ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ

Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών

ΘΕΩΡΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ & ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

Γεράσιμος Ποταμιάνος

Αναπλ. Καθηγητής,
Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
και Μηχανικών Υπολογιστών

Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

http://www.inf.uth.gr/~gpotamianos

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών

ΘΕΩΡΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ & ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

Ενότητα 6: ***ΣΗΜΑΤΑ & ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ: ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΣΤΟΝ ΧΡΟΝΟ & ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ***

6.0. Εισαγωγή

- Εφαρμογή των βασικών εργαλείων / εννοιών στο πεδίο του **χρόνου** και της **συχνότητας** (μ/σ **Fourier**) για την ανάλυση Γ.Χ.Α. συστημάτων.
- Μας ενδιαφέρει η συμπεριφορά **και** στο **χρόνο** **και** στην **συχνότητα**.
- Θα μελετήσουμε βασικά **φίλτρα** (κατωπερατά) και συστήματα **1ης** και **2ης τάξης**.
- Παράλληλη παρουσίαση θεμάτων στον **συνεχή** και **διακριτό χρόνο**.

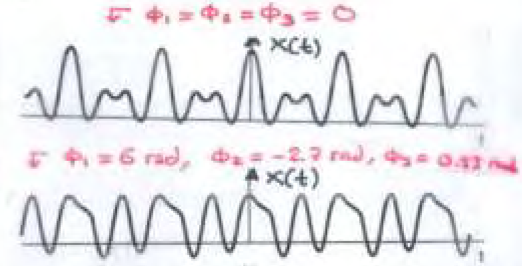
6.1. Μέτρο και Φάση μ/σ Fourier

- M/Σ Fourier → εν γένει είναι μιγαδικός

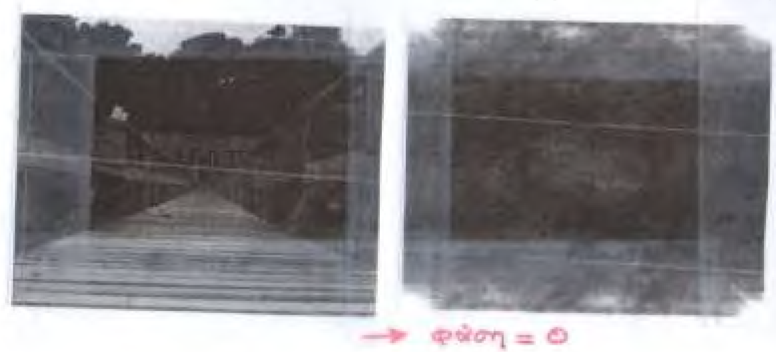
Συνεχής Χρόνος → $$X(j\Omega) = \underbrace{|X(j\Omega)|}_{\text{Μέτρο}}\, e^{j \overbrace{\sphericalangle X(j\Omega)}^{\text{Φάση}}}$$

Διακριτός Χρόνος → $$X(e^{j\omega}) = |X(e^{j\omega})|\, e^{j\sphericalangle X(e^{j\omega})}$$

- Μας ενδιαφέρει και το μέτρο και η φάση του Μ/Σ. Π.Χ.:
  - $x(t) = 1 + \frac{1}{2}\cos(2\pi t + \varphi_1) + \cos(4\pi t + \varphi_2) + \frac{2}{3}\cos(6\pi t + \varphi_3)$
  - $x(t)$ πραγματικό: $\mathcal{F}\{x(-t)\} = |X(j\Omega)|\, e^{-j\sphericalangle X(j\Omega)}$
  - Αντίληψη σήματος φωνής
    Η φάση δεν παίζει σημαντικό ρόλο
  - Αντίληψη εικόνας:
    Η φάση είναι πολύ σημαντική



Σχ. 6.1 από βιβλίο Oppenheim-Willsky



Σχ. 6.2 από βιβλίο Oppenheim-Willsky (τμήμα)

6.1. Μέτρο / Φάση Απόκριση Συχνότητας Γ.Χ.Α. Συστημ. (I)

$$x(t) \longrightarrow \boxed{\text{ΓΧΑ} \quad h(t)} \longrightarrow y(t)$$

$$x[n] \longrightarrow \boxed{h[n]} \longrightarrow y[n]$$

ΣΥΝΕΧΗΣ ΧΡΟΝΟΣ $\xrightarrow{\text{Μ/Σ FOURIER}}$ $\boxed{Y(j\Omega) = H(j\Omega)X(j\Omega)}$

ΔΙΑΚΡΙΤΟΣ ΧΡΟΝΟΣ $\boxed{Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})X(e^{j\omega})}$

(αν υπάρχουν....)

MAGNITUDE DISTORTION

ΚΕΡΔΟΣ / GAIN

$$\begin{cases} |Y(j\Omega)| = |H(j\Omega)|\,|X(j\Omega)| \\ \sphericalangle Y(j\Omega) = \sphericalangle H(j\Omega) + \sphericalangle X(j\Omega) \end{cases}$$

PHASE SHIFT

PHASE DISTORTION

και αντίστοιχα για διακριτό χρόνο / DTFT ...

$\boxed{\text{ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΦΑΣΗ}}$

πχ $H(j\Omega) = e^{-j\Omega t_0} \Longrightarrow \boxed{y(t) = x(t-t_0)}$ ΧΡΟΝΙΚΗ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΗ

επί $|H(j\Omega)| = 1$, $\sphericalangle H(j\Omega) = -\Omega t_0$

ALL PASS — ΟΛΟΠΕΡΑΤΟ

Αντίστοιχα: $H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega n_0} \Longrightarrow \boxed{y[n] = x[n-n_0]}$ (για ακέραιο n_0)

επί $|H(e^{j\omega})| = 1$, $\sphericalangle H(e^{j\omega}) = -\omega n_0$

ALL-PASS — ΟΛΟΠΕΡΑΤΟ

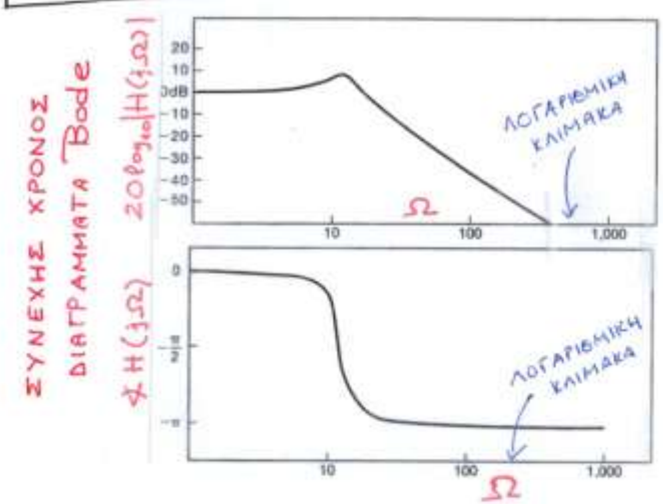
6.1. Μέτρο / Φάση Απόκριση Συχνότητας Γ.Χ.Α. Συστημ. (ΙΙ)

