\delta[n]-6\delta[n-4]}$$



ΑΣΚ. 3

$$x[n]=\sum_{l=-\infty}^{+\infty}\delta[n-4l] \Rightarrow X_r[k]=?$$

- Σχήμα του $x[n]$:



- Παραδείγματα κυλιόμενων παραθύρων ($R=4$, πάντα):

- Για κάθε επιλογή, έχουμε τους ίδιους υπολογισμούς για όλα τα παράθυρα (r):

$\boxed{L=N=4}$ $\rightsquigarrow \text{DFT}_4\{\delta[n]\}=1,\ k=0,1,2,3 \Rightarrow$ $\boxed{X_r[k]=1,\quad k=0,1,2,3,\quad -\infty<r<+\infty}$

$\boxed{L=N=8}$ $\rightsquigarrow \text{DFT}_8\{\delta[n]+\delta[n-4]\}=$

$$=1+e^{-j\frac{2\pi}{8}\cdot 4k}=1+e^{-j\pi k}=1+(-1)^k=\begin{cases}2, & k \text{ άρτιο}\\ 0, & k \text{ περιττό}\end{cases}\quad 0\le k\le 7$$

Άρα:
$$\boxed{X_r[k]=\begin{cases}2, & \text{για } k=0,2,4,6\\ 0, & \text{για } k=1,3,5,7\end{cases}\qquad -\infty<r<+\infty}$$

$\boxed{L=N=16}$ $\rightsquigarrow \text{DFT}_{16}\{\delta[n]+\delta[n-4]+\delta[n-8]+\delta[n-12]\}=$

$$=1+W_{16}^{4k}+W_{16}^{8k}+W_{16}^{12k}=\frac{1-W_{16}^{16k}}{1-W_{16}^{4k}}=\frac{1-e^{-j2\pi k}}{1-e^{-j\frac{\pi k}{2}}}=\begin{cases}4, & k \text{ πολλ/σιο του } 4\\ 0, & \text{αλλού}\end{cases}\quad 0\le k\le 15$$

Άρα:
$$\boxed{X_r[k]=\begin{cases}4, & \text{για } k=0,4,8,12\\ 0, & \text{για } k=1,2,3,5,6,7,9,10,11,13,14,15\end{cases}\qquad -\infty<r<+\infty}$$