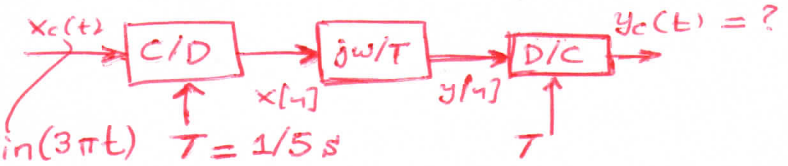
HW1 SOLS (22/11/16) | ΗΥ 342 | 2016-17 - ΧΕΙΜ

ΑΣΚ. 1



- $\Omega_{max} = 3\pi \Longrightarrow$ ΑΝΑΔΙΠΛΑΣΩΣΗ ΔΕΝ ΥΠΑΡΧΕΙ ΕΑΝ: $T < T_{max} = \frac{\pi}{3\pi}\ sec = \frac{1}{3}\ sec$
- Καθώς $T = 1/5 < 1/3 \Longrightarrow$ ΔΕΝ ΥΠΑΡΧΕΙ ΑΝΑΔΙΠΛΑΣΩΣΗ
- Λόγω του ότι το $j\Omega$ αντιστοιχεί σε διαφόριση (και δεν έχουμε αναδίπλωση), αναμένουμε: $y_c(t) = \frac{dx_c(t)}{dt} = 3\pi\cos(3\pi t)$
- Όντως, αναλυτικά:

$$x[n] = x_c(nT) \overset{T=1/5}{=} \sin\left(\frac{3\pi n}{5}\right) = \frac{1}{2j}\left(e^{j\frac{3\pi n}{5}} - e^{-j\frac{3\pi n}{5}}\right) \Longrightarrow$$

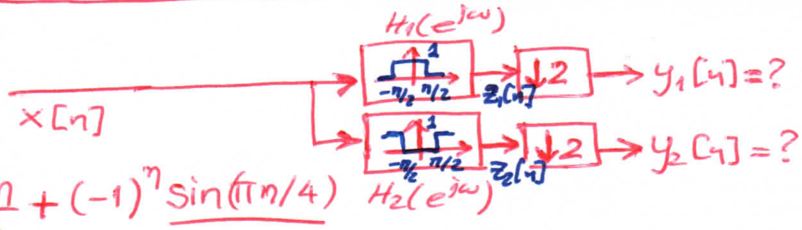
$$\Longrightarrow y[n] = \frac{1}{\cancel{2j}}\,\cancel{5j}\,\frac{3\pi}{\cancel{5}}\,e^{j\frac{3\pi n}{5}} - \frac{1}{\cancel{2j}}\,\cancel{5j}\left(-\frac{3\pi}{\cancel{5}}\right)e^{-j\frac{3\pi n}{5}}$$

έξοδοι σε εκθετικά σήματα

$$= \frac{3\pi}{2}\left(e^{\frac{3\pi n}{2}j} + e^{-\frac{3\pi n}{2}j}\right) = 3\pi\cos\left(\frac{3\pi n}{5}\right)$$

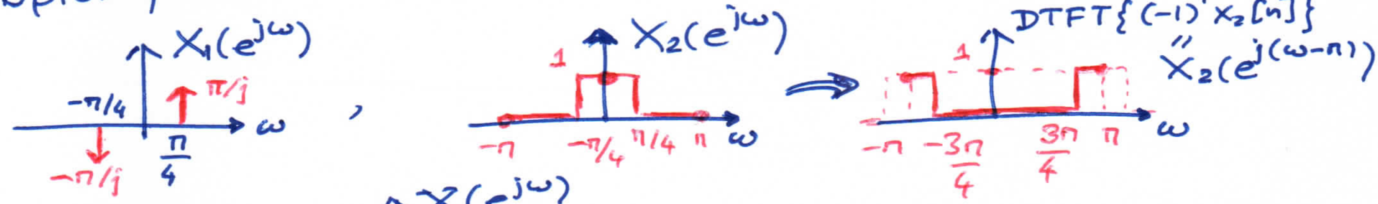
$$\Longrightarrow \boxed{y(t) = 3\pi\cos(3\pi t) = \frac{dx_c(t)}{dt}}$$

