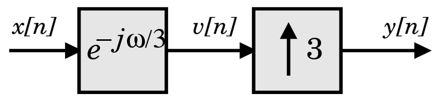
**Θέμα 1:** (a) (12%)

Στο σύστημα του σχήματος, η είσοδος είναι η $x[n] = \delta[n]$. Σχεδιάστε το πλάτος και την φάση του $Y(e^{j\omega})$ της εξόδου (για $|\omega| < \pi$).




**Λύση:** Λύνουμε το πρόβλημα στο πεδίο της συχνότητας. Συμβολίζουμε με $v[n]$ την έξοδο του πρώτου υποσυστήματος (όπως φαίνεται στο παραπάνω σχήμα), και έχουμε:

$$x[n] = \delta[n] \;\Rightarrow\; X(e^{j\omega}) = 1 \;\Rightarrow\; V(e^{j\omega}) = e^{-j\omega/3} ,$$

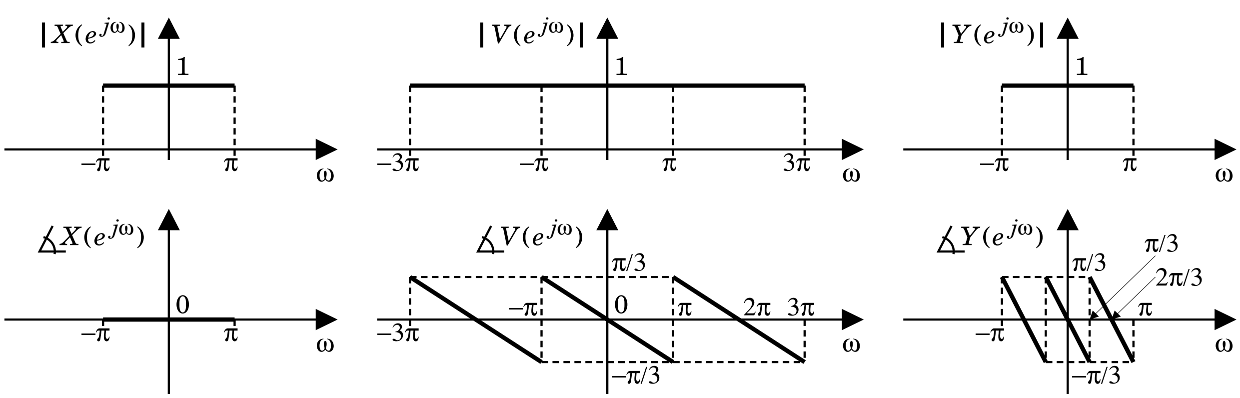
για $-\pi < \omega \leq \pi$, όπου χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι ο DTFT του $\delta[n]$ είναι μονάδα. Το φάσμα (πλάτος και φάση) του $V(e^{j\omega})$ έχει σχεδιαστεί στο παρακάτω σχήμα για τρεις περιόδους, για να βοηθηθεί η σχεδίαση του $Y(e^{j\omega})$. Στην συνέχεια, με βάση το ότι $Y(e^{j\omega}) = V(e^{j\omega 3})$, λόγω της υπερδειγματοληψίας κατά 3, παίρνουμε:

$$Y(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\omega - j2\pi/3} , & -\pi < \omega < -\pi/3 \\ e^{-j\omega} , & |\omega| \leq \pi/3 \\ e^{-j\omega + j2\pi/3} , & \pi/3 < \omega \leq \pi \end{cases} .$$

Κατά συνέπεια, $|Y(e^{j\omega})| = 1$ για $-\pi < \omega \leq \pi$ και

$$\arg\{Y(e^{j\omega})\} = \begin{cases} -\omega - 2\pi/3 , & -\pi < \omega < -\pi/3 \\ -\omega , & |\omega| \leq \pi/3 \\ -\omega + 2\pi/3 , & \pi/3 < |\omega| \leq \pi \end{cases} ,$$

τα οποία και σχεδιάζονται στο παρακάτω σχήμα για μία περίοδο $(-\pi, \pi]$.

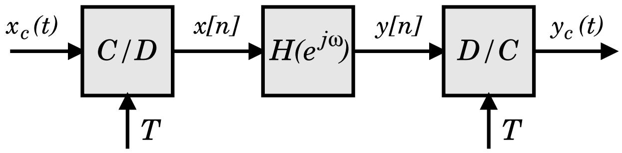


**Θέμα 1:** (b) (13%)

Στο σύστημα του παρακάτω σχήματος, έχουμε:

$$H(e^{j\omega}) \;=\; j\,\omega/T \;\;, \quad -\pi \;<\; \omega \;\leq\; \pi\;,$$

και συχνότητα δειγματοληψίας $T = 1/5$ sec. Βρείτε την έξοδο $y_c(t)$ του συστήματος σε είσοδο $x_c(t) \;=\; \cos\left(13\,\pi\,t\right)$, και συγκρίνετέ την με το σήμα συνεχούς χρόνου που προκύπτει από την παραγώγιση του σήματος εισόδου, δηλ. $\mathrm{d}\,x_c(t)/\mathrm{d}\,t$. Σχολιάστε σχετικά.




**Λύση:** Παρατηρούμε ότι το σήμα εισόδου έχει $\Omega \;=\; 13\,\pi$, κατά συνέπεια για να μην έχουμε φαινόμενο αναδίπλωσης θα πρέπει το σήμα να έχει υποστεί δειγματοληψία με $T_{\max} = \pi/(13\,\pi) = 1/13$ sec το πολύ. Κάτι τέτοιο προφανώς δεν συμβαίνει (καθόσον $T = 1/5 > 1/13$), και κατά συνέπεια δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί το ισοδύναμο σύστημα συνεχούς χρόνου. Παρατηρούμε ότι το ισοδύναμο σύστημα θα ήτανε ένας διαφοριστής με απόκριση συχνότητας $H(\,j\,\Omega) = j\,\Omega$, και κατά συνέπεια έξοδο $\mathrm{d}\,x_c(t)/\mathrm{d}\,t \;=\; -\,13\,\pi\,\sin(13\,\pi\,t)$. Όπως αποδεικνύουμε παρακάτω, η έξοδος $y(t)$ διαφέρει από την παραπάνω, ακριβώς λόγω του φαινόμενου της αναδίπλωσης.
Για να βρούμε την ζητούμενη έξοδο δουλεύουμε στο πεδίο του χρόνου, και έχουμε:

$$
\begin{aligned}
x[n] \;&=\; x_c(n\,T) \;=\; \cos\left(\frac{13}{5}\,\pi\,n\right) \;=\; \cos\left(\frac{3}{5}\,\pi\,n\right) \;=\; \frac{1}{2}\left(e^{j\,3\,\pi\,n/5} \;+\; e^{-\,j\,3\,\pi\,n/5}\right) \\
\Rightarrow \quad y[n] \;&=\; \frac{1}{2}\left(5\,j\,\frac{3\,\pi}{5}\,e^{j\,3\,\pi\,n/5} \;-\; 5\,j\,\frac{3\,\pi}{5}\,e^{-\,j\,3\,\pi\,n/5}\right) \\
&=\; -\,\frac{1}{2\,j}\,\left(3\,\pi\,e^{j\,3\,\pi\,n/5} \;-\; 3\,\pi\,e^{-\,j\,3\,\pi\,n/5}\right) \;=\; -\,3\,\pi\,\sin\left(\frac{3}{5}\,\pi\,n\right) \\
\Rightarrow \quad y(t) \;&=\; -\,3\,\pi\,\sin\left(3\,\pi\,t\right) \;\;,
\end{aligned}
$$

όπου στα παραπάνω χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι η έξοδος ενός Γ.Χ.Α. συστήματος με απόκριση συχνότητας $H(e^{j\,\omega})$ στο εκθετικό σήμα $e^{j\,\omega\,n}$ είναι $e^{j\,\omega\,n}\,H(e^{j\,\omega})$, το γεγονός ότι $H(e^{j\,\omega}) = 5\,j\,\omega$ (από την εκφώνηση λόγω του ότι $T = 5$), και το γεγονός ότι πρέπει $\pi < \omega \leq \pi$ (κατά συνέπεια χρησιμοποιούμε στην εφαρμογή του τύπου την συχνότητα $\omega \;=\; 3/5$ και όχι $\omega = 13/5$).

**Θέμα 2:** (25%) Δίνεται το αιτιατό, γραμμικό, χρονικά αναλλοίωτο σύστημα:

$$H(z) \;=\; \frac{(1 \,-\, 0.5\,z^{-1})\,(1 \,+\, 4\,z^{-2})}{(1 \,-\, 0.64\,z^{-2})} \;\;.$$

(a) (9%) Σχεδιάστε το διάγραμμα υλοποίησής του σε κανονική μορφή (direct form) I και II, όπως και ένα διάγραμμα υλοποίησής του σε σειρά (cascade).

(b) (6%) Σχεδιάστε το διάγραμμα μηδενικών και πόλων του.

(c) (5%) Εκφράστε τη συνάρτηση μεταφοράς ως γινόμενο συστήματος ελάχιστης φάσης (minimum phase), $H_1(z)$, και ολοπερατού (all pass), $H_{ap}(z)$, δηλαδή $H(z) \,=\, H_1(z)\,H_{ap}(z)$, και σχεδιάστε τα διαγράμματα πόλων/μηδενικών τους.

(d) (5%) Εκφράστε τη συνάρτηση μεταφοράς ως γινόμενο ενός άλλου συστήματος ελάχιστης φάσης (minimum phase), $H_2(z)$, και ενός συστήματος πεπερασμένης κρουστικής απόκρισης, γενικευμένης γραμμικής φάσης (F.I.R., linear phase), $H_{lin}(z)$, δηλαδή $H(z) \,=\, H_2(z)\,H_{lin}(z)$, και σχεδιάστε τα διαγράμματα πόλων/μηδενικών τους.

**Λύση:**

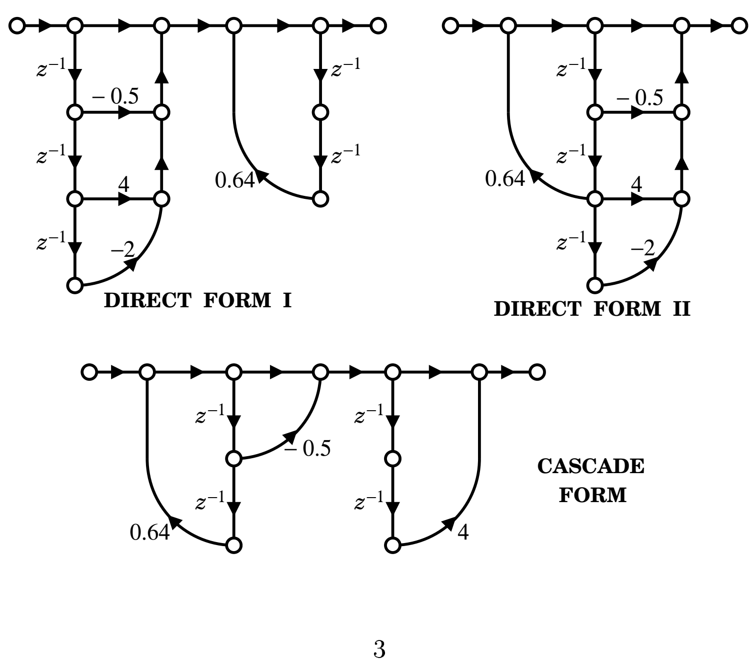
(a) Για την υλοποίηση σε κανονική μορφή κάνουμε πράξεις και παίρνουμε:

$$H(z) \;=\; \frac{(1 \,-\, 0.5\,z^{-1})\,(1 \,+\, 4\,z^{-2})}{(1 \,-\, 0.64\,z^{-2})} \;=\; \frac{1 \,-\, 0.5\,z^{-1} \,+\, 4\,z^{-2} \,-\, 2\,z^{-3}}{1 \,-\, 0.64\,z^{-2}} \;\;,$$

από το οποίο εύκολα λαμβάνουμε τα διαγράμματα κανονικής μορφής, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Παρατηρούμε ότι κλάδοι με μηδενικούς συντελεστές έχουν παραληφθεί. Για την υλοποίηση σε σειρά, παρατηρούμε ότι υπάρχουν πολλές δυνατότητες. Στο παρακάτω σχήμα, διαλέγουμε μία υλοποίηση δύο υποσυστημάτων σε σειρά, όπως στην

$$H(z) \;=\; \left(\frac{1 \,-\, 0.5\,z^{-1}}{1 \,-\, 0.64\,z^{-2}}\right)\,(1 \,+\, 4\,z^{-2}) \;\;,$$

όπου το πρώτο υποσύστημα έχει υλοποιηθεί σε κανονική μορφή II, ενώ το δεύτερο υποσύστημα είναι ένα φίλτρο FIR.



(b) Από την εκφώνηση, παραγοντοποιούμε ως

$$H(z) \;=\; \frac{(1 \,-\, 0.5\, z^{-1})\,(1 \,+\, 4\, z^{-2})}{(1 \,-\, 0.64\, z^{-2})} \;=\; \frac{(1 \,-\, 0.5\, z^{-1})\,(1 \,+\, 2\,j\, z^{-1})\,(1 \,-\, 2\,j\, z^{-1})}{(1 \,+\, 0.8\, z^{-1})(1 \,-\, 0.8\, z^{-1})} \;.$$

Εύκολα λοιπόν βρίσκουμε τις ρίζες του αριθμητή και παρανομαστή, έχουμε δηλαδή τρία μηδενικά $\{\,0.5\,,\,\pm\,2\,j\,\}$, και τρεις πόλους $\{\,0\,,\,\pm\,0.8\,\}$ (παρατηρούμε ότι το $0$ είναι πόλος, λόγω του ότι το πολυώνυμο του αριθμητή είναι ενός βαθμού παραπάνω από αυτό του παρανομαστή). Το διάγραμμα πόλων και μηδενικών δίνεται στο σχήμα στο κάτω μέρος της σελίδας.

(c) Το σύστημα της εκφώνησης έχει δύο μηδενικά εκτός του μοναδιαίου κύκλου, δηλαδή τα $\pm\,2\,j$. Εισάγουμε κατά συνέπεια μηδενικά και πόλους στα $\pm\,(1/2)\,j$, και έχουμε:

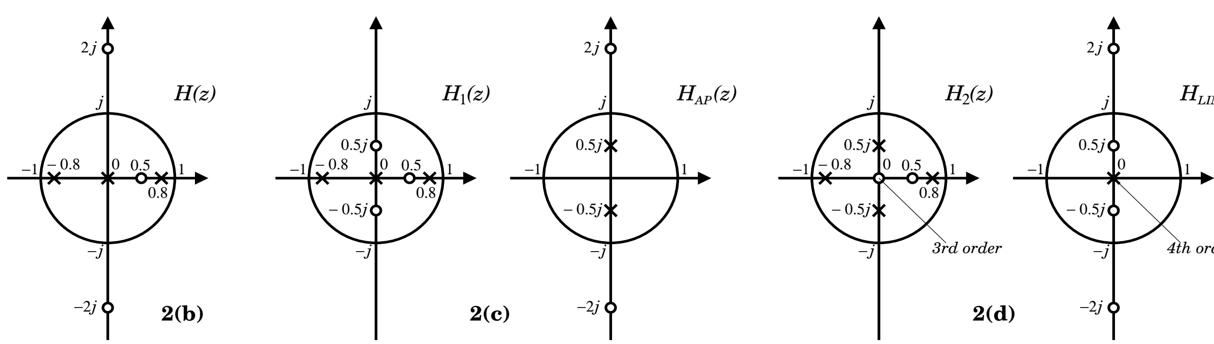
$$H(z) \;=\; \left(\frac{(1 \,-\, 0.5\, z^{-1})\,(1 \,+\, \frac{1}{4}\, z^{-2})}{1 \,-\, 0.64\, z^{-2}}\right)\,\left(\frac{1 \,+\, 4\, z^{-2}}{1 \,+\, \frac{1}{4}\, z^{-2}}\right) \;.$$

Ο πρώτος όρος είναι σύστημα ελάχιστης φάσης (minimum phase), $H_1(z)$, με τρία μηδενικά $\{\,0.5\,,\,\pm\,(1/2)\,j\,\}$ και τρεις πόλους $\{\,0\,,\,\pm\,0.8\,\}$, όλα εντός του μοναδιαίου κύκλου, ενώ ο δεύτερος όρος είναι ολοπερατό (all pass) σύστημα, $H_{ap}(z)$, με δύο μηδενικά $\{\,\pm\,2\,j\,\}$ και δύο πόλους $\{\,\pm\,(1/2)\,j\,\}$. Τα διαγράμματα πόλων και μηδενικών των δύο ζητούμενων συστημάτων δίνονται στο σχήμα στο κάτω μέρος της σελίδας.

(d) Με μία μικρή αλλαγή στην παραγοντοποίηση στο υποερώτημα (c) παίρνουμε το ζητούμενο:

$$H(z) \;=\; \left(\frac{1 \,-\, 0.5\, z^{-1}}{(1 \,-\, 0.64\, z^{-2})\,(1 \,+\, \frac{1}{4}\, z^{-2})}\right)\,\left((1 \,+\, \frac{1}{4}\, z^{-2})\,(1 \,+\, 4\, z^{-2})\right) \;.$$

Παρατηρούμε ότι ο πρώτος όρος είναι σύστημα ελάχιστης φάσης (minimum phase), $H_2(z)$, με τέσσερα μηδενικά $\{\,0\,,0\,,0\,,0.5\,\}$ και τέσσερεις πόλους $\{\,\pm\,0.8\,,\,\pm\,(1/2)\,j\,\}$, όλα εντός του μοναδιαίου κύκλου. Παρατηρούμε ότι το $0$ είναι μηδενικό τρίτης τάξης, λόγω του ότι το πολυώνυμο του αριθμητή είναι τριών βαθμών λιγότερο από αυτό του παρανομαστή (ως προς το $z^{-1}$). Τέλος παρατηρούμε πως το δεύτερο υποσύστημα είναι ένα φίλτρο FIR. Κάνοντας πράξεις, βλέπουμε ότι η συνάρτηση μεταφοράς του είναι $1 + (17/4)z^{-2} + z^{-4}$, κατά συνέπεια έχει κρουστική απόκριση συμμετρική ως προς το σημείο $n = 2$. Συνεπώς πρόκειται για φίλτρο FIR γενικευμένης γραμμικής φάσης, $H_{lin}(z)$. Το φίλτρο αυτό έχει τέσσερα μηδενικά $\{\,\pm\,2\,j\,,\,\pm\,(1/2)\,j\,\}$ (και έναν πόλο τετάρτης τάξεως στο μηδέν). Τα διαγράμματα πόλων και μηδενικών των δύο συστημάτων δίνονται στο παρακάτω σχήμα.



**Θέμα 3:** (a) (8%)

Έστω ότι έχουμε ένα ολοπερατό (all pass) φίλτρο συνεχούς χρόνου. Αν εφαρμόσουμε στη συνάρτηση μεταφοράς του το διγραμμικό μετασχηματισμό (bilinear transform), το φίλτρο που θα προκύψει θα είναι ολοπερατό διακριτού χρόνου; Μπορεί ένα ολοπερατό φίλτρο διακριτού χρόνου να προκύψει από αυτό του συνεχούς χρόνου με χρήση της μεθόδου αμετάβλητης κρουστικής απόκρισης (implulse invariance);

**Λύση:** Όσον αφορά την εφαρμογή του διγραμμικού μετασχηματισμού στην συνάρτηση μεταφοράς του ολοπερατού φίλτρου συνεχούς χρόνου, κάτι τέτοιο δεν θα αλλάξει το πλάτος της απόκρισης συχνότητας, καθόσον ο μετασχηματισμός δεν αλλάζει το πλάτος και δεν υπάρχει και φαινόμενο αναδίπλωσης. Κατά συνέπεια, θα προκύψει ολοπερατό φίλτρο διακριτού χρόνου.
Αντίθετα, η εφαρμογή της μεθόδου αμετάβλητης κρουστικής απόκρισης θα δημιουργήσει φαινόμενο αναδίπλωσης. Κατά συνέπεια, δεν θα προκύψει ολοπερατό φίλτρο διακριτού χρόνου.

---

**Θέμα 3:** (b) (12%)

Έστω ότι το φίλτρο διακριτού χρόνου δίνεται από την:

$$H(z) \;=\; \frac{6}{1 \,-\, e^{-0.3}z^{-1}} \;-\; \frac{3}{1 \,-\, e^{-0.6}z^{-1}} \;\; .$$

Το φίλτρο αυτό έχει σχεδιαστεί με την μέθοδο της αμετάβλητης κρουστικής απόκρισης (implulse invariance) με βάση ένα φίλτρο συνεχούς χρόνου, χρησιμοποιώντας τη σχέση $h[n] \,=\, 3\,h_c(3\,n)$ μεταξύ των κρουστικών αποκρίσεων του φίλτρου διακριτού και συνεχούς χρόνου. Βρείτε μία συνάρτηση μεταφοράς του φίλτρου συνεχούς χρόνου, $H_c(s)$, από την οποία μπορεί να προέκυψε το δοθέν φίλτρο διακριτού χρόνου.

**Λύση:** Γνωρίζουμε πως για την μέθοδο της αμετάβλητης κρουστικής απόκρισης ισχύει:

$$H_c(s) \;=\; \sum_k \frac{A_k}{s \,-\, s_k} \;\;\Rightarrow\;\; H(z) \;=\; \sum_k \frac{A_k\,T}{1 \,-\, e^{s_k T} z^{-1}} \;\; .$$

Γνωρίζουμε επίσης ότι $h[n] \,=\, T\,h_c(T\,n)$. Από την εκφώνηση έχουμε $h[n] \,=\, 3\,h_c(3\,n)$, κατά συνέπεια $T = 3$. Από τα παραπάνω και την δοθείσα $H(z)$ έχουμε:

$$-\,0.3 \,=\, s_o\,T \;\Rightarrow\; s_o \,=\, -\,0.1 \;, \quad A_o\,T \,=\, 6 \;\Rightarrow\; A_o \,=\, 2 \;,$$

$$-\,0.6 \,=\, s_1\,T \;\Rightarrow\; s_1 \,=\, -\,0.2 \;, \quad A_1\,T \,=\, -\,3 \;\Rightarrow\; A_1 \,=\, -\,1 \;.$$

Κατά συνέπεια, το ζητούμενο αρχικό φίλτρο συνεχούς χρόνου είναι το:

$$H_c(s) \;=\; \frac{2}{s \,+\, 0.1} \;-\; \frac{1}{s \,+\, 0.2} \;\; .$$

---

**Θέμα 4:** (a) (16%)

Υπολογίστε τον DFT μήκους $N = 18$ των δύο πεπερασμένων ακολουθιών $x[n] = \delta[n-9]$ και $x[n] = \cos(\pi n/3)$, για $0 \le n \le 17$.

**Λύση:** Για την πρώτη ακολουθία γνωρίζουμε ότι $\mathcal{DFT}\{\delta[n]\} = 1$, για $0 \le k \le 17$, συνεπώς από την ιδιότητα μετάθεσης στον χρόνο έχουμε:

$$\mathcal{DFT}\{\delta[n-9]\} = W_{18}^{9k} = e^{-j2\pi 9k/18} = e^{-j\pi k} = (-1)^k \ ,$$

για $0 \le k \le 17$.

Για τη δεύτερη ακολουθία έχουμε:

$$x[n] = \cos(\pi n/3) = \frac{1}{2}\left(e^{j\pi n/3} + e^{-j\pi n/3}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{j\frac{2\pi}{18}3n} + e^{-j\frac{2\pi}{18}3n}\right)$$

$$\Rightarrow \ \mathcal{DFT}\{x[n]\} = \frac{18}{2}\left(\delta[<k-3>_{18}] + \delta[<k+3>_{18}]\right) = 9\delta[k-3] + 9\delta[k-15] \ ,$$

για $0 \le k \le 17$.

---

**Θέμα 4:** (b) (14%)

Υπολογίστε την *κυκλική* συνέλιξη των ακολουθιών:

$$x[n] = 6\,\delta[n] + 5\,\delta[n-1] + 4\,\delta[n-2] + 3\,\delta[n-3] + 2\,\delta[n-4] + \delta[n-5]$$

και

$$h[n] = \delta[n] + \delta[n-4] \ ,$$

για $N = 6$ και για $N = 10$.

**Λύση:** Ο πιο εύκολος τρόπος για την επίλυση του προβλήματος είναι μέσω του υπολογισμού της γραμμικής συνέλιξης των δύο ακολουθιών. Αυτή βρίσκεται εύκολα ως:

$$x[n]*h[n] = x[n]+x[n-4] =$$

$$6\delta[n] + 5\delta[n-1] + 4\delta[n-2] + 3\delta[n-3] + 8\delta[n-4] + 6\delta[n-5] + 4\delta[n-6] + 3\delta[n-7] + 2\delta[n-8] + \delta[n-9] \ .$$

Η ακολουθία αυτή, όπως αναμενόταν, έχει μήκος 10, και κατά συνέπεια συμπίπτει με την κυκλική συνέλιξη των $x[n]$ και $h[n]$ για $N = 10$. Αντιθέτως, η κυκλική συνέλιξή τους διαφέρει για $N = 6$, καθόσον τα δείγματα στις τιμές $6 \le n \le 9$ αναδιπλώνονται (αθροίζονται) στις τιμές $0 \le n \le 3$. Κατά συνέπεια, η ζητούμενη κυκλική συνέλιξη για $N = 6$ ισούται με

$$10\,\delta[n] + 8\,\delta[n-1] + 6\,\delta[n-2] + 4\,\delta[n-3] + 8\,\delta[n-4] + 6\,\delta[n-5] \ .$$

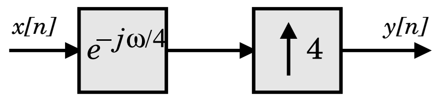
---

**Τα ΘΕΜΑΤΑ Β λύνονται με παρόμοια μεθοδολογία με τα παραπάνω.**

---

**Θέμα 1:** (25%) Τα (a) και (b) είναι ανεξάρτητα ερωτήματα. Απαντήστε αναλυτικά.

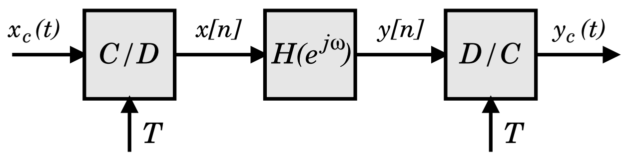
(a) Στο σύστημα του σχήματος, η είσοδος είναι η $x[n] = \delta[n]$. Σχεδιάστε το πλάτος και την φάση του $Y(e^{j\omega})$ της εξόδου (για $|\omega| < \pi$).




(b) Στο σύστημα του παρακάτω σχήματος, έχουμε:

$$H(e^{j\omega}) \;=\; j\,\omega/T \;\;, \qquad -\pi \;<\; \omega \;\leq\; \pi\;,$$

και συχνότητα δειγματοληψίας $T = 1/5\ \mathrm{sec}$. Βρείτε την έξοδο $y_c(t)$ του συστήματος σε είσοδο $x_c(t) = \sin(3\pi t)$, και συγκρίνετέ την με το σήμα συνεχούς χρόνου που προκύπτει από την παραγώγιση του σήματος εισόδου, δηλαδή το $\mathrm{d}\,x_c(t)/\mathrm{d}\,t$. Σχολιάστε σχετικά.




**Θέμα 2:** (25%) Δίνεται το αιτιατό, γραμμικό, χρονικά αναλλοίωτο σύστημα:

$$H(z) \;=\; \frac{(1\;+\;4\,z^{-2})\,(1\;-\;0.5\,z^{-1})}{(1\;-\;0.64\,z^{-2})}\;.$$

(a) Σχεδιάστε το διάγραμμα υλοποίησής του σε κανονική μορφή (direct form) I και II, όπως και ένα διάγραμμα υλοποίησής του σε σειρά (cascade).

(b) Σχεδιάστε το διάγραμμα μηδενικών και πόλων του.

(c) Εκφράστε τη συνάρτηση μεταφοράς ως γινόμενο συστήματος ελάχιστης φάσης (minimum phase), $H_1(z)$, και ολοπερατού (all pass), $H_{ap}(z)$, δηλαδή $H(z) = H_1(z)\,H_{ap}(z)$, και σχεδιάστε τα διαγράμματα πόλων/μηδενικών τους.

(d) Εκφράστε τη συνάρτηση μεταφοράς ως γινόμενο ενός άλλου συστήματος ελάχιστης φάσης (minimum phase), $H_2(z)$, και ενός συστήματος πεπερασμένης κρουστικής απόκρισης, γραμμικής φάσης (F.I.R., linear phase), $H_{lin}(z)$, δηλαδή $H(z) = H_2(z)\,H_{lin}(z)$, και σχεδιάστε τα διαγράμματα πόλων/μηδενικών τους.

**Θέμα 3:** (20%) Τα (a) και (b) είναι ανεξάρτητα ερωτήματα. Απαντήστε αναλυτικά.

(a) Έστω ότι έχουμε ένα ολοπερατό (all pass) φίλτρο συνεχούς χρόνου. Αν εφαρμόσουμε στη συνάρτηση μεταφοράς του το διγραμμικό μετασχηματισμό (bilinear transform), το φίλτρο που θα προκύψει θα είναι ολοπερατό διακριτού χρόνου; Μπορεί ένα ολοπερατό φίλτρο διακριτού χρόνου να προκύψει από αυτό του συνεχούς χρόνου με χρήση της μεθόδου αμετάβλητης κρουστικής απόκρισης (implulse invariance);

(b) Έστω ότι το φίλτρο διακριτού χρόνου δίνεται από την:

$$H(z) \;=\; \frac{2}{1 \,-\, e^{-0.2}\, z^{-1}} \;-\; \frac{4}{1 \,-\, e^{-0.4}\, z^{-1}} \;.$$

Το φίλτρο αυτό έχει σχεδιαστεί με την μέθοδο της αμετάβλητης κρουστικής απόκρισης (implulse invariance) με βάση ένα φίλτρο συνεχούς χρόνου, χρησιμοποιώντας τη σχέση $h[n] \,=\, 2\, h_c(2\,t)$ μεταξύ των κρουστικών αποκρίσεων του φίλτρου διακριτού και συνεχούς χρόνου. Βρείτε μία συνάρτηση μεταφοράς του φίλτρου συνεχούς χρόνου, $H_c(s)$, από την οποία μπορεί να προέκυψε το δοθέν φίλτρο διακριτού χρόνου.

**Θέμα 4:** (30%) Τα (a) και (b) είναι ανεξάρτητα ερωτήματα. Απαντήστε αναλυτικά.

(a) Υπολογίστε τον DFT μήκους $N \,=\, 24$ των δύο πεπερασμένων ακολουθιών $x[n] = \delta[n-8]$ και $x[n] \,=\, \sin\left(\pi\, n/3\right)$, για $0 \le n \le 23$.

(b) Υπολογίστε την *κυκλική* συνέλιξη των ακολουθιών:

$$x[n] \;=\; \delta[n] \;+\; 2\,\delta[n-1] \;+\; 3\,\delta[n-2] \;+\; 4\,\delta[n-3] \;+\; 5\,\delta[n-4] \;+\; 6\,\delta[n-5]$$

και

$$h[n] \;=\; \delta[n] \;+\; \delta[n-4] \;\;,$$

για $N = 6$ και για $N = 10$.