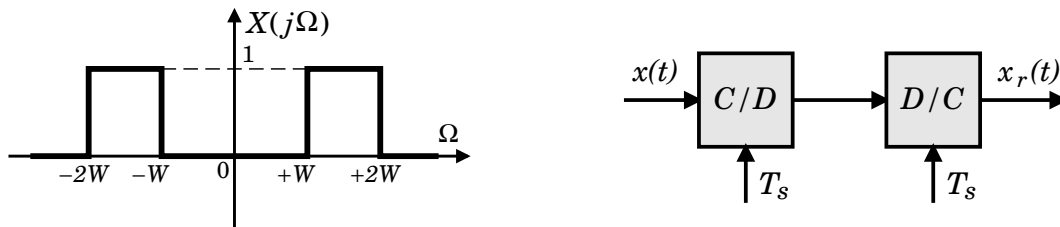


Οι ασκήσεις, γραπτές ή τυπωμένες, παραδίδονται στην έναρξη του μαθήματος της Τρίτης, 15/12, στις **14:15**. Επισημαίνεται ότι οι εργασίες είναι ατομικές. Προτείνεται να μην χρησιμοποιηθεί υπολογιστής (calculator) στην επίλυσή τους για καλύτερη εξάσκηση στις συνθήκες της προόδου και τελικής εξέτασης του μαθήματος.

Άσκηση 1: Έστω σήμα εισόδου $x(t)$ με φάσμα όπως στο παρακάτω σχήμα.

- (i) Βρείτε το σήμα $x(t)$.
- (ii) Ποια είναι η μέγιστη περίοδος δειγματοληψίας, $T_s^{(\max)}$, ώστε το σήμα να μην υποστεί αναδίπλωση κατά την ανακατασκευή του με χρήση κατωπερατού φίλτρου (κλασσικό σύστημα D/C);
- (iii) Ποιο θα είναι το σήμα εξόδου, $x_r(t)$, αν στο (ii) χρησιμοποιηθεί περίοδος $2T_s^{(\max)}$;
- (iv) Μπορείτε να σχεδιάσετε ένα σύστημα ανακατασκευής D/C (επιλέγοντας διαφορετικό φίλτρο από το κλασσικό κατωπερατό), ώστε το σήμα να εξακολουθεί να είναι ανακατασκευάσιμο (δηλ. χωρίς αναδίπλωση) με δειγματοληψία όπως στο (iii);

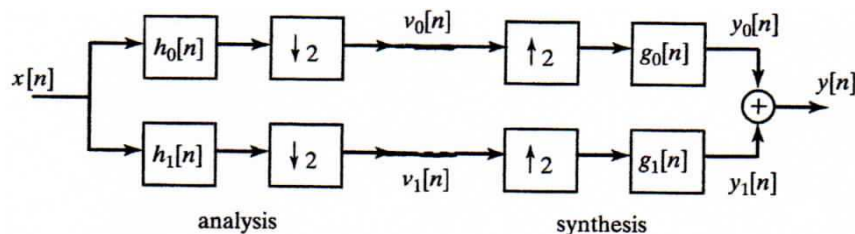


Άσκηση 2: Έστω η συστοιχία φίλτρων (filterbank) του παρακάτω σχήματος με:

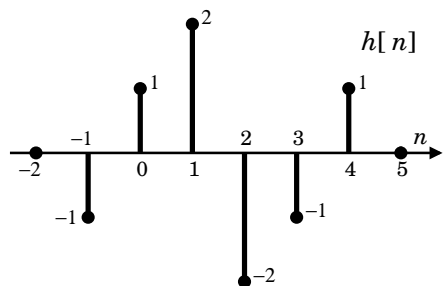
$$h_0[n] = \frac{1}{2}(\delta[n] + \delta[n-1]) , \quad h_1[n] = (-1)^n h_0[n] , \quad g_0[n] = 2 h_0[n] , \quad g_1[n] = -2 h_1[n] ,$$