ΑΣΚ. 2

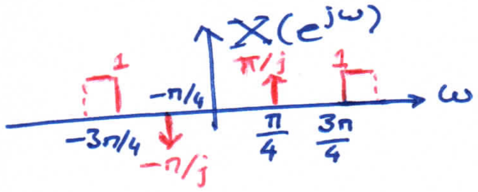


$$x[n] = \sin\frac{\pi n}{4} + (-1)^n \frac{\sin(\pi n/4)}{\pi n}$$

• Βρίσκουμε πρώτα τον DTFT του: $x[n] = x_1[n] + (-1)^n x_2[n]$

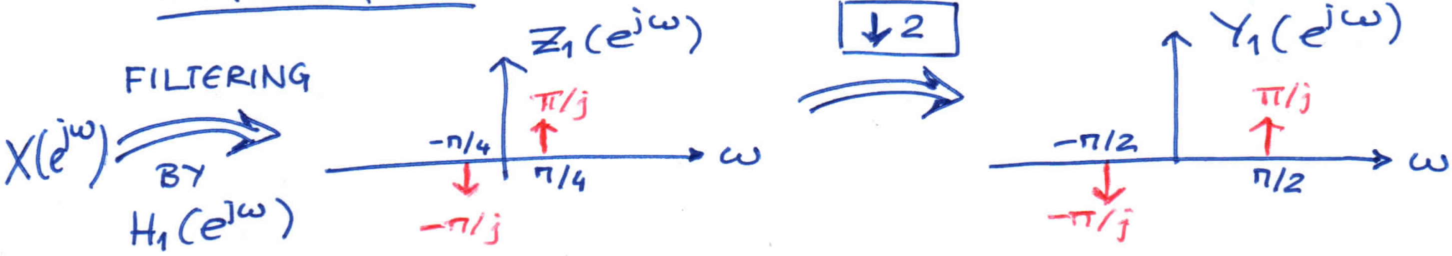


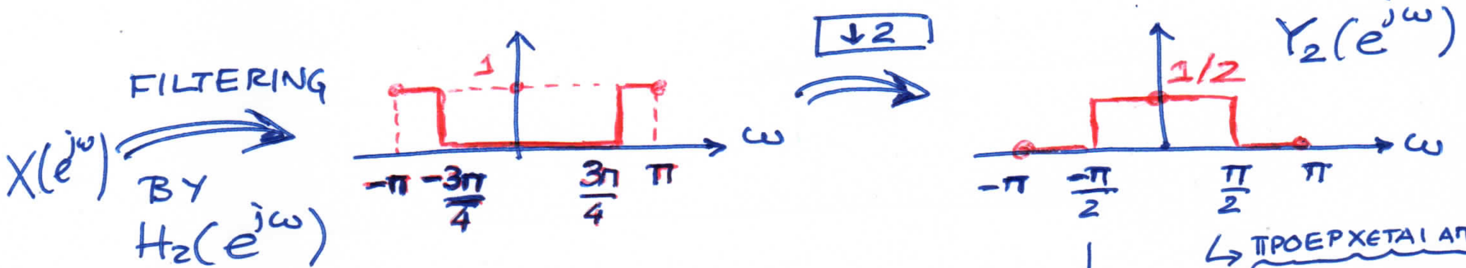
• Άρα:



• Στη συνέχεια:

$$Y_i(e^{j\omega}) = \frac{1}{2}\left[Z_i(e^{j\frac{\omega}{2}}) + Z_i(e^{j(\frac{\omega}{2}-\pi)})\right]$$





↳ ΠΡΟΕΡΧΕΤΑΙ ΑΠΟ:

$-\frac{3\pi}{4} + \pi = \frac{\pi}{4} (*2) = \frac{\pi}{2}$

SHIFT SCALING

$-\frac{5\pi}{4} + \pi = -\frac{\pi}{4} (*2) = -\frac{\pi}{2}$

• Άρα ($DTFT^{-1}\{\ \}$):

$$y_1[n] = \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)$$

$$y_2[n] = \frac{1}{2\pi n} \cdot \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)$$

ΑΣΚ. 3

$$x[n] \rightarrow \boxed{H_d(z)} \xrightarrow{y[n]} \boxed{H_c(z)} \rightarrow x'[n]$$

