23-9-2012 **Λύσεις Επαναληπτικής Εξέτασης 7-9-2012**

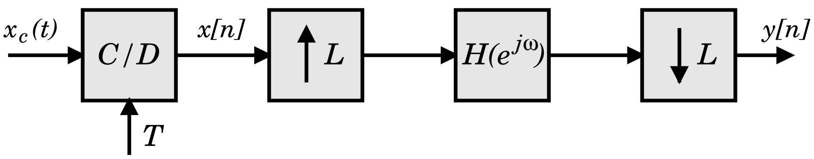
Θέμα 1: (14%) Στο σύστημα του παρακάτω σχήματος, έχουμε:

$$X_c(j\,\Omega) = 0\ , \quad \text{για} \quad |\Omega| \geq \pi/T\ \ ,$$

και

$$H(e^{j\,\omega})\ =\ \begin{cases} e^{-2\,j\,\omega}\ , & |\omega| \leq \pi/L \\ 0\ , & \pi/L < |\omega| \leq \pi \end{cases}\ .$$

Εκφράστε το $y[n]$ ως συνάρτηση του $x_c(t)$.



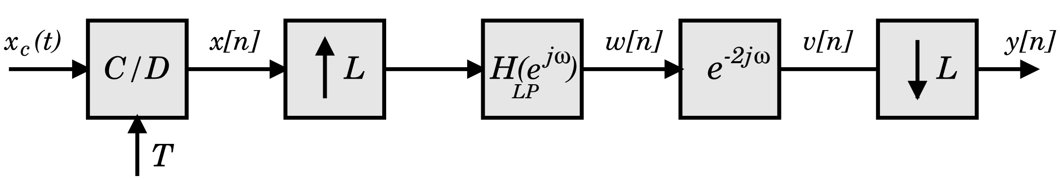
Λύση: 'Σπάμε' το τρίτο υποσύστημα στην ακολουθία του ιδανικού φίλτρου $H_{LP}(e^{j\,\omega})$ (κατωπερατού) και ενός καθυστερητή $e^{-2\,j\,\omega}$, δηλ. $H(e^{j\,\omega})\ =\ H_{LP}(e^{j\,\omega})\,e^{-2\,j\,\omega}$, όπου:

$$H_{LP}(e^{j\,\omega})\ =\ \begin{cases} 1\ , & |\omega| \leq \pi/L \\ 0\ , & \pi/L < |\omega| \leq \pi \end{cases}\ ,$$

όπως φαίνεται στο σχήμα. Για διευκόλυνση, συμβολίζουμε με $w[n]$ και $v[n]$ τις εξόδους του τρίτου και τέταρτου υποσυστήματος του σχήματος, και παρατηρούμε ότι ο συνδυασμός του δεύτερου και τρίτου υποσυστήματος αποτελούν έναν upsampler, χωρίς ωστόσο το κατάλληλο κέρδος L στο τρίτο υποσύστημα. Επίσης παρατηρούμε πώς λόγω του ζωνοπεριορισμού του σήματος εισόδου δεν υπάρχει φαινόμενο αναδίπλωσης κατά την δειγματοληψία του $x_c(t)$, και κατά συνέπεια ισχύει η δεύτερη εξίσωση από τις παρακάτω.
Έχουμε λοιπόν:

$$\begin{aligned} x[n] &= x_c(nT)\ , \\ w[n] &= \frac{1}{L}\,x_c(n\,\frac{T}{L})\ , \\ v[n] &= w[n-2]\ =\ \frac{1}{L}\,x_c(n\,\frac{T}{L} - 2\,\frac{T}{L})\ , \\ y[n] &= v[nL]\ =\ \frac{1}{L}\,x_c(n\,T - 2\,\frac{T}{L})\ . \end{aligned}$$

Η τελευταία εξίσωση είναι η ζητούμενη σχέση.



Θέμα 2: (18%) Σχεδιάστε ένα κατωπερατό (lowpass) φίλτρο Butterworth τάξης 1 με συχνότητα στην απόσβεση 3 dB ίση με $\omega_c = 0.4\,\pi$. Χρησιμοποιείστε τον δι-γραμμικό μετασχηματισμό, όπως επίσης και την μέθοδο αμετάβλητης κρουστικής απόκρισης. Βρείτε τις $H(z)$ σε κάθε περίπτωση. [Στην πρώτη περίπτωση κρατήστε την απαραίτητη εφαπτομένη ως μία σταθερά, δηλ. χωρίς να υπολογίσετε την τιμή της.]