που εφαρμόζεται για ανάλυση σήματος εισόδου $x[n]$, και στη συνέχεια για σύνθεση σήματος εξόδου $y[n]$. Απαντήστε αναλυτικά στα παρακάτω ερωτήματα, σχολιάζοντας σχετικά:

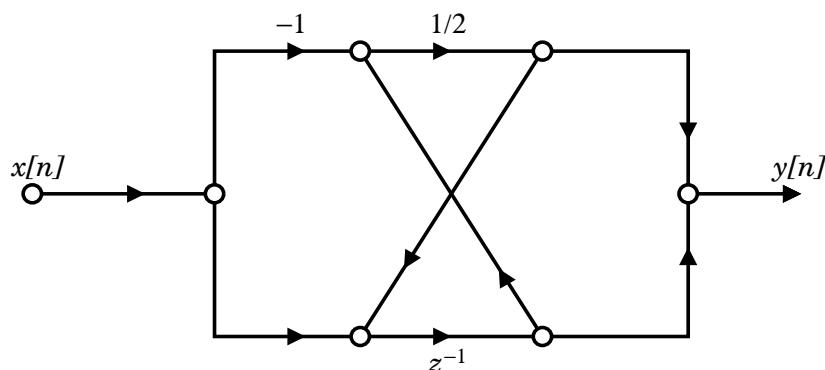
- (i) Ποια η σχέση μεταξύ των $y[n]$ και $x[n]$;
- (ii) Σχεδιάστε την υλοποίηση του συστήματος ανάλυσης / σύνθεσης σε πολυφασική μορφή.
- (ii) Σχεδιάστε τα σήματα ανάλυσης ($v_0[n]$ και $v_1[n]$) για σήμα εισόδου $x[n] = 1$, όπως και στην περίπτωση που το σήμα εισόδου είναι το $x[n] = (-1)^n$.



Άσκηση 3: Βρείτε την απόκριση συχνότητας και καθυστέρηση ομάδας (αναλυτικά) του γραμμικά χρονικά αναλλοίωτου συστήματος με κρουστική απόκριση που δίνεται στο παρακάτω σχήμα. Σχολιάστε για την καθυστέρηση ομάδας, σε σχέση με τη συμμετρία της κρουστικής απόκρισης.



Άσκηση 4: Στο παρακάτω σχήμα, δίνεται το διάγραμμα ενός γραμμικά χρονικά αναλλοίωτου συστήματος. Βρείτε την συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος, $H(z)$, και σχεδιάστε το σε κανονική μορφή I και II. Σχεδιάστε επίσης το μέτρο της απόκρισης συχνότητας του συστήματος, $|H(e^{j\omega})|$.

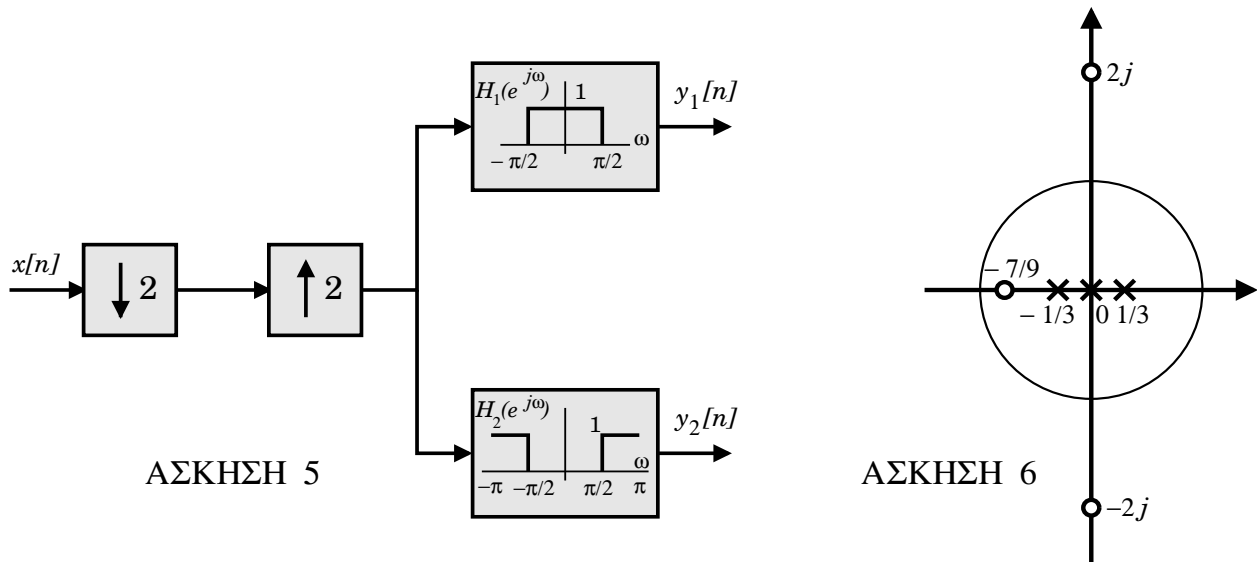


ΣΤΥΝΕΧΙΖΕΤΑΙ ΣΤΙΣ ΕΠΟΜΕΝΕΣ ΣΕΛΙΔΕΣ (ΑΣΚ. 5-10)

Άσκηση 5: Έστω στο κάτω αριστερά διάγραμμα η είσοδος είναι το σήμα

$$x[n] = (-1)^n \frac{\sin\left(\frac{\pi n}{4}\right)}{\frac{\pi n}{2}}.$$

Βρείτε τα σήματα εξόδου $y_1[n]$ και $y_2[n]$, τα οποία προκύπτουν στην έξοδο του ιδανικού κατωπερατού (lowpass) και ιδανικού υψιπερατού (highpass) φίλτρου αντίστοιχα (με συχνότητα αποκοπής και για τα δύο φίλτρα το $\pi/2$ και μοναδιαίο κέρδος στη ζώνη διάβασης). Εξηγήστε αναλυτικά.



Άσκηση 6: Έστω το αιτιατό Γ.Χ.Α. σύστημα με συνάρτηση μεταφοράς $H(z)$, το οποίο έχει διάγραμμα μηδενικών και πόλων που δίνεται στο παραπάνω σχήμα (δεξιά), και για το οποίο επίσης γνωρίζουμε ότι η έξοδός του σε είσοδο $x[n] = (-1)^n$ ισούται με το σήμα εισόδου.

- Βρείτε τη συνάρτηση μεταφοράς $H(z)$ του συστήματος.
- Σχεδιάστε υλοποιήσεις της συνάρτησης μεταφοράς *εν σειρά* (cascade), *εν παράλληλω* (parallel), και σε *κανονική μορφή II* (canonical form).
- Εκφράστε τη συνάρτηση μεταφοράς του ως το γινόμενο ενός συστήματος ελάχιστης φάσης (minimum phase), $H_{\min}(z)$, και ενός συστήματος πεπερασμένης κρουστικής απόκρισης, γραμμικής φάσης (F.I.R., linear phase), $H_{\text{lin}}(z)$, δηλαδή $H(z) = H_{\min}(z)H_{\text{lin}}(z)$, και σχεδιάστε τα διαγράμματα πόλων/μηδενικών τους.

Άσκηση 7: Βρείτε τη συνάρτηση μεταφοράς $H(z)$ ενός (πολύ απλού!) ζωνοπερατού (bandpass) φίλτρου Butterworth τάξης $N = 1$ με συχνότητες απόσβεσης στα 3 dB εκατέρωθεν της ζώνης διάβασης ίσες με $\omega_{c_1} = \pi/4$ και $\omega_{c_2} = 3\pi/4$. Για το σκοπό αυτό, σχεδιάστε πρώτα ένα αντίστοιχο κατωπερατό φίλτρο με κατάλληλα επιλεγμένη συχνότητα απόσβεσης στα 3 dB, έστω θ_p , χρησιμοποιώντας τη μέθοδο του διγραμμικού μετασχηματισμού (bilinear transform). Στη συνέχεια, χρησιμοποιείτε τον κατάλληλο μετασχηματισμό για την μετατροπή του φίλτρου αυτού στο ζητούμενο. Επιβεβαιώστε ότι το φίλτρο πετυχαίνει την επιθυμητή συμπεριφορά στις συχνότητες $\omega = 0, \pi/2, \pi$. Υπόδειξη: Επιλέξτε έξυπνα το θ_p για (πολύ!) εύκολες πράξεις.

Άσκηση 8: Βρείτε τη συνάρτηση μεταφοράς $H(z)$ ενός κατωπερατού (lowpass) φίλτρου Butterworth τάξης $N = 2$ και με συχνότητα απόσβεσης στα 3 dB ίση με $\omega_c = 1/\sqrt{2}$, χρησιμοποιώντας τη μέθοδο της αμετάβλητης κρουστικής απόκρισης (impulse invariance). Στη συνέχεια, σχεδιάστε ένα διάγραμμα υλοποίησής του. Σχολιάστε επίσης όσον αφορά την απόκριση συχνότητας του φίλτρου στα $\omega = 0, \pi$. Υπόδειξη: Για βοήθεια στις πράξεις, δίνονται τα: $1/e = 0.3679$, $e^{-1/2} \sin(0.5) = 0.2908$, και $2e^{-1/2} \cos(0.5) = 1.0646$.

Άσκηση 9: Ζητείται να σχεδιάσετε ένα ζωνοπερατό φίλτρο με κρουστική απόκριση πεπερασμένου μήκους και γραμμική φάση τύπου I (FIR Type I bandpass filter), χρησιμοποιώντας τη μέθοδο της παραθύρωσης. Η επιθυμητή απόκριση συχνότητας του φίλτρου πρέπει να ικανοποιεί τις συνθήκες

$$0.8 < |H(e^{j\omega})| < 1.2, \quad \text{για } \pi/2 \leq |\omega| \leq \pi/2$$

και

$$|H(e^{j\omega})| < 0.1, \quad \text{για } 0 \leq |\omega| \leq \pi/6 \quad \text{και} \quad 5\pi/6 \leq |\omega| \leq \pi$$

(ουσιαστικά δηλαδή μας ενδιαφέρει να «περνάει» το σήμα στο $\pi/2$, οπότε θεωρείστε την πρώτη συνθήκη ως οριζόμενη σε ένα απειροελάχιστο διάστημα γύρω από το $\pi/2$). Διαλέξτε ένα κατάλληλο παράθυρο για τον σκοπό αυτό (καθορίζοντας το είδος και το μήκος του, προτιμώντας παράθυρο που οδηγεί σε μικρότερο μήκος φίλτρου). Στη συνέχεια υπολογίστε τη συνάρτηση μεταφοράς του. Τέλος, σχεδιάστε το διάγραμμα υλοποίησής του σε κανονική μορφή, όπως και ένα διάγραμμα πιο αποτελεσματικής υλοποίησής του, λαμβάνοντας υπόψη τη συμμετρία του.

Άσκηση 10: Σχεδιάστε ένα FIR φίλτρο γραμμικής φάσης τύπου II με κρουστική απόκριση μήκους 8 (δηλ. $M = 7$) το οποίο θα χρησιμοποιηθεί (όχι πολύ επιτυχώς!) για αύξηση του ρυθμού δειγματοληψίας του σήματος εισόδου κατά 4 φορές. Χρησιμοποιείτε για το σκοπό αυτό τη μέθοδο της παραθύρωσης με ορθογώνιο παράθυρο. Στη συνέχεια, σχεδιάστε το διάγραμμα υλοποίησης του συνολικού interpolator (δηλ. του φίλτρου μαζί με τον rate expander) σε πολυφασική μορφή. Υπόδειξη: Βρείτε τη πολυφασική αποσύνθεση (polyphase decomposition) του φίλτρου και ακολουθήστε τη διαδικασία της Ενότητας 4.7.5 του βιβλίου.