$H_d(z)$: ZEROS @ $\{-\frac{7}{9}, \pm 2\}$

POLES @ $\{0, \pm\frac{1}{3}j\}$

$(-1)^n \rightarrow (-1)^n$

$\Rightarrow$

(a) $H_d(z) = ?$

(b) IMPEMENTATION IN DIRECT FORM

(c) $H_c(z) = ?$
s.t. $|X'(e^{j\omega})| = X(e^{j\omega})$

(a) POLES, ZEROS $\Rightarrow$

$$H_d(z) = \frac{A\cdot(1-4z^{-2})(1+\frac{7}{9}z^{-1})}{(1+\frac{1}{9}z^{-2})} = -\frac{5}{3}\,\frac{(1-4z^{-2})(1+\frac{7}{9}z^{-1})}{(1+\frac{1}{9}z^{-2})} \quad (1)$$

$$(-1)^n \rightarrow \boxed{H_d(z)} \rightarrow (-1)^n \;\Rightarrow\; H_d(-1) = 1$$

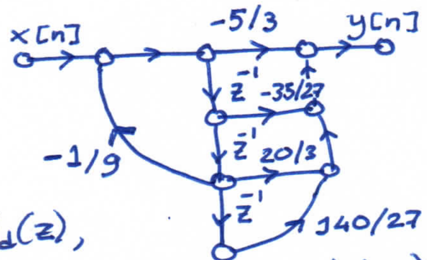
$$H_d(-1) = \frac{A(-3)(2/9)}{(10/9)} = -\frac{3A}{5}$$

$$\Rightarrow A = -\frac{5}{3}$$

• Μετά από πράξεις:

$$(1) \Rightarrow H_d(z) = \frac{-\frac{5}{3} - \frac{35}{27}z^{-1} + \frac{20}{3}z^{-2} + \frac{140}{27}z^{-3}}{1+\frac{1}{9}z^{-2}}$$

(b) Το διάγραμμα υλοποίησης σε κανονική μορφή:



(c) Η πρώτη σκέψη είναι να θέσουμε $H_c(z) = 1/H_d(z)$, αλλά αυτό δεν είναι ευσταθές (πόλοι στα ± 2, εκτός μοναδιαίου κύκλου). Αντί αυτού, αναλύουμε το $H_d(z)$ σε MIN.PHASE & ALL-PASS, και αντιστρέφουμε το πρώτο για να πάρουμε το $H_c(z)$.

$$(1) \Rightarrow H_d(z) = \underbrace{-\frac{5}{3}\,\frac{1+\frac{7}{9}z^{-1}}{1+\frac{1}{9}z^{-2}}\,(-4)(1-\frac{1}{4}z^{-2})}_{H_{d,min}(z)} \cdot \underbrace{\frac{(1-4z^{-2})}{1-\frac{1}{4}z^{-2}}\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)}_{H_{ALLPASS}(z),\ \text{με } |\cdot| = 1}$$

Άρα

$$H_c(z) = \frac{1}{H_{d,min}(z)} = \frac{20}{3}\cdot\frac{1+\frac{1}{9}z^{-2}}{(1+\frac{7}{9}z^{-1})(1-\frac{1}{4}z^{-2})} =$$

$$= \frac{20}{3}\,\frac{1+\frac{1}{9}z^{-2}}{1+\frac{7}{9}z^{-1}-\frac{1}{4}z^{-2}-\frac{7}{36}z^{-3}}$$

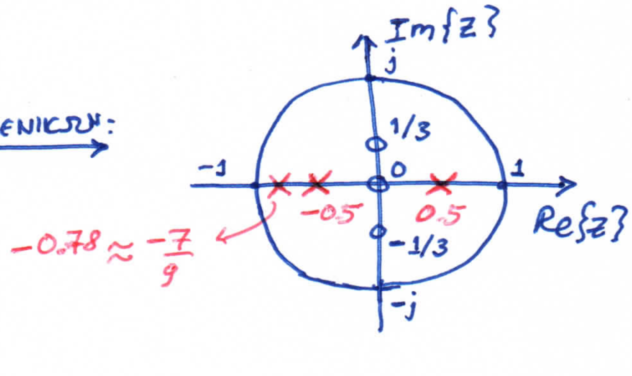
ΠΟΛΟΙ ΤΗΣ $H_c(z)$:

$\{\pm\frac{1}{2}, -\frac{7}{9}\}$

ΜΗΔΕΝΙΚΑ ΤΗΣ $H_c(z)$:

$\{0, \pm\frac{1}{3}j\}$

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΠΟΛΩΝ-ΜΗΔΕΝΙΚΩΝ: $\rightarrow$



ΑΣΚ. 4 H(z) FIR

- TYPE III, M=8
- $h[n] \in \mathbb{R}$
- ZERO @ $j\sqrt{2}$
- ZERO @ 2
- $H(e^{j\omega})\big|_{\omega=\pi/2} = -5/2 \cdot j$

$\Rightarrow H(z)=?$

POLES/ZEROS

IMPLEMENTATION

- TYPE III $\Rightarrow$ ZEROS @ ± 1
- LIN PHASE: z_0 ZERO $\Rightarrow$ $1/z_0$ ZERO
- $h[n]\in\mathbb{R}$: z_0 ZERO $\Rightarrow$ z_0^* ZERO
- ZERO'S @ $j\sqrt{2}$, 2

$\Rightarrow$ ZEROS @ $\pm j\sqrt{2}, \pm j\frac{1}{\sqrt{2}}, 2, \frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ no other zeros (M=8)

$$\Rightarrow H(z) = A(1-z^{-2})\left(1+\frac{z^{-2}}{2}\right)(1+2z^{-2})\left(1-\frac{z^{-1}}{2}\right)(1-2z^{-1})$$

$$= A\underbrace{\left(1+\frac{3}{2}z^{-2}-\frac{3}{2}z^{-4}-z^{-6}\right)}_{(1-z^{-2})(1+\frac{5}{2}z^{-2}+z^{-4})}\left(1-\frac{5}{2}z^{-1}+z^{-2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow H(z) = A\left(1-\frac{5}{2}z^{-1}+\frac{5}{2}z^{-2}-\frac{15}{4}z^{-3}+\frac{15}{4}z^{-5}-\frac{5}{2}z^{-6}+\frac{5}{2}z^{-7}-z^{-8}\right)$$

Επίσης:

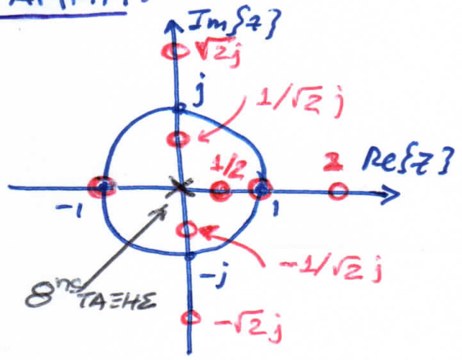
$$H(j) = A\left(\cancel{1}-\frac{5}{2j}-\cancel{\frac{5}{2}}+\frac{15}{4j}+\frac{15}{4j}+\cancel{\frac{5}{2}}-\frac{5}{2j}-\cancel{1}\right) = -A\frac{5}{2}j$$

$$H(j) = -\frac{5}{2}j$$

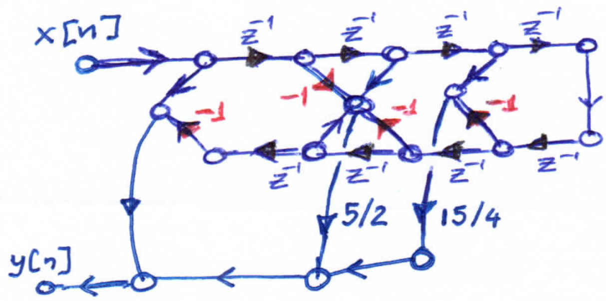
$\Rightarrow$ $A=1$

- POLES $\{0,0,0,0,0,0,0,0\}$
  ZEROS $\{\pm 1, \pm j\sqrt{2}, \pm j\frac{1}{\sqrt{2}}, 2, \frac{1}{2}\}$

- ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ:



- ΥΛΟΠΟΙΗΣΗ (με ελάχιστους πολ/στούς):



ΑΣΚ. 5

L.P. BUTTERWORTH
$N=3$, $\omega_c=2$
IMPULSE INVARIANCE

- Βρίσκουμε πρώτα τον τύπο του $H_c(s)$ για $N=3$ ως γενικό Ω_c.
- Οι ρίζες είναι $s_k = \Omega_c \exp\left(j\pi \frac{2k+4}{6}\right)$