Λύση: Με βάση τον τύπο των αναλογικών φίλτρων Butterworth (lowpass), καθόσον το φίλτρο είναι τάξης 1, έχουμε:

$$H(s) = \frac{\Omega_c}{s \,+\, \Omega_c}\;,$$

όπου στη συχνότητα Ω_c το φίλτρο έχει απόσβεση 3 dB.
Καθόσον το φίλτρο είναι κατωπερατό, η μέθοδος της αμετάβλητης κρουστικής απόκρισης μπορεί να χρησιμοποιηθεί. Παίρνοντας $T = 1$, έχουμε $\Omega_c = \omega_c = 0.4\,\pi$, κατά συνέπεια, εφαρμόζοντας τον τύπο από το τυπολόγιο, έχουμε:

$$H(s) = \frac{0.4\,\pi}{s \,+\, 0.4\,\pi} \;\;\Rightarrow\;\; H(z) = \frac{0.4\,\pi}{1 \,-\, e^{-0.4\,\pi}\, z^{-1}}\;\;.$$

Εναλλακτικά, το φίλτρο μπορεί να σχεδιαστεί με την μέθοδο του δι-γραμμικού μετασχηματισμού. Έχουμε τότε:

$$\Omega_c = 2\,\tan(0.2\,\pi)\;\;, \quad s \;=\; 2\;\frac{1 \,-\, z^{-1}}{1 \,+\, z^{-1}}\;\;,$$

οπότε, αντικαθιστώντας στην εξίσωση του αναλογικού φίλτρου, παίρνουμε:

$$H(z) \;=\; \frac{2\,\tan(0.2\,\pi)}{2\,\dfrac{1 \,-\, z^{-1}}{1 \,+\, z^{-1}} \,+\, 2\,\tan(0.2\,\pi)} \;=\; \frac{\tan(0.2\,\pi) \,+\, \tan(0.2\,\pi)\, z^{-1}}{(\,1 \,+\, \tan(0.2\,\pi)\,) \,+\, (\,\tan(0.2\,\pi) \,-\, 1\,)\, z^{-1}}\;\;.$$

Θέμα 3(a): (11%) Υπολογίστε τον DFT του παρακάτω σήματος, όπου το N είναι άρτιος:

$$x[n] \;=\; \begin{cases} 1\,, & n \text{ άρτιος}\,, \quad 0 \le n \le N-1 \\ 0\,, & n \text{ περιττός}\,,\; 0 \le n \le N-1 \end{cases}$$

Λύση: Έχουμε:

$$X[k] \;=\; \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, W_N^{k\,n} \;=\; \sum_{n=0}^{(N/2)-1} W_N^{2\,k\,n} \;=\; \frac{1 \;-\; e^{-j\,2\,\pi\,k}}{1 \;-\; e^{-j\,4\,\pi\,k/N}} \;\;,$$

για $0 \le k \le N-1$. Παρατηρούμε ότι για όλα τα $k \ne 0\,,\, N/2$ στο παραπάνω διάστημα μόνο ο αριθμητής είναι μηδενικός, άρα για αυτές τις τιμές ο ζητούμενος μετασχηματισμός είναι μηδέν. Όμως, για $k = 0\,,\, N/2$ και ο αριθμητής και ο παρανομαστής γίνονται μηδέν. Για να βρούμε το ζητούμενο στις τιμές αυτές χρησιμοποιούμε τον κανόνα του De L' Hospital, και παίρνουμε ως απάντηση την τιμή $2\,\pi/(4\,\pi/N) \;=\; N/2$. Συνοψίζοντας λοιπόν, έχουμε:

$$X[k] \;=\; \begin{cases} N/2\,, & k \;=\; 0\,,\, N/2 \\ 0\,, & k \;=\; 1\,,...,\,(N/2)-1\,,\,(N/2)+1\,,...,\,N-1 \;\;. \end{cases}$$

Θέμα 3(b): (11%) Έστω το σήμα $x[n]$, $n = 0\,,...,N-1$, και $X[k]$ ο DFT N σημείων του σήματος. Αν το σήμα ικανοποιεί την σχέση $x[m] = -\,x[m+N/2]$ για $m = 0\,,...,(N/2)-1$, και το N είναι άρτιος αριθμός, βρείτε την τιμή του μετασχηματισμού στα άρτια σημεία, δηλαδή τις τιμές $X[2\,m]$, για $m = 0\,,...,(N/2)-1$.

