ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ

Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών

ΘΕΩΡΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ & ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

Γεράσιμος Ποταμιάνος

Αναπλ. Καθηγητής,
Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
και Μηχανικών Υπολογιστών

Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

http://www.inf.uth.gr/~gpotamianos

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών

ΘΕΩΡΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ & ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

Ενότητα 7: ΔΕΙΓΜΑΤΟΛΗΨΙΑ

7.0. Εισαγωγή
7.1. Δειγματοληψία Σημάτων Συνεχούς Χρόνου
7.2. Ανακατασκευή Σημάτων Συνεχούς Χρόνου από τα Δείγματά του
7.3. Το Φαινόμενο της Αναδίπλωσης
7.4. Επεξεργασία Σημάτων Συνεχούς Χρόνου σε Διακριτό Χρόνο

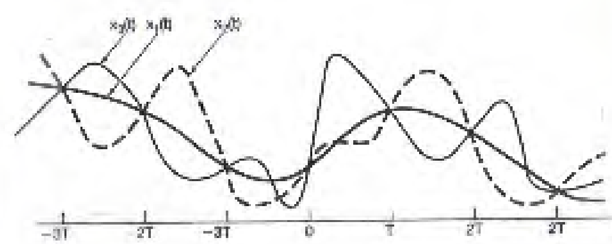
7.0. Εισαγωγή

- Μέχρι τώρα έχουμε μελετήσει **συνεχή χρόνο** και **διακριτό χρόνο** ξεχωριστά.
- Στο κεφάλαιο αυτό θα δούμε πως:
  - ✓ Σήματα διακριτού χρόνου προκύπτουν από σήματα συνεχούς χρόνου (**δειγματοληψία** / **sampling**).
  - ✓ Σήματα συνεχούς χρόνου προκύπτουν από σήματα διακριτού χρόνου (**ανακατασκευή** / **reconstruction**).
- Οι δύο διαδικασίες (σε σειρά) λαμβάνουν χώρα:
  - ✓ Χωρίς απώλεια πληροφορίας εάν τηρούνται οι συνθήκες του **θεωρήματος δειγματοληψίας** (**sampling theorem**).
  - ✓ Αλλιώς παρατηρείται το φαινόμενο της **αναδίπλωσης** (**aliasing**).
- Μεγάλη πρακτική σημασία, π.χ., γιατί επιτρέπει την **επεξεργασία** σημάτων συνεχούς χρόνου στο πεδίο του **διακριτού χρόνου** (**discrete-time signal processing**).

7.1. Δειγματοληψία Σημάτων Συνεχούς Χρόνου – Γενικά

- Δειγματοληψία (Sampling): Διαδικασία παραγωγής δειγμάτων ενός σήματος συνεχούς χρόνου.
- Συνεπάγεται την παραγωγή ενός σήματος διακριτού χρόνου.
- Εν γένει, άπειρα σήματα συνεχούς χρόνου μπορούν να δημιουργήσουν μία συγκεκριμένη ακολουθία δειγμάτων
- Υπό ορισμένες συνθήκες τα δείγματα αυτά μπορούν να καθορίσουν πλήρως το αρχικό σήμα συνεχούς χρόνου.

$$\boxed{\begin{array}{l} x_1(kT) = x_2(kT) = x_3(kT) \\ \not\Rightarrow x_1(t) = x_2(t) = x_3(t) \end{array}}$$



Σχ. 7.1 από βιβλίο Oppenheim-Willsky

7.1. Δειγματοληψία με Σειρά Κρουστικών (I)

- IMPULSE TRAIN SAMPLING

$$\boxed{p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t-nT)}$$

ΑΚΟΛΟΥΘΙΑ ΚΡΟΥΣΤΙΚΩΝ (IMPULSE TRAIN)

ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΔΕΙΓΜΑΤΟΛΗΨΙΑΣ (SAMPLING FUNCTION)

ΠΕΡΙΟΔΟΣ ΔΕΙΓΜΑΤΟΛΗΨΙΑΣ (SAMPLING PERIOD)

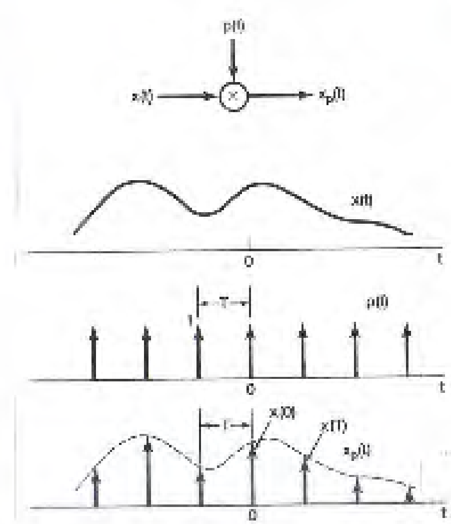
$$\boxed{\omega_s = \frac{2\pi}{T}}$$

ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ ΔΕΙΓΜΑΤΟΛΗΨΙΑΣ (SAMPLING FREQ.)

ΣΗΜΑ ΣΥΝΕΧΟΥΣ ΧΡΟΝΟΥ

$$\boxed{x_p(t) = x(t).p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \underbrace{x(nT)}_{X_d[n]}\delta(t-nT)}$$

- Τι συμβαίνει στο πεδίο της συχνότητας;



Σχ. 7.2 από βιβλίο Oppenheim-Willsky

7.1. Δειγματοληψία με Σειρά Κρουστικών (II)

- Πεδίο συχνότητας:

$$x_p(t) = x(t)\,p(t) \Longrightarrow$$

$$\rightarrow X_p(j\Omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(j\theta)P(j(\Omega-\theta))\,d\theta \qquad (1)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\, X(j\Omega) * P(j\Omega)$$

ΣΥΝΕΛΙΞΗ ΣΤΟ ΠΕΔΙΟ ΤΗΣ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑΣ

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-nT) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow P(j\Omega) = \frac{2\pi}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(\Omega - k\Omega_s) \qquad (2)$$

$\Omega_s = \frac{2\pi}{T}$

$$(1),(2) \Longrightarrow \boxed{X_p(j\Omega) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(j(\Omega - k\Omega_s))}$$

ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ ΦΑΣΜΑ

7.1. Δειγματοληψία με Σειρά Κρουστικών (ΙΙΙ)

- Ας υποθέσουμε ότι το $x(t)$ είναι ζωνοπεριορισμένο (bandlimited) σήμα, δηλαδή:

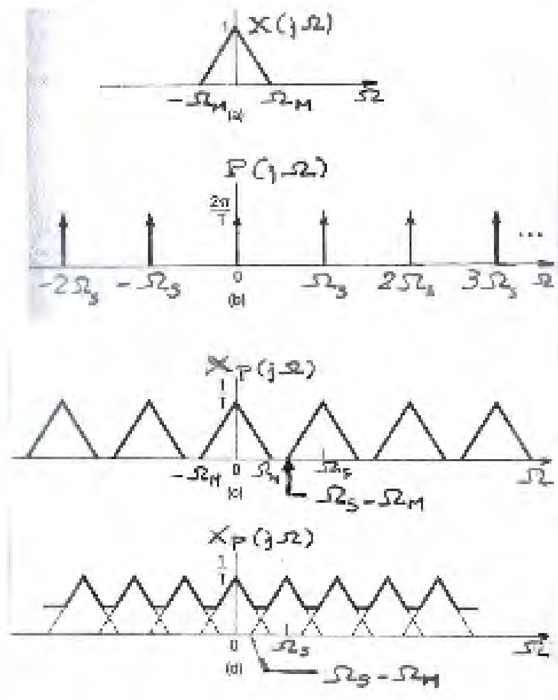
$$\boxed{X(j\Omega) = 0\,, \quad \forall \ |\Omega| > \Omega_M}$$

- Τότε, για:

$$\Omega_s - \Omega_M > \Omega_M \Leftrightarrow \boxed{\Omega_s > 2\Omega_M}$$

ΔΕΝ ΥΠΑΡΧΕΙ ΕΠΙΚΑΛΥΨΗ των μετατοπισμένων φασμάτων

- Ωστόσο, για $\Omega_s < 2\Omega_M$ ΥΠΑΡΧΕΙ ΕΠΙΚΑΛΥΨΗ και δεν είναι δυνατή η ανάκτηση του αρχικού φάσματος



Σχ. 7.3 από βιβλίο Oppenheim-Willsky (τροποποιημένο)

7.1. Δειγματοληψία με Σειρά Κρουστικών (IV)

- ΘΕΩΡΗΜΑ ΔΕΙΓΜΑΤΟΛΗΨΙΑΣ / SAMPLING THEOREM:

Αν $\boxed{x(t)}$ είναι ζωνοπεριορισμένο σήμα με

$$\boxed{X(j\Omega) = 0, \text{ για } |\Omega| > \Omega_M}$$

τότε το $x(t)$ καθορίζεται πλήρως από τα δείγματά του

$$\boxed{x(nT), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots}$$

εάν

NIQUIST FREQUENCY

$$\boxed{\frac{2\pi}{T} = \Omega_s > \underbrace{2\Omega_M}_{\text{NIQUIST RATE}}}$$

(Shannon, 1949)

7.2. Ανακατασκευή Σημάτων Συνεχούς Χρόνου (Ι)

- Ιδανική ανακατασκευή / ideal reconstruction

- Ιδανικό κατωπερατό φίλτρο (lowpass filter)

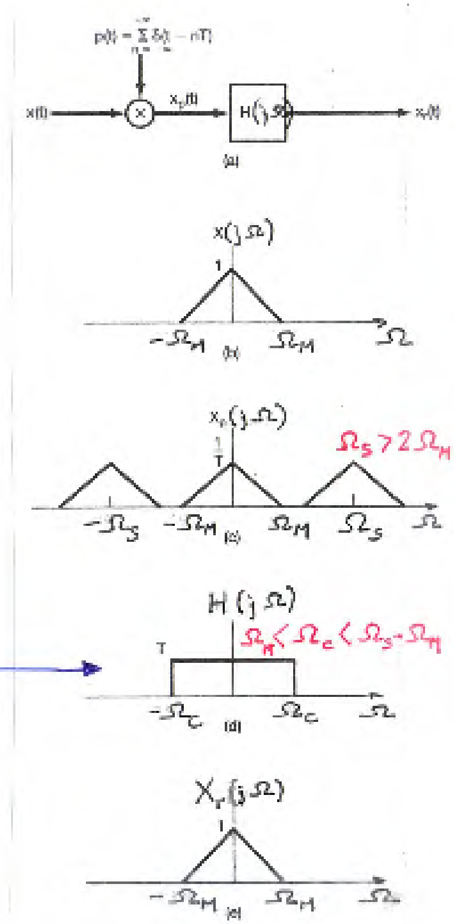
ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ ΑΠΟΚΟΠΗΣ:

$$\Omega_M < \Omega_c < \Omega_s - \Omega_M$$

↑ CUTOFF FREQUENCY $(\Omega_s/2)$

ΚΕΡΔΟΣ:

T ← GAIN



Σχ. 7.4 από βιβλίο Oppenheim-Willsky (τροποποιημένο)

7.2. Ανακατασκευή Σημάτων Συνεχούς Χρόνου (ΙΙ)

- Στο πεδίο του χρόνου

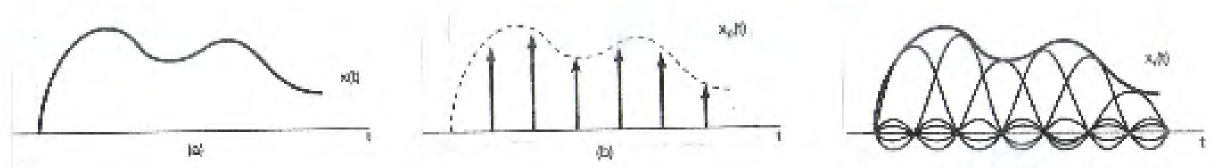
$$\left.\begin{aligned} h(t) &= T \cdot \frac{\sin(\Omega_c t)}{\pi t} \\ x_p(t) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT)\,\delta(t-nT) \end{aligned}\right\} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow x_r(t) = h(t) * x_p(t) = $$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT) \frac{\Omega_c T}{\pi} \frac{\sin(\Omega_c (t-nT))}{\Omega_c (t-nT)}$$

ΟΛΑ ΤΑ ΔΕΙΓΜΑΤΑ

1 για $\Omega_c = \frac{\Omega_s}{2}$



Σχ. 7.10 από βιβλίο Oppenheim-Willsky

7.3. Φαινόμενο Αναδίπλωσης (I)

- Όταν τα μετατοπισμένα φάσματα έχουν επικάλυψη τότε το αρχικό σήμα δεν μπορεί να ανακατασκευαστεί με κατωπερατό φιλτράρισμα $\Rightarrow$ ΑΝΑΔΙΠΛΩΣΗ / ALIASING

- ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

$x(t) = \cos \Omega_0 t$

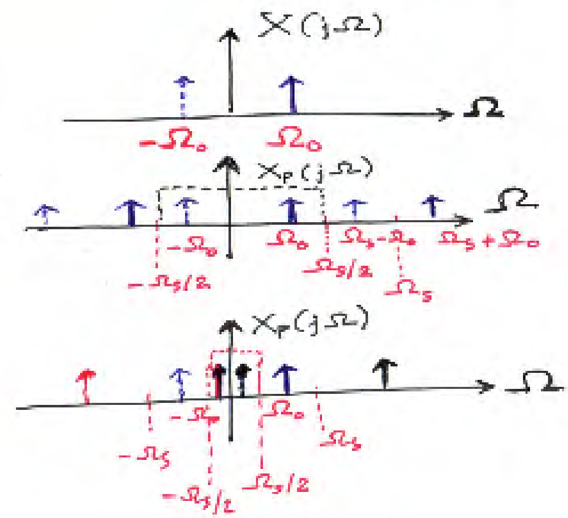
$\Omega_s > 2\Omega_0$ ⇝

ΟΧΙ ΑΝΑΔΙΠΛΩΣΗ

$x_r(t) = \cos(\Omega_s - \Omega_0)t$

$\Omega_s < 2\Omega_0$ ⇝

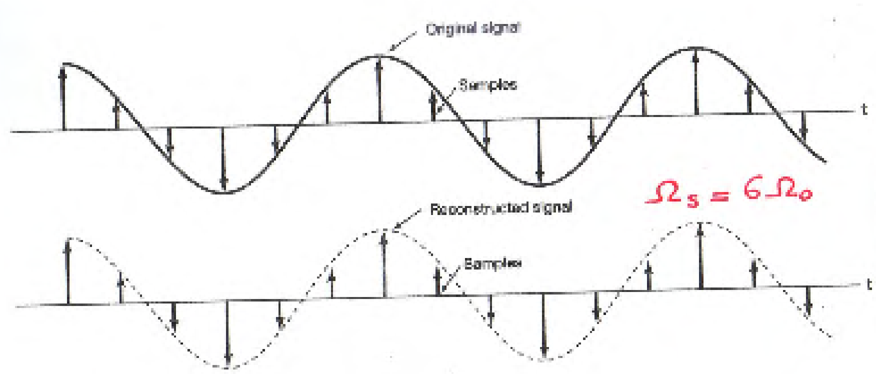
ΑΝΑΔΙΠΛΩΣΗ



7.3. Φαινόμενο Αναδίπλωσης (ΙΙ)

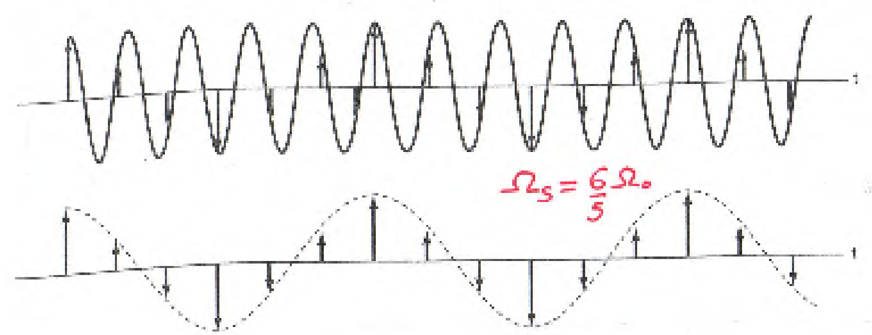
- ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

NO ALIASING →



Σχ. 7.16(a) από βιβλίο Oppenheim-Willsky (τροποποιημένο)

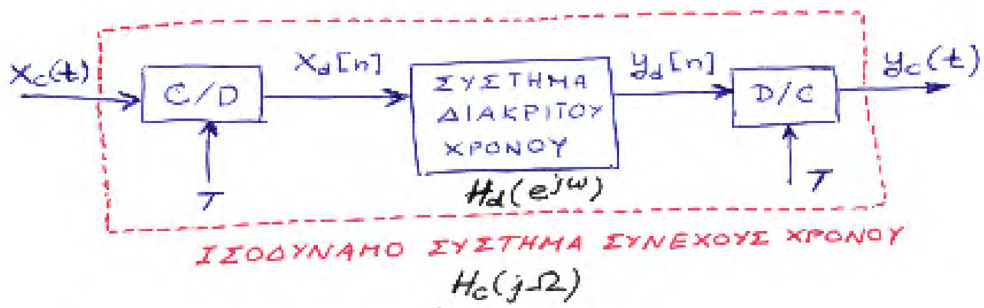
ALIASING →



Σχ. 7.16(d) από βιβλίο Oppenheim-Willsky (τροποποιημένο)

7.4. Επεξεργασία Σημάτων Συνεχούς Χρόνου σε Διακριτό Χρόνο (Ι)

- Πολύ συχνά, η επεξεργασία σήματος στον διακριτό χρόνο είναι πιο επιθυμητή από ότι στον συνεχή.



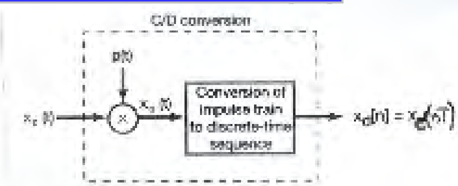
- Πρέπει:
  - $x_c(t)$ ΖΩΝΟΠΕΡΙΟΡΙΣΜΕΝΟ
  - T ΝΑ ΠΛΗΡΕΙ ΤΗ ΣΥΝΘΗΚΗ NIQUIST

Τότε:

$$H_c(j\Omega) = \begin{cases} H_d(e^{j\Omega T}), & |\Omega| < \Omega_s/2 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

7.4. Επεξεργασία Σημάτων Συνεχούς Χρόνου σε Διακριτό Χρόνο (ΙΙ)

- Μετατροπή C/D



Σχ. 7.21 από βιβλίο Oppenheim-Willsky (μερικό, τροποποιημένο)

$$x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_c(nT)\,\delta(t-nT)$$

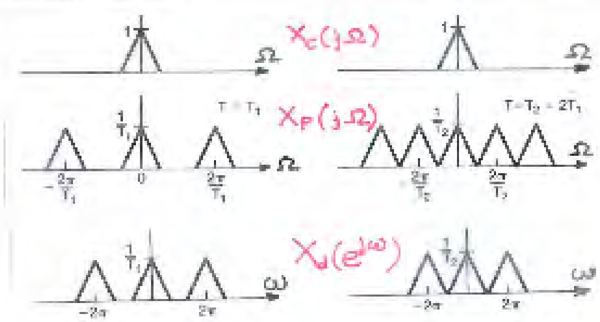
$$\xrightarrow{\mathcal{F}} X_p(j\Omega) = \boxed{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_c(nT)\,e^{-j\Omega nT}} \quad (1)$$

$$\mathrm{DTFT}\{x_d[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_d[n]\,e^{-j\omega n} \underset{x_d[n]=x_c(nT)}{=} \boxed{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_c(nT)\,e^{-j\omega n}} \quad (2)$$

$\hookrightarrow X_d(e^{j\omega})$

$$(1),(2) \Rightarrow \boxed{X_d(e^{j\omega}) = X_p\left(j\frac{\omega}{T}\right) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_c\left(j\left(\frac{\omega-2\pi k}{T}\right)\right)}$$

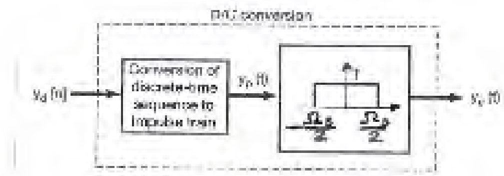
$\hookrightarrow$ περιοδικό με περίοδο 2π



$\boxed{\omega = \Omega T}$

κλιμάκωση

7.4. Επεξεργασία Σημάτων Συνεχούς Χρόνου σε Διακριτό Χρόνο (III)



Σχ. 7.23 από βιβλίο Oppenheim-Willsky (τροποποιημένο)

- Μετατροπή D/C

Αντίστροφη διαδικασία του προηγούμενου βήματος (με κατωπερατό φιλτράρισμα)

- Επεξεργασία με σύστημα διακριτού χρόνου

$$x_d[n] \rightarrow \boxed{H(e^{j\omega})} \rightarrow y_d[n]$$

$$\boxed{Y_d(e^{j\omega}) = X_d(e^{j\omega})H_d(e^{j\omega})}$$

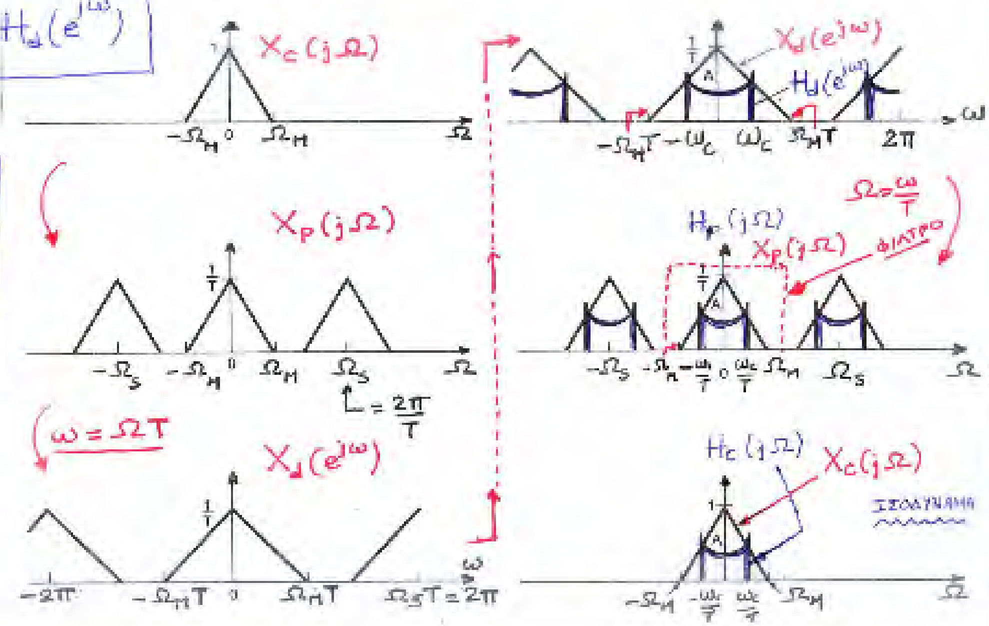
$$\Downarrow$$

$$Y_c(j\Omega) = X_c(j\Omega) \cdot H_d(e^{j\Omega T})$$

$$\boxed{\text{για } |\Omega| < \Omega_s/2}$$

$$\Downarrow$$

$$H_c(j\Omega) = \begin{cases} H_d(e^{j\Omega T}), & \text{για} \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$



Σχ. 7.25 από βιβλίο Oppenheim-Willsky (τροποποιημένο)