  εκ των οποίων διαλέγουμε τις $-\Omega_c,\ \Omega_c e^{j\frac{2\pi}{3}},\ \Omega_c e^{j\frac{4\pi}{3}}$
- Άρα $$H_c(s) = \frac{\Omega_c^3}{(s+\Omega_c)(s^2+\underbrace{\Omega_c s}_{-2Re\{\Omega_c e^{-j\frac{2\pi}{3}}\}}+\Omega_c^2)} \quad (1)$$
- Από την επιλεγμένη μέθοδο σχεδίασης (IMPULSE INVARIANCE): $\Omega_c = \omega_c = 2$ [T=1] (2)
- Άρα: (1),(2) $\Rightarrow$ $$H_c(s) = \frac{8}{(s+2)(s^2+2s+4)} \quad (3)$$
- Αναλύουμε σε απλούστερους όρους για να βρούμε την $h_c(t)$:

(3) $\Rightarrow$ $$H_c(s) = \frac{2}{s+2} - \frac{2s}{s^2+2s+4} = \frac{2}{s+2} - \frac{2(s+1)}{(s+1)^2+(\sqrt{3})^2} + \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{3}}{(s+1)^2+(\sqrt{3})^2}$$

$$\xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}(\cdot)} h_c(t) = 2e^{-2t}u(t) - 2e^{-t}\cos(\sqrt{3}t)u(t) + \frac{2}{\sqrt{3}}e^{-t}\sin(\sqrt{3}t)u(t).$$

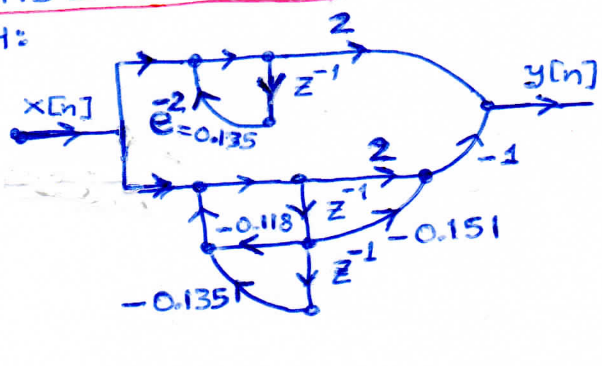
$$\xrightarrow[\text{INVARIANCE } (T=1)]{\text{IMPULSE}} h[n] = h_c(n) = 2e^{-2n}u[n] - 2e^{-n}\cos(\sqrt{3}n)u[n] + \frac{2}{\sqrt{3}}e^{-n}\sin(\sqrt{3}n)u[n]$$

$$\xrightarrow{Z(\cdot)} H(z) = \frac{2}{1-e^{-2}z^{-1}} - 2\cdot\frac{z^2-e^{-1}z\cos(\sqrt{3})}{(z^2-2e^{-1}z\cos\sqrt{3}+e^{-2})} + \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{e^{-1}z\sin(\sqrt{3})}{(\ \cdot\ )}$$

$$\Rightarrow H(z) = \frac{2}{1-e^{-2}z^{-1}} - \frac{2-e^{-1}\cdot(\cos\sqrt{3}+\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\sqrt{3})\cdot z^{-1}}{1-2e^{-1}\cos\sqrt{3}\, z^{-1}+e^{-2}z^{-2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{H(z) = \frac{2}{1-0.135\cdot z^{-1}} - \frac{2-0.151z^{-1}}{1+0.118z^{-1}+0.135z^{-2}}}$$

ΥΛΟΠΟΙΗΣΗ ΣΕ ΠΑΡΑΛΛΗΛΗ ΜΟΡΦΗ:



ΑΣΚ. 6

B.P. BUTTERWORTH

$N = 3$

$\omega_{c_1} = \frac{\pi}{4}, \quad \omega_{c_2} = \frac{3\pi}{4}$

BILINEAR TRANSFORM

- Από την ΑΣΚ. 6 έχουμε: $$H_c(s) = \frac{\Omega_c^3}{(s+\Omega_c)(s^2+\Omega_c s+\Omega_c^2)} \qquad (1)$$