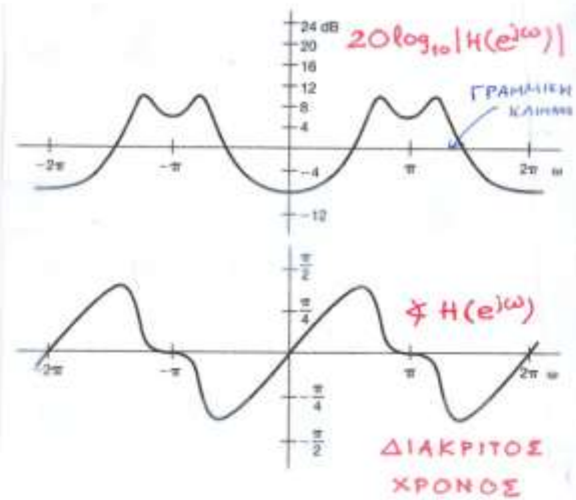
ΚΑΘΥΣΤΕΡΗΣΗ ΟΜΑΔΑΣ – GROUP DELAY

$$\tau(\Omega) = -\frac{d}{d\Omega}\left\{ \measuredangle H(j\Omega) \right\}$$ ΣΥΝΕΧΗΣ ΧΡΟΝΟΣ

$$\tau(\omega) = -\frac{d}{d\omega}\left\{ \measuredangle H(e^{j\omega}) \right\}$$ ΔΙΑΚΡΙΤΟΣ ΧΡΟΝΟΣ

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΟΥ ΠΛΑΤΟΥΣ ΚΑΙ ΦΑΣΗΣ
LOG-MAGNITUDE AND PHASE PLOTS





Σχ. 6.8, 6.9 από βιβλίο Oppenheim-Willsky (τροποποιημένα)

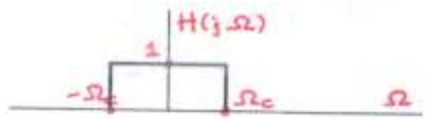
6.3. Ιδανικά και Μή Φίλτρα Επιλογής Συχνοτήτων (Ι)

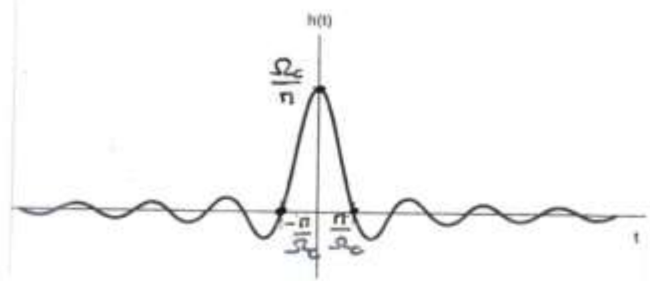
ΙΔΑΝΙΚΑ ΚΑΤΩΠΕΡΑΤΑ ΦΙΛΤΡΑ

IDEAL LOWPASS FILTERS

ΣΥΝΕΧΗΣ ΧΡΟΝΟΣ:
$$\boxed{H(j\Omega) = \begin{cases} 1, & |\Omega| \le \Omega_c \\ 0, & |\Omega| > \Omega_c \end{cases}} \Rightarrow h(t) = \frac{\sin(\Omega_c t)}{\pi t}$$

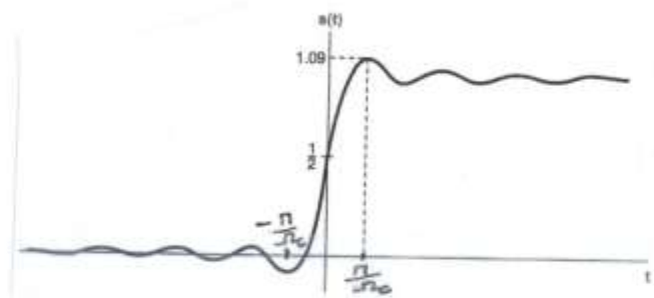
$$s(t) = \int_{-\infty}^{t} h(\tau)\,d\tau$$





φαινόμενο ταλάντωσης στον χρόνο "RINGING" (μη επιθυμητό)

ΕΠΙΣΗΣ ΜΗ-ΑΙΤΙΑΤΟ



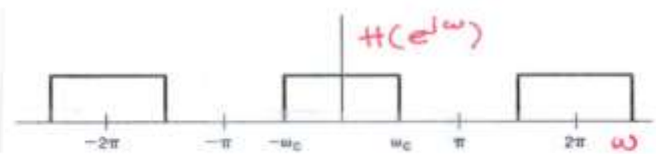
Σχ. 6.10(a), 6.12(a), 6.14(a) από βιβλίο Oppenheim-Willsky (τροποποιημένα)

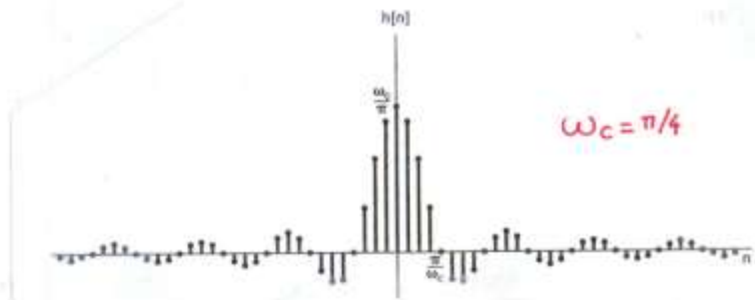
6.3. Ιδανικά και Μή Φίλτρα Επιλογής Συχνοτήτων (II)

ΔΙΑΚΡΙΤΟΣ ΧΡΟΝΟΣ:

$$\boxed{H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq \omega_c \\ 0, & \omega_c < |\omega| \leq \pi \end{cases}} \Rightarrow$$

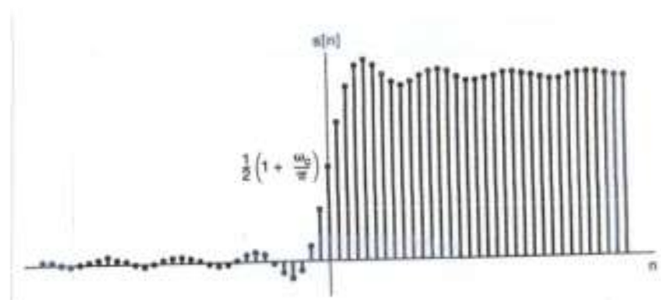
$$\Rightarrow h[n] = \frac{\sin(\omega_c n)}{\pi n}, \quad s[n] = \sum_{m=-\infty}^{n} h[m]$$





ανεπιθύμητα
φαινόμενα
ταλάντωσης

ΕΠΙΣΗΣ ΜΗ-ΑΙΤΙΑΤΟ



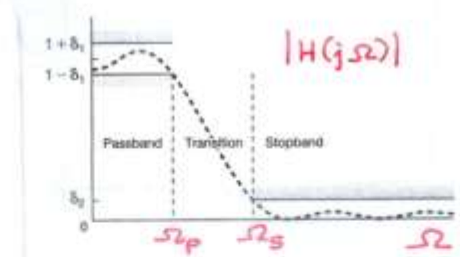
Σχ. 6.10(b), 6.12(b), 6.14(b) από βιβλίο Oppenheim-Willsky (τροποποιημένα)

6.3. Ιδανικά και Μή Φίλτρα Επιλογής Συχνοτήτων (ΙΙΙ)

ΜΗ-ΙΔΑΝΙΚΑ ΚΑΤΩΠΕΡΑΤΑ ΦΙΛΤΡΑ

NON-IDEAL LOWPASS FILTERS

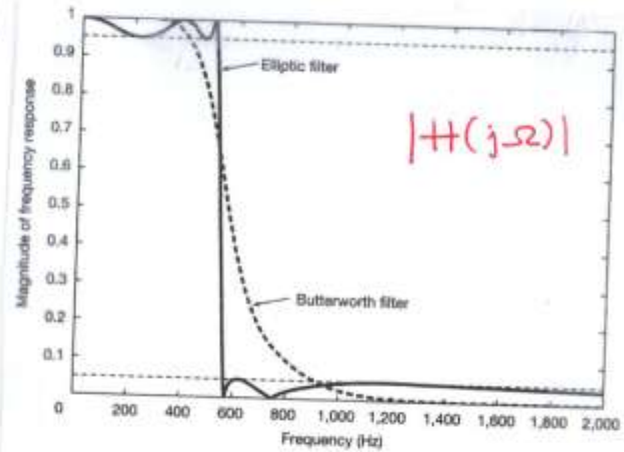
Τυπικά σχεδιαστικά κριτήρια:

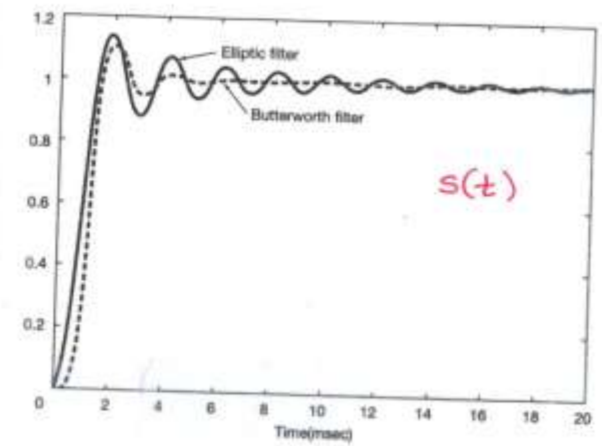


Σχ. 6.16 από βιβλίο Oppenheim-Willsky (τροποποιημένο)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΥΛΟΠΟΙΗΣΗΣ

(συνεχής χρόνος)





Σχ. 6.18 από βιβλίο Oppenheim-Willsky (τροποποιημένο)

6.4. Γ.Χ.Α. Συστήματα Συνεχούς Χρόνου 1ης / 2ης Τάξης (Ι)

- Συστήματα μεγαλύτερης τάξης συχνά υλοποιούνται ως συνδυασμός συστημάτων 1ης & 2ης τάξης (με παράλληλο, ή εν σειρά συνδυασμό)

1 ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΠΡΩΤΗΣ ΤΑΞΗΣ

Διαφορική εξίσωση:

$$\boxed{\tau \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t)}$$

$\tau > 0$

Απόκριση συχνότητας

$$\boxed{H(j\Omega) = \frac{1}{j\Omega\tau + 1}}$$

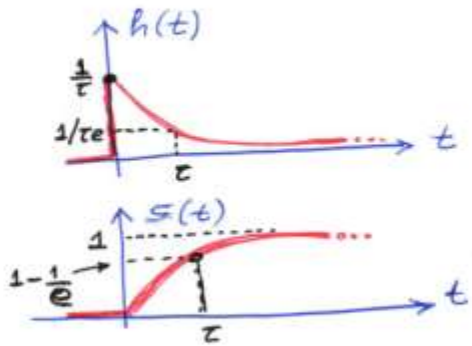
Κρουστική απόκριση

$$\boxed{h(t) = \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} u(t)}$$

Βηματική απόκριση

$$\boxed{\begin{aligned} s(t) &= h(t) * u(t) = \\ &= [1 - e^{-t/\tau}]\, u(t) \end{aligned}}$$

6.4. Γ.Χ.Α. Συστήματα Συνεχούς Χρόνου 1ης / 2ης Τάξης (ΙΙ)



$$h(t) = \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} u(t)$$

$$s(t) = [1 - e^{-\frac{t}{\tau}}]\, u(t)$$

τ : ΣΤΑΘΕΡΑ ΧΡΟΝΟΥ ΤΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ / system time constant

↳ ελέγχει τον ρυθμό με τον οποίον αποκρίνεται το σύστημα

πχ $\tau \downarrow \Rightarrow h(0) \uparrow$, απόσβεση ↓ (πιό γρήγορη)

$s(t)$ ανέρχεται πιό σύντομα

6.4. Γ.Χ.Α. Συστήματα Συνεχούς Χρόνου 1ης / 2ης Τάξης (ΙΙΙ)

Απόκριση συχνότητας / Διαγράμματα:

$$\boxed{20\log_{10}|H(j\Omega)| = -10\log_{10}[(\Omega\tau)^2+1]}$$

- $\Omega\tau \ll 1 \Rightarrow 20\log_{10}|H(j\Omega)| \simeq 0$
- $\Omega\tau \gg 1 \Rightarrow 20\log_{10}|H(j\Omega)| \simeq$

$$\simeq -20\log_{10}(\Omega) - 20\log_{10}\tau$$

γραμμική ως προς $\log\Omega$

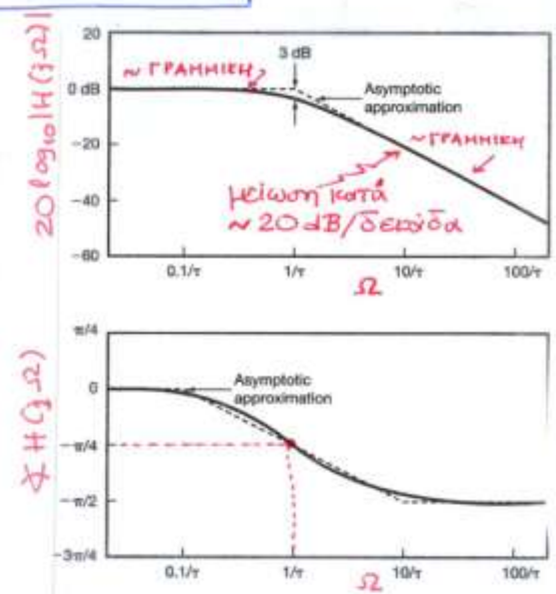
- $\Omega\tau = 1 \Rightarrow 20\log_{10}|H(j\Omega)| =$

$$= -10\log_{10}(2) \simeq -3dB$$

$$\boxed{\sphericalangle H(j\Omega) = -\arctan(\Omega\tau)} \simeq$$

γραμμική προσέγγιση

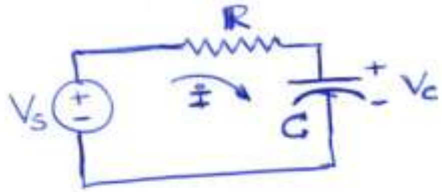
$$\simeq \begin{cases} 0, & \text{για } \Omega \le 0.1/\tau \\ -\frac{\pi}{4}[\log_{10}(\Omega\tau)+1], & \frac{0.1}{\tau} \le \Omega \le 10/\tau \\ -\pi/2, & \text{για } \Omega \ge 10/\tau \end{cases}$$



Σχ. 6.20 από βιβλίο Oppenheim-Willsky (τροποποιημένο)

6.4. Γ.Χ.Α. Συστήματα Συνεχούς Χρόνου 1ης / 2ης Τάξης (IV)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:



$$\left.\begin{aligned} I(t) &= \frac{V_s(t) - V_c(t)}{R} \\ I(t) &= C\,\frac{dV_c(t)}{dt} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow$$

$$\boxed{\underbrace{RC}_{\tau}\,\frac{dV_c(t)}{dt} + V_c(t) = V_s(t)}$$

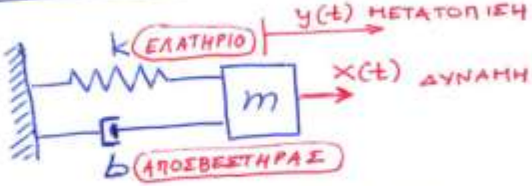
6.4. Γ.Χ.Α. Συστήματα Συνεχούς Χρόνου 1ης / 2ης Τάξης (V)

② ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΔΕΥΤΕΡΗΣ ΤΑΞΗΣ

Διαφορική Εξίσωση:

$$\boxed{\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 2\zeta\omega_n \frac{dy(t)}{dt} + \omega_n^2\, y(t) = \omega_n^2\, x(t) \qquad (\zeta, \omega_n > 0) \qquad (*)}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ:

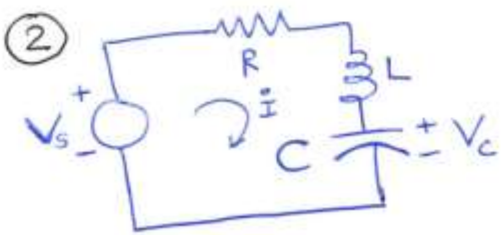


①

$$m\frac{d^2y(t)}{dt} = x(t) - ky(t) - b\frac{dy(t)}{dt} \Rightarrow (*)$$

$$\boxed{\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad \zeta = \frac{b}{2\sqrt{km}}}$$

②



$$\left.\begin{aligned} V_s(t) &= Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt} + V_c(t) \\ i(t) &= C\frac{dV_c(t)}{dt} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

⇒ διαφ. (*) εξίσωση με

$$\boxed{\omega_n = \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad \zeta = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}}}$$

6.4. Γ.Χ.Α. Συστήματα Συνεχούς Χρόνου 1ης / 2ης Τάξης (VI)

Απόκριση Συχνότητας:

$$\boxed{H(j\Omega) = \frac{\omega_n^2}{(j\Omega)^2 + 2\zeta\omega_n(j\Omega) + \omega_n^2}} = \frac{\omega_n^2}{(j\Omega - c_1)(j\Omega - c_2)}$$

ΡΙΖΕΣ ΠΑΡΟΝΟΜΑΣΤΗ $\boxed{c_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}}$

- $\zeta \neq 1 \Rightarrow c_1 \neq c_2$, οπότε: $\boxed{H(j\Omega) = \frac{M}{j\Omega - c_1} - \frac{M}{j\Omega - c_2}}$

με $\boxed{M = \frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}}}$

οπότε $\boxed{h(t) = M[e^{c_1 t} - e^{c_2 t}]u(t)}$

- $\zeta = 1 \Rightarrow c_1 = c_2 = -\omega_n$, οπότε: $\boxed{H(j\Omega) = \frac{\omega_n^2}{(j\Omega + \omega_n)^2}}$

και $\boxed{h(t) = \omega_n^2 t e^{-\omega_n t} u(t)}$

6.4. Γ.Χ.Α. Συστήματα Συνεχούς Χρόνου 1ης / 2ης Τάξης (VII)

- Παράμετροι: ω_n: undamped natural frequency / φυσική συχνότητα

  ζ: damping ratio / λόγος απόσβεσης

- Για $\boxed{0<\zeta<1}$ UNDERDAMPED

$$h(t) = \frac{\omega_n e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \cdot \sin\left[\left(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\right)t\right] \cdot u(t)$$

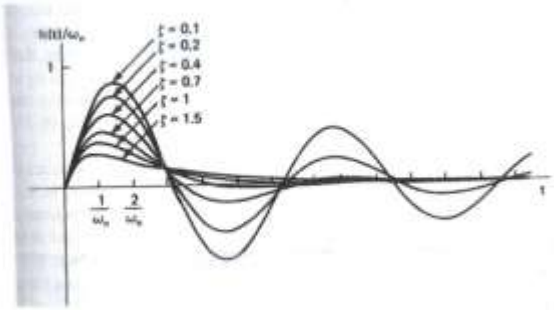
↳ ταλάντωση

Για $\boxed{\zeta>1}$ OVERDAMPED

$h(t) =$ διαφορά εκθετικών $= \cdots$

Για $\boxed{\zeta=1}$ CRITICALLY DAMPED

$$h(t) = \omega_n^2 \, t \, e^{-\omega_n t} u(t)$$



Σχ. 6.22(a) από βιβλίο Oppenheim-Willsky

6.4. Γ.Χ.Α. Συστήματα Συνεχούς Χρόνου 1ης / 2ης Τάξης (VIII)

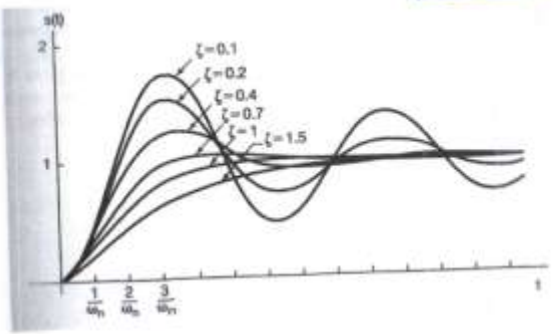
ΒΗΜΑΤΙΚΗ ΑΠΟΚΡΙΣΗ:

$$s(t) = h(t) * u(t) = \begin{cases} 1 + M\left(\dfrac{e^{c_1 t}}{c_1} - \dfrac{e^{c_2 t}}{c_2}\right) u(t), & \boxed{\zeta \neq 1} \\ \left[1 - e^{-\omega_n t} - \omega_n t\, e^{-\omega_n t}\right] u(t), & \boxed{\zeta = 1} \end{cases}$$

$0 < \zeta < 1$: $s(t)$ OVERSHOOTS, RINGING

$\zeta = 1$: $s(t)$ fastest response

$\zeta > 1$: $s(t)$ response slows



Σχ. 6.22(b) από βιβλίο Oppenheim-Willsky

ω_n: Επηρεάζει την χρονική κλίμακα σε $h(t)$ & $s(t)$

6.4. Γ.Χ.Α. Συστήματα Συνεχούς Χρόνου 1ης / 2ης Τάξης (IX)

ΑΠΟΚΡΙΣΗ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑΣ : / ΜΕΤΡΟ

$$20\log_{10}|H(j\Omega)| = -10\log_{10}\left[\left[1-\left(\frac{\Omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + 4\zeta^2\left(\frac{\Omega}{\omega_n}\right)^2\right]$$

$$\simeq \begin{cases} 0, & \text{για } \Omega \ll \omega_n \\ -40\log_{10}\Omega + 40\log_{10}\omega_n, & \text{για } \Omega \gg \omega_n \end{cases}$$

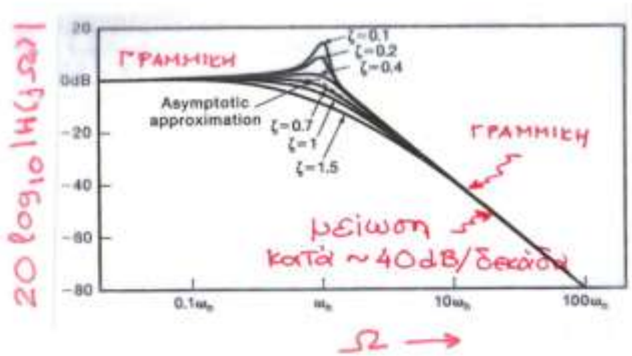
ΚΟΡΥΦΗ →

για $\boxed{\zeta < \sqrt{2}/2}$

$$\arg\max_{\Omega} |H(j\Omega)| = \omega_n\sqrt{1-2\zeta^2}$$

$$|H(j\Omega_{MAX})| = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-2\zeta^2}}$$

$\zeta\downarrow \Rightarrow$ Αυξάνεται η κορυφή



Σχ. 6.23(a) από βιβλίο Oppenheim-Willsky (τροποποιημένο)

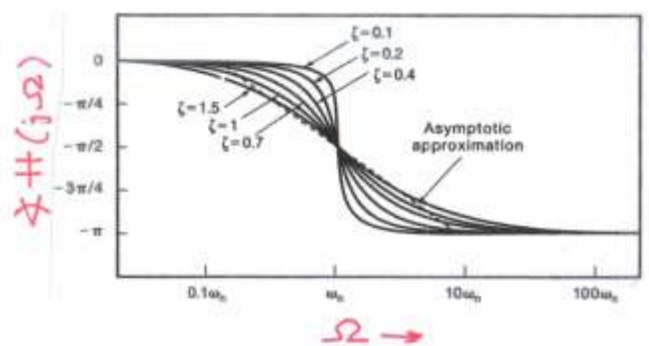
(μεγάλη διαφοροποίηση/σφάλμα για μικρά ζ)

6.4. Γ.Χ.Α. Συστήματα Συνεχούς Χρόνου 1ης / 2ης Τάξης (Χ)

ΑΠΟΚΡΙΣΗ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑΣ : / ΦΑΣΗ

$$\sphericalangle H(j\Omega) = -\arctan\left[\frac{2\zeta\,\Omega/\omega_n}{1-(\Omega/\omega_n)^2}\right]$$

$$\simeq \begin{cases} 0, & \text{για } \boxed{\Omega \leq 0.1\,\omega_n} \\ -\frac{\pi}{2}\left[\log_{10}\left(\frac{\Omega}{\omega_n}\right)+1\right], & \text{για } \boxed{\frac{\omega_n}{10} \leq \Omega \leq 10\,\omega_n} \\ -\pi, & \text{για } \boxed{\Omega \geq 10\,\omega_n} \end{cases}$$



Σχ. 6.23(b) από βιβλίο Oppenheim-Willsky (τροποποιημένο)

6.4. Γ.Χ.Α. Συστήματα Συνεχούς Χρόνου 1ης / 2ης Τάξης (XI)

3 ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ BODE ΓΙΑ ΡΗΤΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΑΠΟΚΡΙΣΗΣ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑΣ

- Διαγράμματα Bode εάν τα παραπάνω, μπορούν να χρησιμοποιηθούν για πιο πολύπλοκα συστήματα.
- Επίσης τα διαγράμματα για $H(j\Omega) = 1 + j\Omega\tau$ & $H(j\Omega) = 1 + 2\zeta\left(\frac{j\Omega}{\omega_n}\right) + \left(\frac{j\Omega}{\omega_n}\right)^2$ (αντίθετο πρόσημο)
- Επίσης $\boxed{H(j\Omega) = K} \Longrightarrow \begin{cases} 20\log_{10}|H(j\Omega)| = 20\log_{10}|K| \\ \measuredangle H(j\Omega) = \begin{cases} 0, & K>0 \\ \pi, & K<0 \end{cases} \end{cases}$
- Με CASCADE/εν σειρά συνδυασμό παραπάνω αποκρ. συχνότητας μπορούμε να ΑΘΡΟΙΣΟΥΜΕ τα διαγράμματα Bode.

6.4. Γ.Χ.Α. Συστήματα Συνεχούς Χρόνου 1ης / 2ης Τάξης (XII)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ:

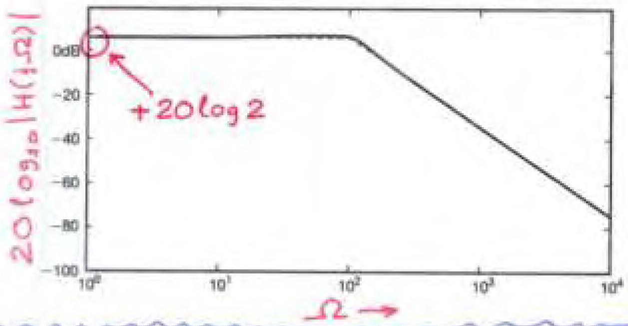
① $$H(j\Omega) = \frac{2\times 10^4}{(j\Omega)^2 + 100(j\Omega) + 10^4} = 2\cdot\hat{H}(j\Omega)$$

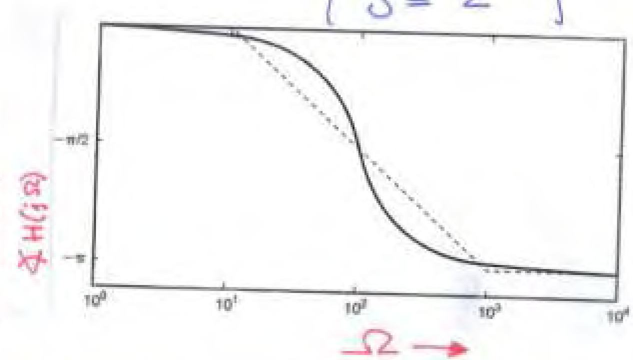
ΣΥΣΤΗΜΑ 2ΗΣ ΤΑΞΗΣ

$\omega_n = 100$

$\zeta = 2$

Σχ. 6.24 από βιβλίο Oppenheim-Willsky (τροποποιημένο)





② $$H(j\Omega) = \left(\frac{1}{10}\right)\left(\frac{1}{1+\frac{j\Omega}{10}}\right)\left(\frac{1}{1+\frac{j\Omega}{100}}\right)(1+j\Omega)$$

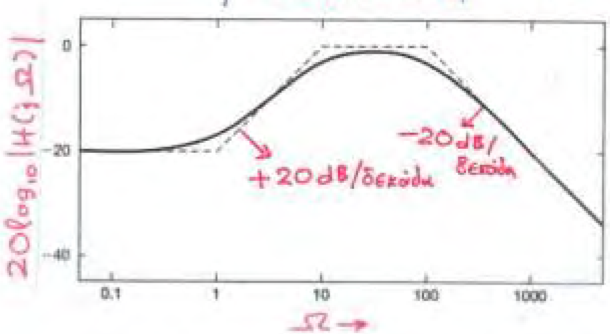
−20dB offset

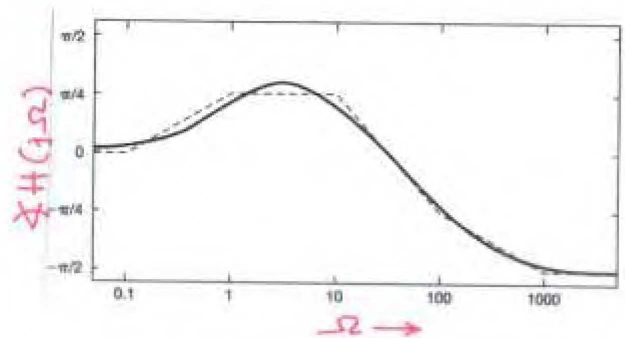
$\frac{1}{\tau} = 10$, −20dB/δεκάδα

$\frac{1}{\tau} = 100$, −20dB/δεκ

$\frac{1}{\tau} = 1$, +20dB/δεκάδα

Σχ. 6.25 από βιβλίο Oppenheim-Willsky (τροποποιημένο)





6.5. Γ.Χ.Α. Συστήματα Διακριτού Χρόνου 1ης / 2ης Τάξης (I)

- Όπως και για τον συνεχή χρόνο, θα μελετήσουμε συστήματα διακριτού χρόνου 1ης & 2ης τάξης.
- Πιο πολύπλοκα συστήματα μπορούν να υλοποιηθούν/μελετηθούν με παράλληλο ή εν-σειρά συνδυασμό των 1ης & 2ης ΤΑΞΗΣ.

1 ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΔΙΑΚΡΙΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ 1ΗΣ ΤΑΞΗΣ

ΕΞΙΣΩΣΗ ΔΙΑΦΟΡΩΝ: $\boxed{y[n] - a\,y[n-1] = x[n]}$ με $\boxed{|a|<1}$

ΑΠΟΚΡΙΣΗ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑΣ: $\boxed{H(e^{j\omega}) = \dfrac{1}{1 - a e^{-j\omega}}}$

ΚΡΟΥΣΤΙΚΗ ΑΠΟΚΡΙΣΗ: $\boxed{h[n] = a^n u[n]}$

ΒΗΜΑΤΙΚΗ ΑΠΟΚΡΙΣΗ: $\boxed{s[n] = h[n] * u[n] = \dfrac{1 - a^{n+1}}{1 - a} u[n]}$

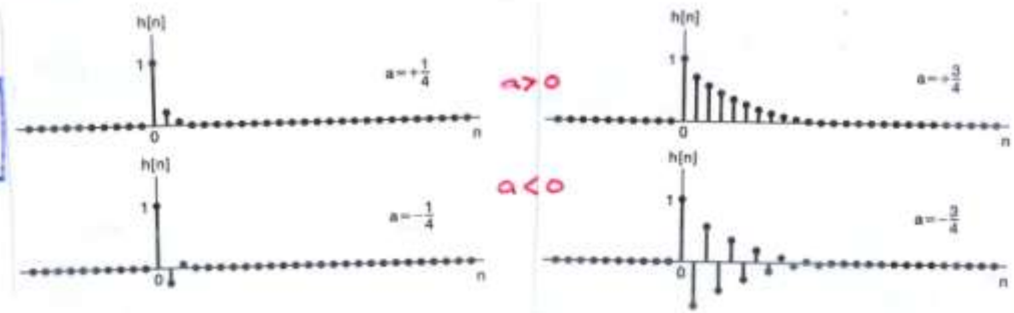
6.5. Γ.Χ.Α. Συστήματα Διακριτού Χρόνου 1ης / 2ης Τάξης (ΙΙ)

$\boxed{0 < |a| < 1}$ $\quad |a| \uparrow \longrightarrow$

ΚΡΟΥΣΤΙΚΗ

$$\boxed{h[n] = a^n u[n]}$$

ΑΠΟΚΡΙΣΗ

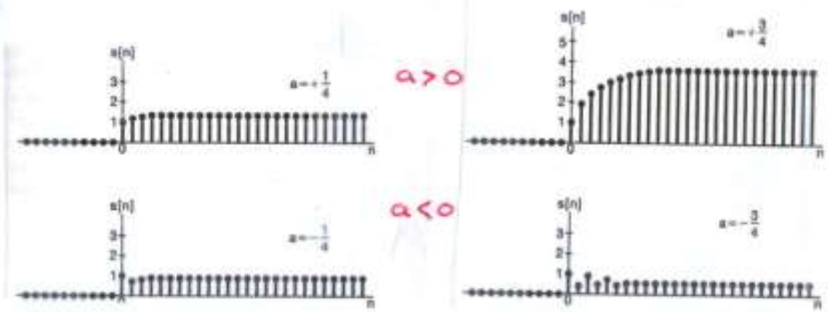


Σχ. 6.26(a,c) από βιβλίο Oppenheim-Willsky (τροποποιημένα)

ΒΗΜΑΤΙΚΗ

$$\boxed{s[n] = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}u[n]}$$

ΑΠΟΚΡΙΣΗ



Σχ. 6.27(a,c) από βιβλίο Oppenheim-Willsky (τροποποιημένα)

- Για $\boxed{|a| \text{ μικρό}}$, η $h[n]$ μειώνεται γρήγορα, η $s[n]$ σταθεροποιείται γρήγορα
- Για $\boxed{|a| \text{ μεγάλο}}$ (πιο κοντά στο 1) τα $h[n]$, $s[n]$ έχουν πιό αργή μεταβολή
- Για $\boxed{a<0}$, έχουμε φαινόμενα ταλάντωσης (εν αντιθέσει με συνεχή χρόνο)

6.5. Γ.Χ.Α. Συστήματα Διακριτού Χρόνου 1ης / 2ης Τάξης (ΙΙΙ)

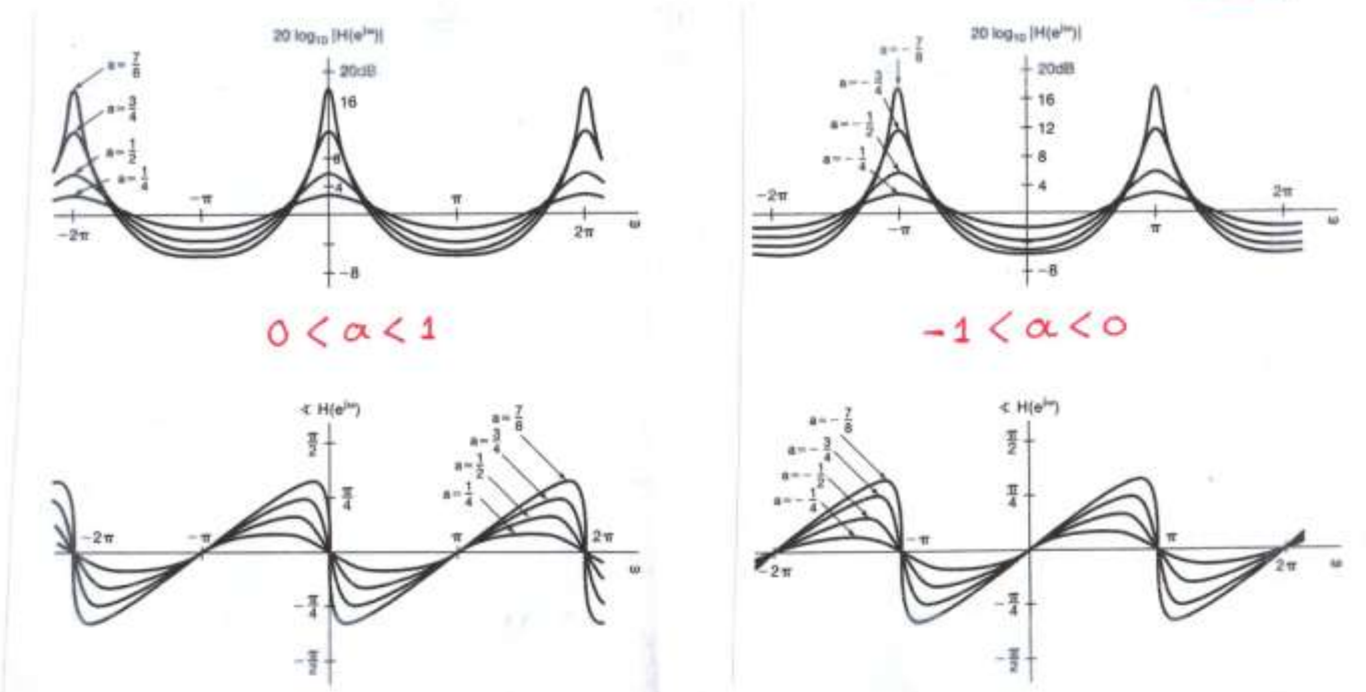
ΑΠΟΚΡΙΣΗ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑΣ:

$$|H(e^{j\omega})| = \frac{1}{(1 + a^2 - 2a\cos\omega)^{1/2}}$$

ΜΕΤΡΟ

$$\sphericalangle H(e^{j\omega}) = -\arctan\left[\frac{a\sin\omega}{1 - a\cos\omega}\right]$$

ΦΑΣΗ



Σχ. 6.28(a,b) από βιβλίο Oppenheim-Willsky (τροποποιημένα)

6.5. Γ.Χ.Α. Συστήματα Διακριτού Χρόνου 1ης / 2ης Τάξης (IV)

② ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΔΙΑΚΡΙΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ 2ΗΣ ΤΑΞΗΣ

ΕΞΙΣΩΣΗ ΔΙΑΦΟΡΩΝ:

$$\boxed{y[n] - 2r\cos\theta\, y[n-1] + r^2 y[n-2] = x[n]}$$

με $\boxed{0<r<1}$ και $\boxed{0\le\theta\le\pi}$

ΑΠΟΚΡΙΣΗ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑΣ:

$$\boxed{H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1-2r\cos\theta\, e^{-j\omega} + r^2 e^{-j2\omega}}}$$

ΑΝΑΛΥΣΗ ΣΕ ΜΕΡΙΚΑ ΚΛΑΣΜΑΤΑ:

ΓΙΑ $\theta \neq 0,\pi$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{(1-re^{j\theta}e^{-j\omega})(1-re^{-j\theta}e^{-j\omega})} = \frac{A}{1-re^{j\theta}e^{-j\omega}} + \frac{B}{1-re^{-j\theta}e^{-j\omega}}$$

$$A = \frac{e^{j\theta}}{2j\sin\theta} \qquad B = \frac{e^{-j\theta}}{2j\sin\theta}$$

$$\Longrightarrow \boxed{h[n] = r^n \frac{\sin[(n+1)\theta]}{\sin\theta} u[n]}$$

ΓΙΑ $\theta=0$: $H(e^{j\omega}) = \dfrac{1}{(1-re^{-j\omega})^2} \Longrightarrow \boxed{h[n] = (n+1)r^n u[n]}$

ΓΙΑ $\theta=\pi$: $H(e^{j\omega}) = \dfrac{1}{(1+re^{-j\omega})^2} \Longrightarrow \boxed{h[n] = (n+1)(-r)^n u[n]}$

6.5. Γ.Χ.Α. Συστήματα Διακριτού Χρόνου 1ης / 2ης Τάξης (V)

ΚΡΟΥΣΤΙΚΗ ΑΠΟΚΡΙΣΗ

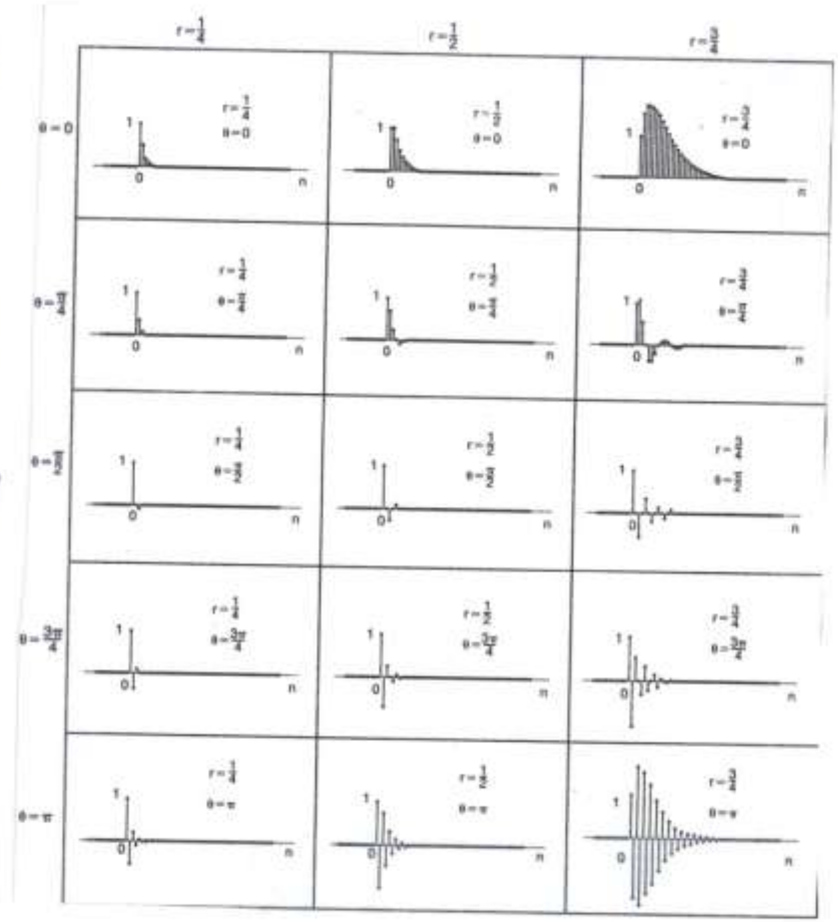
r: Επηρεάζει ρυθμό μείωσης πλάτους της $h[n]$

($r \downarrow \Rightarrow h[n]$ μειώνεται πιο γρήγορα)

θ: Επηρεάζει ρυθμό ταλάντωσης της $h[n]$

$\theta = 0$: δεν υπάρχει ταλάντωση

$\theta = \pi$: Ταχεία Ταλάντωση



Σχ. 6.29 από βιβλίο Oppenheim-Willsky

6.5. Γ.Χ.Α. Συστήματα Διακριτού Χρόνου 1ης / 2ης Τάξης (VI)

ΒΗΜΑΤΙΚΗ ΑΠΟΚΡΙΣΗ :

$\boxed{\theta \neq 0, \pi}$

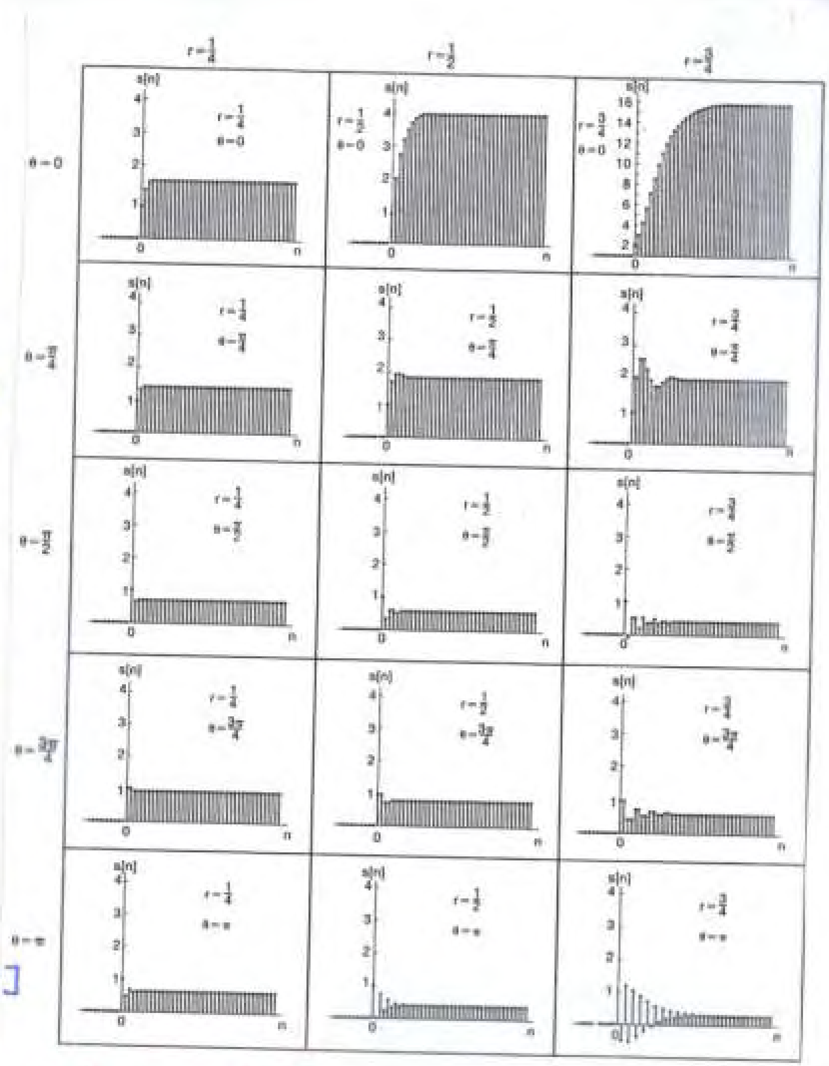
$$s[n] = \left[A\left(\frac{1-(re^{j\theta})^{n+1}}{1-re^{j\theta}}\right) + B\left(\frac{1-(re^{-j\theta})^{n+1}}{1-re^{-j\theta}}\right)\right]u[n]$$

$\boxed{\theta = 0}$

$$s[n] = \left[\frac{1}{(r-1)^2} - \frac{r}{(r-1)^2}r^n + \frac{r}{r-1}(n+1)r^n\right]u[n]$$

$\boxed{\theta = \pi}$

$$s[n] = \left[\frac{1}{(r+1)^2} + \frac{r}{(r+1)^2}(-r)^n + \frac{r}{r+1}(n+1)(-r)^n\right]u[n]$$

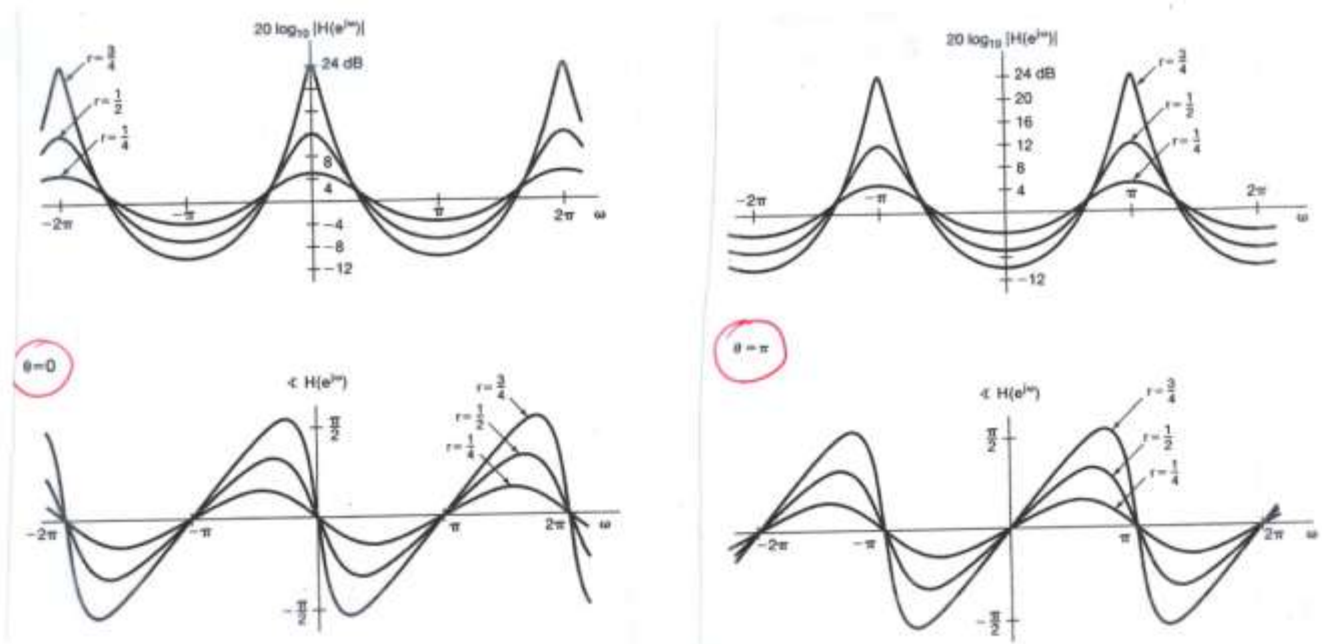


ΠΑΡΟΥΣΙΑΖΕΙ "RINGING" & "OVERSHOOT" (εκτός εάν $\theta=0$)

Σχ. 6.30 από βιβλίο Oppenheim-Willsky

6.5. Γ.Χ.Α. Συστήματα Διακριτού Χρόνου 1ης / 2ης Τάξης (VII)

ΑΠΟΚΡΙΣΗ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑΣ:



Σχ. 6.31(a,e) από βιβλίο Oppenheim-Willsky (τροποποιημένα)

6.5. Γ.Χ.Α. Συστήματα Διακριτού Χρόνου 1ης / 2ης Τάξης (VIII)

③ ΕΝΑΛΛΑΚΤΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ 2ΗΣ ΤΑΞΗΣ

Εξίσωση διαφορών:

$$\boxed{y[n] - (d_1 + d_2)y[n-1] + d_1 d_2\, y[n-2] = x[n]}$$

με $\boxed{d_1, d_2 \in \mathbb{R}}$, $\boxed{|d_1|, |d_2| < 1}$

Απόκριση συχνότητας:

$$\boxed{H(e^{j\omega}) = \frac{1}{(1 - d_1 e^{-j\omega})(1 - d_2 e^{-j\omega})}}$$

→ CASCADE 2 ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ 1ΗΣ ΤΑΞΗΣ

Ανάλυση σε μερικά κλάσματα:

(για $d_1 \neq d_2$)

$$H(e^{j\omega}) = \frac{A}{1 - d_1 e^{-j\omega}} + \frac{B}{1 - d_2 e^{-j\omega}}, \quad A = \frac{d_1}{d_1 - d_2}, \quad B = \frac{d_2}{d_2 - d_1}$$

Κρουστική & Βηματική Απόκριση:

$$h[n] = [A d_1^n + B d_2^n]\, u[n]$$

$$s[n] = \left[A \left(\frac{1 - d_1^{n+1}}{1 - d_1} \right) + B \left(\frac{1 - d_2^{n+1}}{1 - d_2} \right) \right] u[n]$$