Λύση: Από τον ορισμό του διακριτού μετασχηματισμού Fourier, και θέτοντας $K = N/2$, που είναι ακέραιος (λόγω αρτιότητας του N):

$$\begin{aligned} X[\,2\,m\,] \;&=\; \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{-j\,\frac{2\,\pi\,n\,2\,m}{N}} \;=\; \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{-j\,\frac{\pi}{K}\,2\,n\,m} \\ &=\; \sum_{n=0}^{K-1} \left(\, x[n]\, e^{-j\,\frac{\pi}{K}\,2\,n\,m} \;+\; x[K+\,n]\, e^{-j\,\frac{\pi}{K}\,2\,(n+K)\,m} \,\right) \\ &=\; \sum_{n=0}^{K-1} \left(\, x[n]\, e^{-j\,\frac{\pi}{K}\,2\,n\,m} \;-\; x[n]\, e^{-j\,\frac{\pi}{K}\,2\,n\,m}\, e^{-j\,2\,\pi\,m} \,\right) \\ &=\; \sum_{n=0}^{K-1} \left(\, x[n]\, e^{-j\,\frac{\pi}{K}\,2\,n\,m} \;-\; x[n]\, e^{-j\,\frac{\pi}{K}\,2\,n\,m} \,\right) \;=\; K.0 \;=\; 0\,, \end{aligned}$$

όπου κάναμε χρήση του δεδομένου $x[n] \;=\; -\,x[n+N/2] \;=\; -\,x[n+K]$.

Θέμα 4(a): (11%) Έχουμε ένα σύστημα με πεπερασμένη κρουστική απόκριση (FIR) και γενικευμένη γραμμική φάση. Η κρουστική του απόκριση έχει πραγματικές τιμές, και ισχύει $h[n] = 0$ για $n < 0$ και $n \geq 8$, όπως και $h[n] = -h[7-n]$. Επίσης μας δίνονται δύο από τα μηδενικά του συστήματος, ότι βρίσκονται στις θέσεις $z = 0.8\,\exp(j\,\pi/4)$ και $z = -2$. Πόσα συνολικά μηδενικά έχει το σύστημα, τι τύπου είναι, και ποια είναι η συνάρτηση μεταφοράς του, $H(z)$;

Λύση: Καθώς η κρουστική απόκριση του φίλτρου έχει μήκος 8, συμπεραίνουμε ότι έχει 7 μηδενικά. Συμπεραίνουμε επίσης ότι είναι φίλτρο FIR γενικευμένης γραμμικής φάσης τύπου IV, διότι έχει άρτιο μήκος κρουστικής απόκρισης, περιττή συμμετρία, και πραγματικούς συντελεστές. Κατά συνέπεια τα μηδενικά του θα παρουσιάζονται κατά συζυγή αντίστροφα συμμετρικά ζευγάρια (conjugate reciprocal pairs). Συνεπώς, το μηδενικό $z = -2$ συνεπάγεται μηδενικό στη θέση $z = -1/2$. Παρόμοια, το μηδενικό $z = 0.8\,\exp(j\,\pi/4)$ συνεπάγεται μηδενικά στις θέσεις $z = 0.8\,\exp(-j\,\pi/4)$, $z = 1.25\,\exp(j\,\pi/4)$, και $z = 1.25\,\exp(-j\,\pi/4)$. Τέλος, καθόσον το φίλτρο είναι τύπου IV, συνεπάγεται μηδενικό στη θέση $z = 1$. Με τα παραπάνω συμπληρώνουμε τα απαιτούμενα 7 μηδενικά στις θέσεις $\{-2, -0.5, 1, 0.8\,e^{\pm j\,\pi/4}, 1.25\,e^{\pm j\,\pi/4}\}$, και κατά συνέπεια παίρνουμε ως συνάρτηση μεταφοράς την:

$$\begin{aligned} H(z) \;=\; & (1 + 2\,z^{-1})\,(1 + 0.5\,z^{-1})\,(1 - 0.8\,e^{j\,\pi/4}\,z^{-1})\,(1 - 0.8\,e^{-j\,\pi/4}\,z^{-1}) \\ & \times\,(1 - 1.25\,e^{j\,\pi/4}\,z^{-1})\,(1 - 1.25\,e^{-j\,\pi/4}\,z^{-1})\,(1 - z^{-1})\ . \end{aligned}$$

Θέμα 4(b): (11%) Έστω το Γ.Χ.Α. σύστημα $H(z)$, στο οποίο όταν εφαρμοστεί η είσοδος

$$x[n] \;=\; 5\,\frac{\sin(0.4\,\pi\,n)}{\pi\,n} \;+\; 10\,\cos(0.5\,\pi\,n)\ ,$$

η έξοδός του είναι

$$y[n] \;=\; 10\,\frac{\sin[\,0.3\,\pi\,(n-10)\,]}{\pi\,(n-10)}\ .$$

Υπολογίστε μία απόκριση συχνότητας $H(e^{j\omega})$ και την αντίστοιχη κρουστική απόκριση $h[n]$, συμβατά με την παραπάνω πληροφορία.

Λύση: Δουλεύουμε στο πεδίο της συχνότητας, υπολογίζοντας τους διακριτούς μετασχηματισμούς Fourier (DTFT) των σημάτων εισόδου και εξόδου του συστήματος.
Από το τυπολόγιο βλέπουμε πως το σήμα εισόδου έχει συχνοτικό περιεχόμενο $X(e^{j\omega})$ στα $\pm\,0.5\,\pi$ (με μορφή κρουστικών, λόγω του συνημιτόνου), όπως επίσης και συχνοτικό περιεχόμενο στο διάστημα $[-0.4\,\pi\,,\ 0.4\,\pi]$ σε μορφή παλμού με πλάτος 5 (λόγω της συνάρτησης sync).
Εύκολα επίσης βλέπουμε από το τυπολόγιο (μετασχηματισμός συνάρτησης sync και ιδιότητα χρονικής μετατόπισης) ότι το σήμα εξόδου έχει συχνοτικό περιεχόμενο $Y(e^{j\omega})$ στο διάστημα $[-0.3\,\pi\,,\ 0.3\,\pi]$ σε μορφή παλμού πολλαπλασιασμένου με $10\,e^{-j\,10\,\omega}$.
Κατά συνέπεια, η μοναδική λύση για την $H(e^{j\omega})$ που είναι συμβατή με την παραπάνω πληροφορία είναι ένας παλμός στο διάστημα $[-0.3\,\pi\,,\ 0.3\,\pi]$ πολλαπλασιασμένος με $(10\,e^{-j\,10\,\omega})/5 = 2\,e^{-j\,10\,\omega}$. Η κρουστική απόκριση του Γ.Χ.Α. συστήματος δίνεται από τον IDTFT του παραπάνω, και είναι η:

$$h[n] \;=\; 2\,\frac{\sin[\,0.3\,\pi\,(n-10)\,]}{\pi\,(n-10)}\ .$$

Θέμα 5: (24%) Δίνεται το αιτιατό, γραμμικό, χρονικά αναλλοίωτο σύστημα:

$$H(z) \;=\; \frac{(\,1\;-\;(1/3)\,z^{-1}\,)\,(\,1\;+\;9\,z^{-2}\,)}{(\,1\;+\;0.49\,z^{-2}\,)} \quad .$$

(a) (9%) Σχεδιάστε το διάγραμμα υλοποίησής του σε κανονική μορφή (direct form) I και II, όπως και ένα διάγραμμα υλοποίησής του σε σειρά (cascade).

(b) (5%) Σχεδιάστε το διάγραμμα μηδενικών και πόλων του.

(c) (5%) Εκφράστε τη συνάρτηση μεταφοράς ως γινόμενο συστήματος ελάχιστης φάσης (minimum phase), $H_1(z)$, και ολοπερατού (all pass), $H_{ap}(z)$, δηλαδή $H(z) \;=\; H_1(z)\,H_{ap}(z)$, και σχεδιάστε τα διαγράμματα πόλων/μηδενικών τους.

(d) (5%) Εκφράστε τη συνάρτηση μεταφοράς ως γινόμενο ενός άλλου συστήματος ελάχιστης φάσης (minimum phase), $H_2(z)$, και ενός συστήματος πεπερασμένης κρουστικής απόκρισης, γραμμικής φάσης (F.I.R., linear phase), $H_{lin}(z)$, δηλαδή $H(z) \;=\; H_2(z)\,H_{lin}(z)$, και σχεδιάστε τα διαγράμματα πόλων/μηδενικών τους.

Λύση:

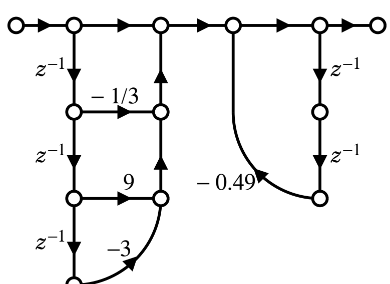
(a) Για την υλοποίηση σε κανονική μορφή κάνουμε πράξεις και παίρνουμε:

$$H(z) \;=\; \frac{(\,1\;-\;(1/3)\,z^{-1}\,)\,(\,1\;+\;9\,z^{-2}\,)}{(\,1\;+\;0.49\,z^{-2}\,)} \;=\; \frac{1\;-\;(1/3)\,z^{-1}\;+\;9\,z^{-2}\;-\;3\,z^{-3}}{1\;+\;0.49\,z^{-2}} \quad ,$$

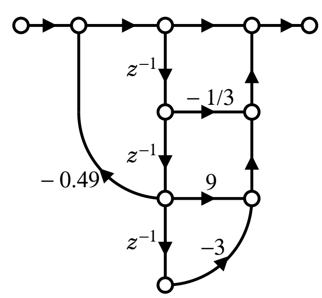
από το οποίο εύκολα λαμβάνουμε τα διαγράμματα κανονικής μορφής, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Παρατηρούμε ότι κλάδοι με μηδενικούς συντελεστές έχουν παραληφθεί. Για την υλοποίηση σε σειρά, παρατηρούμε ότι υπάρχουν πολλές δυνατότητες. Στο παρακάτω σχήμα, διαλέγουμε μία υλοποίηση δύο υποσυστημάτων σε σειρά, όπως στην

$$H(z) \;=\; \left(\frac{1\;-\;(1/3)\,z^{-1}}{1\;+\;0.49\,z^{-2}}\right)\,(\,1\;+\;9\,z^{-2}\,) \quad ,$$

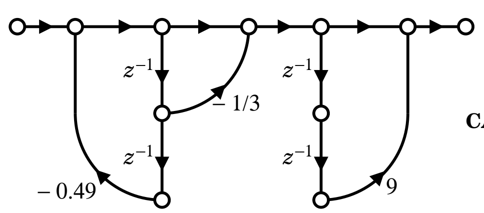
όπου το πρώτο έχει υλοποιηθεί σε κανονική μορφή II, ενώ το δεύτερο είναι φίλτρο FIR.



DIRECT FORM I



DIRECT FORM II



CASCADE FORM

(b) Από την εκφώνηση, παραγοντοποιούμε ως

$$H(z) \;=\; \frac{(\,1 \,-\, (1/3)\,z^{-1}\,)\,(\,1 \,+\, 9\,z^{-2}\,)}{(\,1 \,+\, 0.49\,z^{-2}\,)} \;=\; \frac{(\,1 \,-\, (1/3)\,z^{-1}\,)\,(\,1 \,+\, 3\,j\,z^{-1}\,)\,(\,1 \,-\, 3\,j\,z^{-1}\,)}{(\,1 \,+\, 0.7\,j\,z^{-1}\,)\,(\,1 \,-\, 0.7\,j\,z^{-1}\,)} \;.$$

Εύκολα λοιπόν βρίσκουμε τις ρίζες του αριθμητή και παρανομαστή, έχουμε δηλαδή τρία μηδενικά $\{\,1/3\,,\,\pm 3\,j\,\}$, και τρεις πόλους $\{\,0\,,\,\pm 0.7\,j\,\}$ (παρατηρούμε ότι το 0 είναι πόλος, λόγω του ότι το πολυώνυμο του αριθμητή είναι ενός βαθμού παραπάνω από αυτό του παρανομαστή). Το διάγραμμα πόλων και μηδενικών δίνεται στο κάτω αριστερά σχήμα.

(c) Το σύστημα της εκφώνησης έχει δύο μηδενικά εκτός του μοναδιαίου κύκλου, δηλαδή τα $\pm 3\,j$. Εισάγουμε κατά συνέπεια μηδενικά και πόλους στα $\pm\,(1/3)\,j$, και έχουμε:

$$H(z) \;=\; \left(\frac{(\,1 \,-\, (1/3)\,z^{-1}\,)\,(\,1 \,+\, (1/9)\,z^{-2}\,)}{1 \,+\, 0.49\,z^{-2}} \right) \left(\frac{1 \,+\, 9\,z^{-2}}{1 \,+\, (1/9)\,z^{-2}} \right) \;.$$

Ο πρώτος όρος είναι σύστημα ελάχιστης φάσης (minimum phase), $H_1(z)$, με τρία μηδενικά $\{\,1/3\,,\,\pm\,(1/3)\,j\,\}$ και τρεις πόλους $\{\,0\,,\,\pm 0.7\,j\,\}$, όλα εντός του μοναδιαίου κύκλου, ενώ ο δεύτερος όρος είναι ολοπερατό (all pass) σύστημα, $H_{ap}(z)$, με δύο μηδενικά $\{\,\pm 3\,j\,\}$ και δύο πόλους $\{\,\pm\,(1/3)\,j\,\}$. Τα διαγράμματα πόλων και μηδενικών των δύο ζητούμενων συστημάτων δίνονται στο κάτω μεσαίο σχήμα.

(d) Με μία μικρή αλλαγή στην παραγοντοποίηση στο υποερώτημα (c) παίρνουμε το ζητούμενο:

$$H(z) \;=\; \left(\frac{1 \,-\, (1/3)\,z^{-1}}{(\,1 \,+\, 0.49\,z^{-2}\,)\,(\,1 \,+\, (1/9)\,z^{-2}\,)} \right) \big(\,(\,1 \,+\, (1/9)\,z^{-2}\,)\,(\,1 \,+\, 9\,z^{-2}\,)\,\big) \;.$$

Παρατηρούμε ότι ο πρώτος όρος είναι σύστημα ελάχιστης φάσης (minimum phase), $H_2(z)$, με τέσσερα μηδενικά $\{\,0\,,0\,,0\,,\,1/3\,\}$ και τέσσερεις πόλους $\{\,\pm 0.7\,j\,,\,\pm\,(1/3)\,j\,\}$, όλα εντός του μοναδιαίου κύκλου. Παρατηρούμε ότι το 0 είναι μηδενικό τρίτης τάξης, λόγω του ότι το πολυώνυμο του αριθμητή είναι τριών βαθμών λιγότερο από αυτό του παρανομαστή (ως προς το z^{-1}). Τέλος παρατηρούμε πως το δεύτερο υποσύστημα είναι ένα φίλτρο FIR. Κάνοντας πράξεις, βλέπουμε ότι η συνάρτηση μεταφοράς του είναι $1 + (82/9)z^{-2} + z^{-4}$, κατά συνέπεια έχει κρουστική απόκριση συμμετρική ως προς το σημείο $n = 2$. Συνεπώς πρόκειται για φίλτρο FIR γενικευμένης γραμμικής φάσης, $H_{lin}(z)$. Το φίλτρο αυτό έχει τέσσερα μηδενικά $\{\,\pm 3\,j\,,\,\pm\,(1/3)\,j\,\}$ (και έναν πόλο τετάρτης τάξεως στο μηδέν). Τα διαγράμματα πόλων και μηδενικών των δύο συστημάτων δίνονται στο κάτω δεξιά σχήμα.