- Διαλέγοντας $\theta_p = \frac{\pi}{2}$ για το L.P. φίλτρο (από το οποίο θα προκύψει το B.P.), λόγω του bilinear transform, παίρνουμε: $\Omega_c = 2\tan\left(\frac{\theta_p}{2}\right) = 2\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2$ (2)

- Από (1), (2) $\Rightarrow$ $$\boxed{H_c(s) = \frac{8}{(s+2)(s^2+2s+4)}} \qquad (3)$$

- BILINEAR TRANSFORM: $H_{LP}(Z) = H_c(s)\Big|_{s=2\frac{1-Z^{-1}}{1+Z^{-1}}} \overset{(3)}{\Longrightarrow} H_{LP}(Z) = \frac{1}{\left(\frac{1-Z^{-1}}{1+Z^{-1}}+1\right)\left[\left(\frac{1-Z^{-1}}{1+Z^{-1}}\right)^2+\frac{1-Z^{-1}}{1+Z^{-1}}+1\right]}$

$$\Longrightarrow \boxed{H_{LP}(Z) = \frac{(1+Z^{-1})^3}{2(3+Z^{-2})}} \qquad (4)$$

- Το LOW-PASS μπορεί να μετασχηματιστεί σε BAND-PASS με:

$$Z^{-1} = -\frac{z^{-2} - \frac{2ak}{k+1}z^{-1} + \frac{k-1}{k+1}}{\frac{k-1}{k+1}z^{-2} - \frac{2ak}{k+1}z^{-1} + 1}$$

όπου $a = \frac{\cos\left(\frac{\omega_{c1}+\omega_{c2}}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\omega_{c2}-\omega_{c1}}{2}\right)} = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)} = 0$

και: $k = \cot\left(\frac{\omega_{c2}-\omega_{c1}}{2}\right)\cdot\tan\left(\frac{\theta_p}{2}\right) = \cot\left(\frac{\pi}{4}\right)\cdot\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$

$$\boxed{Z^{-1} = -z^{-2}} \qquad (5)$$

- Άρα, από (4), (5) $\Rightarrow$ $$H_{BP}(z) = H_{LP}(Z)\Big|_{Z^{-1}=-z^{-2}} = \boxed{\frac{(1-z^{-2})^3}{2(3+z^{-4})}}$$

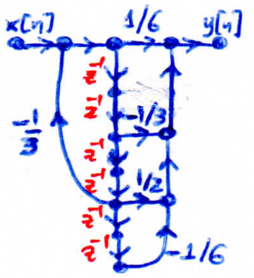
- Παρατηρούμε (για επιβεβαίωση):

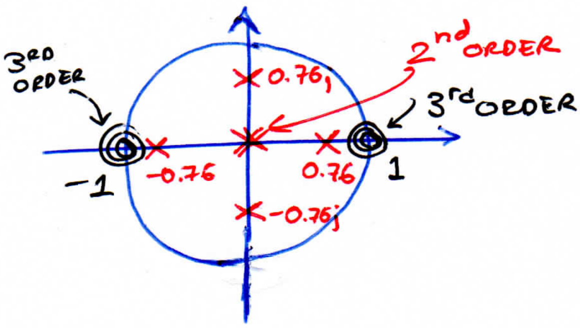
ω	z	$H(z)$
0	1	0
π	-1	0
$\frac{\pi}{2}$	j	$\frac{(1+1)^3}{2(3+1)} = \frac{8}{2.4} = 1$

- ΜΗΔΕΝΙΚΑ $\{\{\pm 1\} \times 3$ φορές$\}$
- ΠΟΛΟΙ: $\left\{\pm\left(\frac{1}{3}\right)^{1/4}, \pm\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{4}} j, 0, 0\right\}$

ΥΛΟΠΟΙΗΣΗ:

- $$H(z) = \frac{1-2z^{-2}+3z^{-4}-z^{-6}}{6+2z^{-4}} = \frac{\frac{1}{6}-\frac{1}{3}z^{-2}+\frac{1}{2}z^{-4}-\frac{1}{6}z^{-6}}{1+\frac{1}{3}z^{-4}}$$



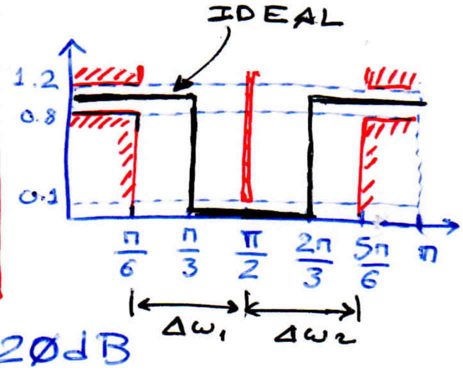


ΑΣΚ. 7

BANDSTOP FIR TYPE I

$$|H(e^{j\omega})| < 0.1, \quad \omega \approx \pi/2$$

$$0.8 < |H(e^{j\omega})| < 1.2, \quad |\omega| \leq \frac{\pi}{6} \ \& \ \frac{5\pi}{6} \leq |\omega| \leq \pi$$



- Επειδή $\min\{0.2, 0.1\} = 0.1 \Rightarrow \delta = -20 \log 10^{-1} = 20\,dB$

- Η απαίτηση αυτή καλύπτεται από πολλούς τύπους παραθύρων (πχ. ορθογώνιο & Hanning), αλλά προτιμούμε το $\boxed{\text{ορθογώνιο}}$ (1) λόγω του στενότερου κύριου λοβού του, που θα οδηγήσει σε μικρότερο μήκος φίλτρου (μικρότερο M).

- Στην περίπτωσή μας έχουμε $\Delta\omega_1 = \Delta\omega_2 = \pi/3 \xrightarrow{\text{ορθογώνιο παράθυρο}} \frac{4\pi}{M+1} = \frac{\pi}{3} \rightarrow \boxed{M = 11}$

  Καθώς όμως μας ζητείται FIR φίλτρο τύπου I, χρειαζόμαστε $\boxed{M = 12}$ (2) (ΑΡΤΙΟ)
  (εφόσον το M = 11 δίνει τύπου II με μηδενικό στο −1, δηλ. στο π)

- Χρησιμοποιώντας τον τύπο (7.81) για πολυζωνικά φίλτρα, και τις (1), (2) παίρνουμε:

  $\left(G_1 = 1,\ G_2 = 0,\ G_3 = 1,\ G_4 = 0,\ \omega_1 = \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}\right)/2 = \frac{\pi}{3},\ \omega_2 = \left(\frac{\pi}{2} + \frac{5\pi}{6}\right)/2 = \frac{2\pi}{3},\ \omega_3 = \pi \right)$:

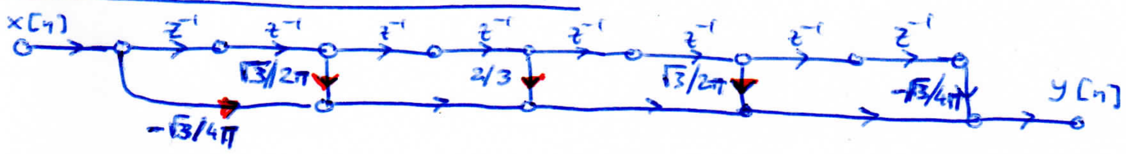
$$\boxed{h[n] = \frac{\sin\left[\frac{\pi}{3}(n-6)\right] - \sin\left[\frac{2\pi}{3}(n-6)\right] + \sin[\pi(n-6)]}{\pi(n-6)}, \quad 0 \leq n \leq 12 \quad \text{(ΜΗΔΕΝ ΑΛΛΟΥ)}}$$

- Μετά από πράξεις, βρίσκουμε τις 13 τιμές του $h[n]$:

$$H(z) = -\frac{\sqrt{3}}{4\pi} z^{-2} + \frac{\sqrt{3}}{2\pi} z^{-4} + \frac{2}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2\pi} z^{-8} - \frac{\sqrt{3}}{4\pi} z^{-10} = z^{-2} H'(z), \text{ όπου}$$

$$\boxed{H'(z) = -\frac{\sqrt{3}}{4\pi} + \frac{\sqrt{3}}{2\pi} z^{-2} + \frac{2}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2\pi} z^{-6} - \frac{\sqrt{3}}{4\pi} z^{-8}}$$

- ΥΛΟΠΟΙΗΣΗ ΣΕ ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΜΟΡΦΗ:



- ΥΛΟΠΟΙΗΣΗ ΕΚΜΕΤΑΛΛΕΥΟΜΕΝΟΙ ΤΗ ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ: