ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ

Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών

ΘΕΩΡΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ & ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

Γεράσιμος Ποταμιάνος

Αναπλ. Καθηγητής,
Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
και Μηχανικών Υπολογιστών

Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

http://www.inf.uth.gr/~gpotamianos

ΘΕΩΡΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ & ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

Ενότητα 9: ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ LAPLACE

9.0. Εισαγωγή

- Αποτελεί γενίκευση του μ/σ Fourier συνεχούς χρόνου.
- Προσφέρει επιπλέον εργαλεία για ανάλυση σημάτων και Γ.Χ.Α. συστημάτων.
- Επιπλέον επιτρέπει ανάλυση πολλών Γ.Χ.Α. συστημάτων που είναι ασταθή – και για τα οποία ο μ/σ Fourier δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί.
- Υπάρχουν δύο μορφές του μ/σ Laplace:
  - ✓ Δίπλευρος (double-sided)
  - ✓ Μονόπλευρος (one-sided)
- Θα επικεντρωθούμε κυρίως στον πρώτο.
- Αντίστοιχα, θα κινηθούμε και για σήματα και Γ.Χ.Α συστήματα διακριτού χρόνου (στο κεφ. 10), γενικεύοντας τον DTFT με τον μ/σ Z.

9.1. Μ/Σ Laplace – Ορισμός (Ι)

Υπενθύμιση:

$$x(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t)$$

$x(t) = e^{st}$ $\downarrow$ Ειδική περίπτωση: $s = j\Omega$

$y(t) = e^{st} H(s)$, $H(s) \longrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) e^{-st} dt \xrightarrow{s=j\Omega}$ Μ/Σ Fourier

Μ/Σ LAPLACE σήματος $x(t)$:

$$\boxed{X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-st} dt}$$

$$x(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} X(s)$$

$s = \sigma + j\Omega$, $\sigma \in \mathbb{R}$, $\Omega \in \mathbb{R}$

$$\boxed{X(s)\Big|_{s=j\Omega} = \mathcal{F}\{x(t)\}}$$

$$\boxed{X(s) = \mathcal{F}\{x(t) e^{-\sigma t}\}}$$

9.1. Μ/Σ Laplace – Παραδείγματα (Ι)

1: $\boxed{x(t) = e^{-at}u(t)}$

- θυμίζουμε: $X(j\Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at}u(t)e^{-j\Omega t}dt = \dfrac{1}{j\Omega + a}$, $a > 0$

- $X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at}u(t)e^{-st}dt = \int_{0}^{+\infty} e^{-(s+a)t}dt \overset{s=\sigma+j\Omega}{=} \int_{0}^{+\infty} e^{-(\sigma+a)t}e^{-j\Omega t}dt$

$$= \frac{1}{(\sigma+a)+j\Omega} = \boxed{\frac{1}{s+a}} \quad \boxed{Re\{s+a\} > 0}$$

$\sigma + a > 0$

ή (με $a \in \mathbb{R}$)

$\boxed{Re\{s\} > -a}$

ΠΕΡΙΟΧΗ ΣΥΓΚΛΙΣΗΣ

R.O.C.
Region of Convergence

- πχ: $\boxed{x(t) = u(t)} \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} \boxed{X(s) = 1/s \quad Re\{s\} > 0}$

- $a > 0 \Rightarrow s = j\Omega \in ROC \Rightarrow \mathcal{F}\{x(t)\} = X(s)\Big|_{s=j\Omega} = \dfrac{1}{j\Omega + a}$

9.1. Μ/Σ Laplace – Παραδείγματα (ΙΙ)

(2): $\boxed{x(t) = -e^{-at}u(-t)}$

$$\Rightarrow X(s) = -\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at}u(-t)e^{-st}\,dt = -\int_{-\infty}^{0} e^{-(s+a)t}\,dt$$

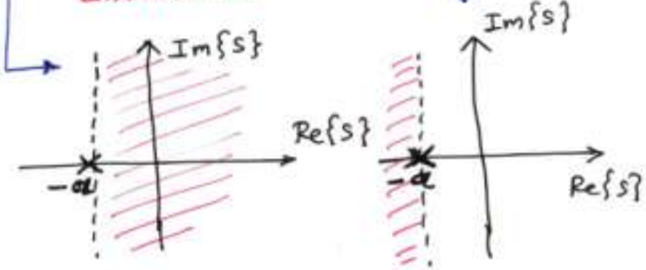
$$= \boxed{\frac{1}{s+a}}, \quad \text{με } \boxed{Re\{s+a\} < 0} \underset{a \in \mathbb{R}}{\Longleftrightarrow} \boxed{Re\{s\} < -a}$$

ΔΗΛΑΔΗ:

$$e^{-at}u(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{s+a}, \quad Re\{s+a\} > 0$$

$$-e^{-at}u(-t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} \underbrace{\frac{1}{s+a}}_{\text{ΙΔΙΑ}}, \quad \underbrace{Re\{s+a\} < 0}_{\text{ΔΙΑΦΕΡΟΥΝ}}$$

ΑΡΑ: Απαραίτητος ο προσδιορισμός της περιοχής σύγκλισης του μετασχηματισμού LAPLACE



ΠΕΡΙΟΧΕΣ ΣΥΓΚΛΙΣΗΣ

9.1. Μ/Σ Laplace – Παραδείγματα (III)

(3) $\boxed{x(t) = 3e^{-2t}u(t) - 2e^{-t}u(t)}$

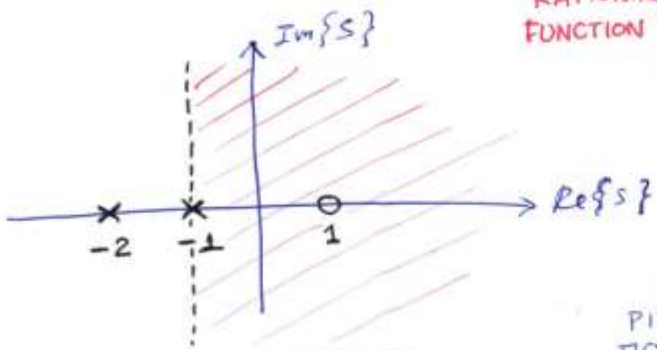
$$\Rightarrow X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-st}\,dt = \cdots\cdots \underset{\text{ΓΡΑΜΜΙΚΟΤΗΤΑ}}{=} \frac{3}{s+2} - \frac{2}{s+1}$$

για $\boxed{Re\{s\} > -1}$ για $\boxed{Re\{s\} > -2}$

$$\Rightarrow X(s) = \frac{3}{s+2} - \frac{2}{s+1} = \boxed{\frac{s-1}{s^2+3s+2}}, \quad \text{για } \boxed{Re\{s\} > -1}$$

ΤΟΜΗ ΤΩΝ ΔΥΟ ΠΑΡΑΠΑΝΩ ROCs

RATIONAL FUNCTION — ΡΗΤΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΛΟΓΟΥ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ



ΠΕΡΙΟΧΗ ΣΥΓΚΛΙΣΗΣ

ΠΟΛΟΙ: $\{-1, -2\}$ POLES

ΜΗΔΕΝΙΚΑ: $\{1, \infty\}$ ZEROS

ΡΙΖΕΣ ΠΟΛΥΩΝΥΜΟΥ ΠΑΡΟΝΟΜΑΣΤΗ (βαθμός 2)

ΡΙΖΕΣ ΠΟΛΥΩΝΥΜΟΥ ΑΡΙΘΜΗΤΗ (βαθμός 1)

ΔΙΑΦΟΡΑ 1 — 1 μηδενικό στο ∞

9.1. Μ/Σ Laplace – Παραδείγματα (IV)

4 $\boxed{x(t) = e^{-2t}u(t) + e^{-t}\cdot\cos(3t)\cdot u(t)}$

$$\Rightarrow x(t) = e^{-2t}u(t) + \frac{1}{2}e^{-(1-3j)t}u(t) + \frac{1}{2}e^{-(1+3j)t}u(t)$$

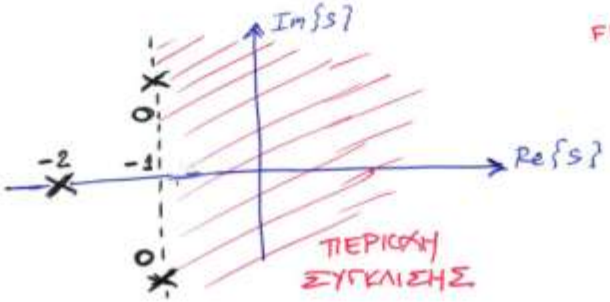
$\mathcal{L}$ $\quad$ $\mathcal{L}$ $\quad$ $\mathcal{L}$

$\boxed{\frac{1}{s+2};\ Re\{s\} > -2}$ $\quad$ $\boxed{\frac{1}{s+(1-3j)};\ Re\{s\} > -1}$ $\quad$ $\boxed{\frac{1}{s+(1+3j)};\ Re\{s\} > -1}$

ΤΟΜΗ ΤΩΝ ΤΡΙΩΝ ROC : $\boxed{Re\{s\} > -1}$

ΥΣΤΕΡΑ ΑΠΟ ΠΡΑΞΕΙΣ : $X(s) = \frac{1}{s+2} + \frac{1}{2}\frac{1}{s+(1-3j)} + \frac{1}{2}\frac{1}{s+(1+3j)} = \boxed{\frac{2s^2+5s+12}{(s^2+2s+10)(s+2)}}$

RATIONAL FUNCTION



ΠΟΛΟΙ: $\{-2,\ -1 \pm 3j\}$

ΜΗΔΕΝΙΚΑ : $\left\{-\frac{5}{4} \pm \frac{\sqrt{71}}{4}j,\ \infty\right\}$

Βαθμός πολ. παρονομαστή = Βαθμός πολ. αριθμητή + 1

9.1. Μ/Σ Laplace – Παραδείγματα (V)

5 $$\boxed{x(t) = \delta(t) - \frac{4}{3}e^{-t}u(t) + \frac{1}{3}e^{2t}u(t)}$$

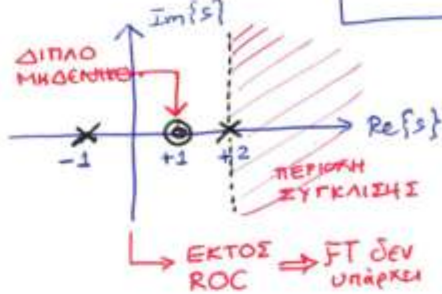
- $\mathcal{L}\{\delta(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)e^{-st}\,dt = 1$ (συγκλίνει παντού $\forall s$)

- $X(s) = 1 - \frac{4}{3}\frac{1}{s+1} + \frac{1}{3}\frac{1}{s-2} \rightarrow$

  $\forall s$ ROC: $\boxed{Re\{s\} > -1}$ $\boxed{Re\{s\} > 2}$ $\Rightarrow$ ROC: $\boxed{Re\{s\} > 2}$

$$\Rightarrow \boxed{X(s) = \frac{(s-1)^2}{(s+1)(s-2)}}$$

→ Βαθμοί πολυωνύμων αριθμητή & παρονομαστή ίσοι ⇒ Το ∞ ούτε ΜΗΔΕΝΙΚΟ ούτε ΠΟΛΟΣ



ΠΟΛΟΙ: $\{-1, +2\}$

ΜΗΔΕΝΙΚΑ: $\{+1, +1\}$

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: ΠΟΛΟΙ/ΜΗΔΕΝΙΚΑ ΣΤΟ ∞

- Βαθμός Πολυων. Παρονομαστή > Βαθμός Πολυων. Αριθμητή: $s \to \infty \Rightarrow X(s) \to 0$ — ∞ is ZERO
- Βαθμός Πολυων. Αριθμητή > Βαθμός Πολυων. Παρονομ.: $s \to \infty \Rightarrow X(s) \to \infty$ — POLE

9.2. Περιοχή Σύγκλισης Μ/Σ Laplace (I)

ΙΔΙΟΤΗΤΑ (1): Η Π.Σ. του $X(s)$ αποτελείται από ζώνες παράλληλες στον άξονα των $j\Omega$

Γιατί: Σύγκλιση $\Leftrightarrow$ ύπαρξη FT του $x(t)e^{-st} \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)e^{-st}|dt < \infty$

Αλλά: $|e^{-st}| = e^{-\sigma t}$

$\sigma \rightarrow Re\{s\}$

Άρα, η σύγκλιση εξαρτάται από τιμές του $Re\{s\}$

Συνεπώς, η Π.Σ. αποτελείται από λωρίδες παράλληλες του άξονα των φανταστικών ($j\Omega$)

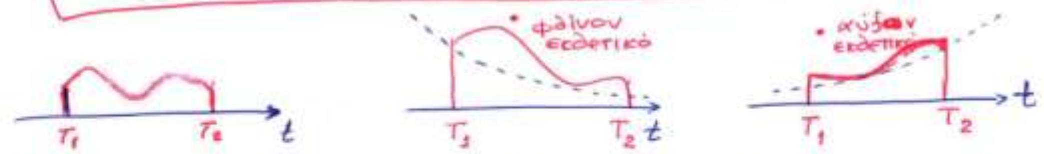
ΙΔΙΟΤΗΤΑ (2): Για Μ/Σ LAPLACE που είναι ρητή συνάρτηση πολυωνύμων η Π.Σ. δεν περιλαμβάνει ΠΟΛΟΥΣ

Γιατί: $X(s) \rightarrow \infty$, όταν $s \rightarrow$ ΠΟΛΟ

9.2. Περιοχή Σύγκλισης Μ/Σ Laplace (II)

ΙΔΙΟΤΗΤΑ (3): Για ακολουθία πεπερασμένης διάρκειας, $x(t)$, που είναι απολύτως ολοκληρώσιμη η Π.Σ. είναι όλο το επίπεδο των s.

Γιατί;



- $\int_{T_1}^{T_2} |x(t)|dt < \infty \Rightarrow \sigma = 0$ (ΟΚ) ανήκει στην Π.Σ.
- $\sigma > 0$: $\int_{T_1}^{T_2} |x(t)|e^{-\sigma t}dt < e^{-\sigma T_1}\int_{T_1}^{T_2} |x(t)| < \infty$ (ΟΚ)
- $\sigma < 0$: $\int_{T_1}^{T_2} |x(t)|e^{-\sigma t}dt < e^{-\sigma T_2}\int_{T_1}^{T_2} |x(t)| < \infty$ (ΟΚ)

Παράδειγμα:

$$x(t) = \begin{cases} e^{-at}, & 0<t<T \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases} \Rightarrow X(s) = \int_0^T e^{-at}e^{-st}dt = \frac{1}{s+a}\left[1-e^{-(s+a)T}\right]$$

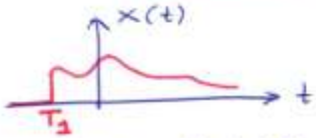
ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Το $-a$ δεν είναι πόλος! $(X(-a) = T)$

9.2. Περιοχή Σύγκλισης Μ/Σ Laplace (III)

ΙΔΙΟΤΗΤΑ (4):

$$\left.\begin{array}{l}\text{Αν } x(t) \text{ είναι "ΔΕΞΙΟ" σήμα} \\ \text{Αν } Re\{s\} = \sigma_0 \in \text{Π.Σ.}\end{array}\right\} \Rightarrow Re\{s\} > \sigma_0 \in \text{Π.Σ.}$$

Γιατί:



$x(t) = 0 \quad \forall\, t < T_1$

$\sigma_0 \in \text{Π.Σ.}: \Rightarrow \int_{T_1}^{+\infty} |x(t)|\, e^{-\sigma_0 t}\, dt < \infty$

- $\sigma_1 > \sigma_0 \Rightarrow \int_{T_1}^{\infty} |x(t)|\, e^{-\sigma_1 t}\, dt = \int_{T_1}^{\infty} |x(t)|\, e^{-\sigma_0 t}\, e^{-(\sigma_1-\sigma_0)t}\, dt$

$$\leq e^{-(\sigma_1-\sigma_0)T_1} \int_{T_1}^{\infty} |x(t)|\, e^{-\sigma_0 t}\, dt < \infty$$

$$\rightarrow \sigma_1 \in \text{Π.Σ.} \rightarrow \boxed{Re\{s_1\} \in \text{Π.Σ.}}$$

- Το παραπάνω έχει αποδειχθεί $\forall\, \sigma_1 > \sigma_0$

$$\Rightarrow \boxed{Re\{s\} > \sigma_0 \in \text{Π.Σ.}}$$

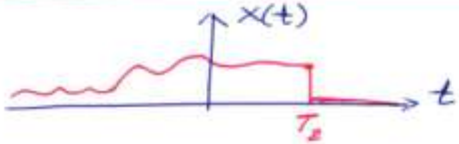
ΣΗΜΕΙΩΣΗ:

- Η Π.Σ. αναφέρεται ως "ΔΕΞΙΑ" Π.Σ.
- Προφανώς, μπορεί να μην υπάρχει Π.Σ. (δεύτερη συνθήκη να μην ισχύει) π.χ. $\boxed{x(t) = e^{t^2} u(t)}$

9.2. Περιοχή Σύγκλισης Μ/Σ Laplace (IV)

ΙΔΙΟΤΗΤΑ 5:
Αν $x(t)$ είναι "ΑΡΙΣΤΕΡΟ" ΣΗΜΑ
Αν $Re\{s\} = \sigma_0 \in$ Π.Σ.
$\Rightarrow Re\{s\} < \sigma_0 \in$ Π.Σ

Γιατί: Αντίστοιχη απόδειξη με την ιδιότητα 4



$x(t) = 0, \ \forall t > T_2$

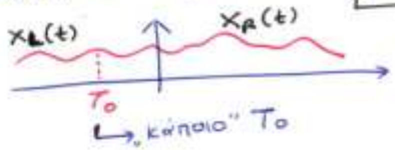
ΙΔΙΟΤΗΤΑ 6:
Αν $x(t)$ είναι "ΔΙΠΛΕΥΡΟ" ΣΗΜΑ
Αν $Re\{s\} = \sigma_0 \in$ Π.Σ.
$\Rightarrow$ Η Π.Σ. θα είναι λωρίδα που θα περιλαμβάνει την $Re\{s\} = \sigma_0$

Γιατί: $x(t) = \underbrace{x_R(t)}_{\text{ΔΕΞΙΑ ΤΟΥ } T_0} + \underbrace{x_L(t)}_{\text{ΑΡΙΣΤΕΡΑ ΤΟΥ } T_0} \Rightarrow$ Π.Σ$\{X(s)\} =$

$=$ Π.Σ$\{X_R(s)\} \cap$ Π.Σ$\{X_L(s)\}$

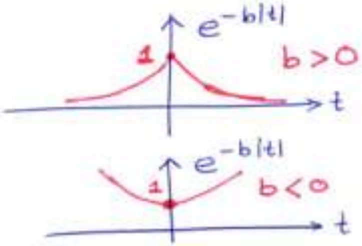
$Re\{s\} > \sigma_R$ $Re\{s\} < \sigma_L$

Π.Σ.: ΛΩΡΙΔΑ ΕΠΙΚΑΛΥΨΗΣ (αν υπάρχει)



9.2. Περιοχή Σύγκλισης Μ/Σ Laplace (V)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: $\boxed{x(t)=e^{-b|t|}}$



$$x(t)=e^{-bt}u(t)+e^{bt}u(-t)$$

$\mathcal{L}$ $\qquad$ $\mathcal{L}$

$\frac{1}{s+b},\ \boxed{Re\{s\}>-b} \qquad -\frac{1}{s-b},\ \boxed{Re\{s\}<b}$

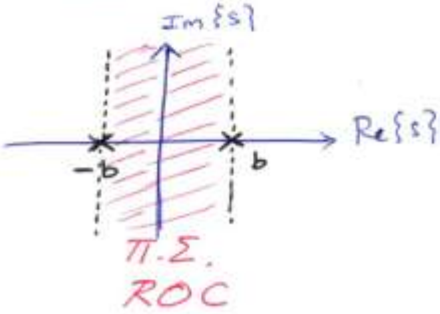
ΔΕΝ ΥΠΑΡΧΕΙ ΕΠΙΚΑΛΥΨΗ για $b\leq 0$ ⚠ $\Rightarrow$ δεν συγκλίνει ο Μ/Σ LAPLACE

Για $b>0$, $\boxed{\text{Π.Σ}: -b<Re\{s\}<b}$

$$X(s)=\frac{1}{s+b}-\frac{1}{s-b}=\boxed{\frac{-2b}{s^2-b^2}}$$

ΠΟΛΟΙ: $\{+b, -b\}$

ΜΗΔΕΝΙΚΑ: $\{\infty, \infty\}$



9.2. Περιοχή Σύγκλισης Μ/Σ Laplace (VI)

ΜΕΧΡΙ ΣΤΙΓΜΗΣ : Π.Σ.
(ΙΔ. 3-6)

→ ΟΛΟ ΤΟ επίπεδο (πεπερασμένης διάρκειας σήματα)
→ ΑΡΙΣΤΕΡΟ ημι-επίπεδο (ΑΡΙΣΤΕΡΑ σήματα)
→ ΔΕΞΙΟ ημι-επίπεδο (ΔΕΞΙΑ σήματα)
→ ΜΙΑ ΛΩΡΙΔΑ (ΔΙΠΛΕΥΡΑ σήματα)
→ ΔΕΝ ΣΥΓΚΛΙΝΕΙ

ΔΥΟ ΑΚΟΜΗ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ
ΓΙΑ ΡΗΤΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ
$X(s)$

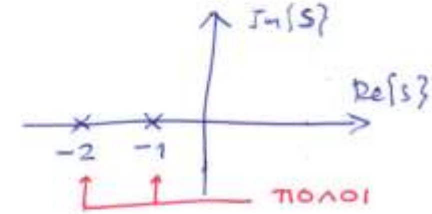
ΙΔΙΟΤΗΤΑ 7 : Αν $X(s)$ ΡΗΤΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΤΟΥ s $\Rightarrow$ Π.Σ. είναι φραγμένη από ΠΟΛΟΥΣ ή εκτείνεται στο ∞. Επίσης, ΔΕΝ περιέχει ΠΟΛΟΥΣ.

ΙΔΙΟΤΗΤΑ 8 : Αν $X(s)$ ΡΗΤΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΤΟΥ s:
[1] $x(t)$ "ΔΕΞΙΟ" ΣΗΜΑ $\Rightarrow$ Π.Σ. ΕΙΝΑΙ Η ΠΕΡΙΟΧΗ ΔΕΞΙΑ ΤΟΥ ΠΙΟ ΔΕΞΙΟΥ ΠΟΛΟΥ
[2] $x(t)$ "ΑΡΙΣΤΕΡΟ" ΣΗΜΑ $\Rightarrow$ Π.Σ ΕΙΝΑΙ Η ΠΕΡΙΟΧΗ ΑΡΙΣΤΕΡΑ ΤΟΥ ΠΙΟ ΑΡΙΣΤΕΡΟΥ ΠΟΛΟΥ

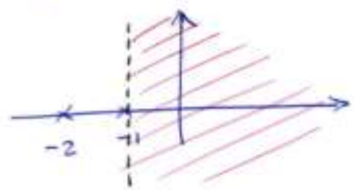
Γιατί : Αποτέλεσμα ιδιοτήτων 7 + 4
ή ιδιοτήτων 7 + 5

9.2. Περιοχή Σύγκλισης Μ/Σ Laplace (VII)

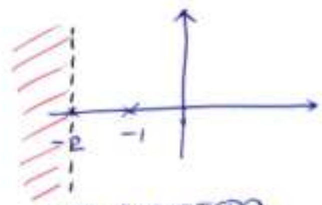
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: $\boxed{X(s)=\frac{1}{(s+1)(s+2)}}$



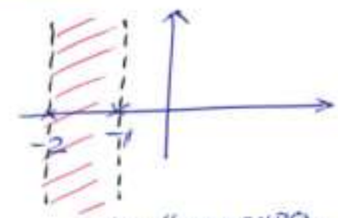
• Υπάρχουν 3 διαφορετικές πιθανές Π.Σ. της $X(s)$, κάθε μία δίνει διαφορετικό $x(t)$



$x(t)$ "ΔΕΞΙΟ"
έχει Μ/Σ FOURIER



$x(t)$ "ΑΡΙΣΤΕΡΟ"
ΔΕΝ ΕΧΕΙ Μ/Σ FOURIER



$x(t)$ "ΔΙΠΛΕΥΡΟ"
ΔΕΝ ΕΧΕΙ Μ/Σ FOURIER

9.3. Αντίστροφος Μ/Σ Laplace -- Ορισμός

- ΥΠΕΝΘΥΜΙΖΟΥΜΕ:

$$X(s) = X(\sigma + j\Omega) = \mathcal{F}\{x(t)e^{-\sigma t}\} \quad , \text{ για } s \in \text{Π.Σ.}$$

$$\Rightarrow x(t)e^{-\sigma t} = \mathcal{F}^{-1}\{X(s)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(\sigma + j\Omega)e^{j\Omega t}\,d\Omega$$

$$\Rightarrow x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(\sigma + j\Omega)e^{(\sigma+j\Omega)t}\,d\Omega$$

$s = \sigma + j\Omega$, $\boxed{\sigma = const}$, $ds = j\,d\Omega$

$$\Rightarrow \boxed{x(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} X(s)e^{st}\,ds}$$

οποιοδήποτε: $\boxed{\sigma \in \text{Π.Σ.}}$

- ΣΤΗΝ ΠΡΑΞΗ: Θα ασχοληθούμε με ρητές συναρτήσεις $X(s)$

Θα χρησιμοποιήσουμε ανάπτυξη σε μερικά κλάσματα

- ΓΙΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

$$X(s) = \sum_{i=1}^{m} \frac{A_i}{s + a_i}$$

(απλοί πόλοι, βαθμός πολυων. παρ > βαθμό πολυων. αρ)

$\mathcal{L}^{-1}$:

$A_i e^{-a_i t} u(t)$ "ΔΕΞΙΟ" $\qquad$ $-A_i e^{-a_i t} u(-t)$ "ΑΡΙΣΤΕΡΟ"

9.3. Αντίστροφος Μ/Σ Laplace – Παραδείγματα (Ι)

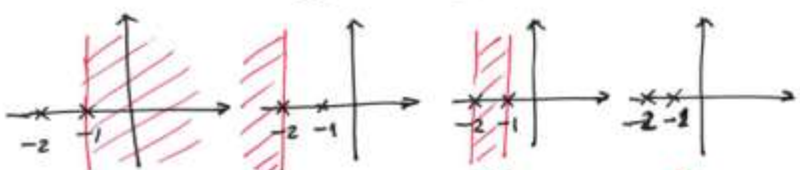
$$\boxed{1 \quad X(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}, \quad Re\{s\} > -1} \Rightarrow \boxed{x(t) = ?}$$

$$\left.\begin{aligned}
X(s) &= \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2} \\
A &= \left[(s+1)X(s)\right]\Big|_{s=-1} = \frac{1}{s+2}\Big|_{s=-1} = 1 \\
B &= \left[(s+2)X(s)\right]\Big|_{s=-2} = \frac{1}{s+1}\Big|_{s=-2} = -1
\end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2}$$

$$\boxed{\text{Π.Σ: } Re\{s\} > -1}$$

ΠΣ: $Re\{s\} < -1$ (L) $\quad Re\{s\} > -1$ (R) $\quad Re\{s\} < -2$ (L) $\quad Re\{s\} > -2$ (R)



RR LL LR RL

[Ποιές επιλογές είναι συνεπείς με την έκφραση ?]

↓

ΠΡΟΦΑΝΩΣ Η ΠΡΩΤΗ

↓

ΔΥΟ ΔΕΞΙΑ ΣΗΜΑΤΑ

ΑΡΑ: $\boxed{x(t) = e^{-t}u(t) - e^{-2t}u(t)}$

9.3. Αντίστροφος Μ/Σ Laplace – Παραδείγματα (II)

(2) Ίδιο με πριν $\boxed{X(s)}$, αλλά Π.Σ: $Re\{s\}<-2$

Η επιλογή των Π.Σ. των μερικών κλασμάτων που είναι συνεπής με την εκφώνηση απαιτεί δύο ΑΡΙΣΤΕΡΑ σήματα:

ΑΡΑ: $\boxed{x(t) = -e^{-t}u(-t) + e^{-2t}u(-t)}$

(3) Ίδιο $\boxed{X(s)}$, αλλά Π.Σ: $-2<Re\{s\}<-1$

Εδώ πρέπει το ένα σήμα να είναι ΑΡΙΣΤΕΡΟ, το άλλο ΔΕΞΙΟ

ΑΡΑ: $\boxed{x(t) = -e^{-t}u(-t) - e^{-2t}u(t)}$

9.4. Ιδιότητες Μ/Σ Laplace (I)

① ΓΡΑΜΜΙΚΟΤΗΤΑ
LINEARITY

$$\left.\begin{array}{l} x_1(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} X_1(s), \quad \underline{ROC}: R_1 \\ x_2(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} X_2(s), \quad \underline{ROC}: R_2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a x_1(t) + b x_2(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} a X_1(s) + b X_2(s)$$

$\underline{ROC}$: περιέχει το $R_1 \cap R_2$

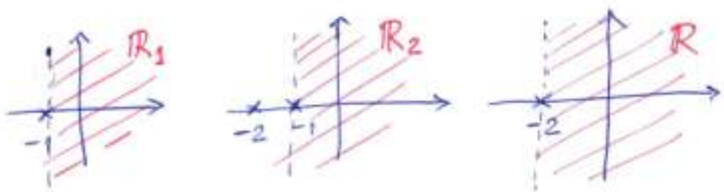
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

$x_1(t) \longleftrightarrow X_1(s) = \frac{1}{s+1}$, ΠΣ: $\boxed{Re\{s\} > -1}$ R_1

$x_2(t) \longleftrightarrow X_2(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$, ΠΣ $\boxed{Re\{s\} > -1}$ R_2

$x(t) = x_1(t) - x_2(t) \Rightarrow X(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{(s+1)(s+2)} = \frac{1}{s+2}$ R

$\boxed{\text{ΠΣ } Re\{s\} > -2}$



μεγαλύτερη από την αρχική $R_1 \cap R_2$

9.4. Ιδιότητες M/Σ Laplace (II)

② ΧΡΟΝΙΚΗ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΗ

TIME SHIFTING

$$x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} X(s),\ \underline{ROC}: R \implies x(t-t_0) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} e^{-st_0} X(s),\ \underline{ROC}: R$$

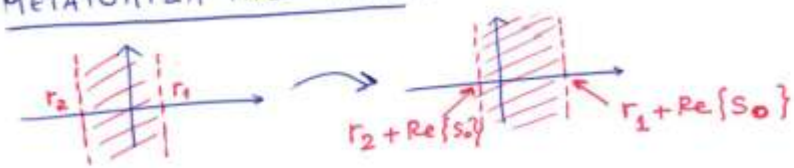
③ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΗ ΣΤΟ ΠΕΔΙΟ ΤΟΥ Μ/Σ

SHIFT IN THE S-DOMAIN

$$x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} X(s),\ \underline{ROC}: R \implies e^{s_0 t} x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} X(s-s_0)$$

$$\underline{ROC}:\ R + Re\{s_0\}$$

- ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΗ ΤΗΣ Π.Σ:



- ΕΙΔΙΚΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ:

$$s_0 = j\Omega_0: \quad e^{j\Omega_0 t} x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} X(s - j\Omega_0),\ \underline{ROC}: R$$

9.4. Ιδιότητες Μ/Σ Laplace (III)

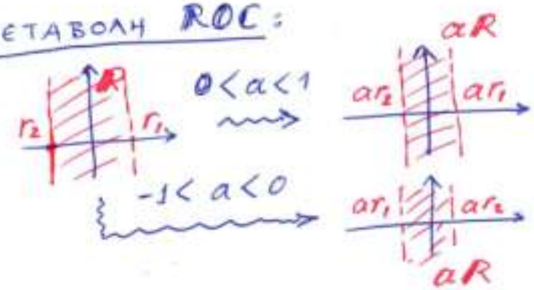
4 ΧΡΟΝΙΚΗ ΚΛΙΜΑΚΩΣΗ — TIME SCALING

$$x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} X(s), \ \underline{ROC}: R \implies x(at) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{|a|} X\left(\frac{s}{a}\right)$$

$\underline{ROC}: \ aR$

- ΕΙΔΙΚΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ: $x(-t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} X(-s), \ \underline{ROC}: -R$

- ΜΕΤΑΒΟΛΗ ROC:



5 ΣΥΖΥΓΙΑ — CONJUGATION

$$x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} X(s), \ \underline{ROC}: R \implies x^*(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} X^*(s^*), \ \underline{ROC}: R$$

- ΕΙΔΙΚΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ:

Για $x(t) \in \mathbb{R}$ (ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟ): $\boxed{X(s) = X^*(s^*)}$

9.4. Ιδιότητες Μ/Σ Laplace (IV)

6 ΣΥΝΕΛΙΞΗ

CONVOLUTION

$x_1(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} X_1(s)$, ROC: R_1

$x_2(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} X_2(s)$, ROC: R_2

$\Longrightarrow \quad x_1(t) * x_2(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} X_1(s)X_2(s)$

ROC: περιέχει το $R_1 \cap R_2$

- ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

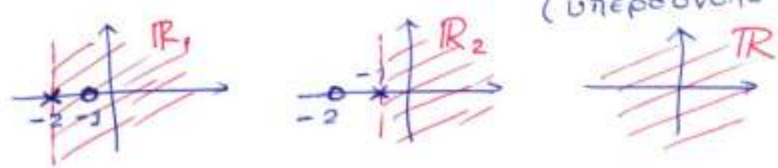
$x_1(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} X_1(s) = \dfrac{s+1}{s+2}$, $Re\{s\} > -2$

$x_2(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} X_2(s) = \dfrac{s+2}{s+1}$, $Re\{s\} > -1$

$\Rightarrow \quad x_1(t) * x_2(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} X(s) = X_1(s)X_2(s) = 1$

Π.Σ.: ΟΛΟ ΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ

(υπερσύνολο του $R_1 \cap R_2$: $Re\{s\} > -1$)



9.4. Ιδιότητες Μ/Σ Laplace (V)

7 ΧΡΟΝΙΚΗ ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗ

TIME-DOMAIN DIFFERENTIATION

$$x(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} X(s) \quad \Longrightarrow \quad \frac{dx(t)}{dt} \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} sX(s)$$

ROC: $\mathbb{R}$ ... ROC: ΠΕΡΙΛΑΜΒΑΝΕΙ ΤΟ $\mathbb{R}$

- ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s)e^{st}\,ds \Rightarrow \frac{dx(t)}{dt} = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} sX(s)e^{st}\,ds$$

$$\Rightarrow \frac{dx(t)}{dt} \overset{\mathcal{L}}{\longrightarrow} sX(s)$$

- ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

$$x(t) = u(t) \overset{\mathcal{L}}{\longrightarrow} 1/s, \ \mathrm{Re}\{s\} > 0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow x(t) = \delta(t) \overset{\mathcal{L}}{\longrightarrow} \cancel{s}\cdot\frac{1}{\cancel{s}} = 1, \quad$$ Π.Σ: ΟΛΟ ΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ

9.4. Ιδιότητες Μ/Σ Laplace (VI)

8 ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗ ΣΤΟ ΠΕΔΙΟ ΤΟΥ Μ/Σ

DIFFERENTIATION IN THE S-DOMAIN

$$x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} X(s),\ \text{ROC}: R \Rightarrow -t\,x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{dX(s)}{ds},\ \text{ROC}: R$$

- ΑΠΟΔΕΙΞΗ: $X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-st} dt \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{dX(s)}{ds} = \int_{-\infty}^{+\infty} -t\,x(t) e^{-st} dt \Rightarrow -t\,x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{dX(s)}{ds}$$

ROC: R

- ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

$$e^{-at}u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s+a},\ \mathrm{Re}\{s\} > -a \Rightarrow t e^{-at} u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} -\frac{d}{ds}\left[\frac{1}{s+a}\right]$$

$$= \frac{1}{(s+a)^2},\ \mathrm{Re}\{s\} > -a$$

$$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-at} u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{(s+a)^n},\ \mathrm{Re}\{s\} > -a$$

- ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

$$X(s) = \frac{2s^2+5s+5}{(s+1)^2(s+2)} = \frac{2}{(s+1)^2} - \frac{1}{s+1} + \frac{3}{s+2},\ \mathrm{Re}\{s\} > -1$$

ΟΛΑ ΤΑ ΣΗΜΑΤΑ ΠΡΕΠΕΙ ΝΑ ΕΙΝΑΙ "ΔΕΞΙΑ" $\Rightarrow$ $\boxed{x(t) = [2te^{-t} - e^{-t} + 3e^{-2t}]u(t)}$

9.4. Ιδιότητες Μ/Σ Laplace (VII)

9 ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ ΣΤΟΝ ΧΡΟΝΟ

INTEGRATION IN THE TIME DOMAIN

$$x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} X(s) \quad \Rightarrow \quad \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s} X(s)$$

ROC: $\mathbb{R}$ — ROC: ΠΕΡΙΕΧΕΙ ΤΗΝ ΤΟΜΗ $\mathbb{R} \cap \{\mathrm{Re}\{s\} > 0\}$

- ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau = x(t) * u(t) \quad \Longrightarrow$$

$x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} X(s),\ \mathbb{R}$ — $u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s},\ \mathrm{Re}\{s\} > 0$

$$\Longrightarrow \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s} \cdot X(s)$$

ROC: ΥΠΕΡΣΥΝΟΛΟ ΤΗΣ ΤΟΜΗΣ $\mathbb{R} \cap \{\mathrm{Re}\{s\} > 0\}$

9.4. Ιδιότητες Μ/Σ Laplace (VIII)

10 ΘΕΩΡΗΜΑ ΑΡΧΙΚΗΣ / ΤΕΛΙΚΗΣ ΤΙΜΗΣ

INITIAL-/FINAL-VALUE THEOREMS

- $x(t)=0,\ t<0$, ΟΧΙ ΚΡΟΥΣΤΙΚΕΣ ΣΤΟ 0 $\Rightarrow x(0^+) = \lim_{s\to\infty} sX(s)$
- $x(t)=0,\ t<0$, $\lim_{t\to\infty} x(t)$ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΟ $\Rightarrow \lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{s\to 0} sX(s)$

- ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Είχαμε βρει ότι:

$$e^{-2t}u(t) + e^{-t}\cos(3t)\,u(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} \frac{2s^2+5s+12}{(s^2+2s+10)(s+2)}$$

Π.Σ.: $Re\{s\} > -1$

Παρατηρούμε:

$x(0^+) = 2$

$\lim_{s\to\infty}[sX(s)] = 2$

$\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$

$\lim_{s\to 0}[sX(s)] = 0$

9.4. Ιδιότητες / Ζεύγη Μ/Σ Laplace – Τυπολόγιο

$$x(t) \leftrightarrow X(s) = \int_{t=-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-st}\, dt$$

Δίπλευροι μετασχηματισμοί Laplace:

Ιδιότητες:

$\frac{d}{dt} x(t) \leftrightarrow s\,X(s)$

$-t\,x(t) \leftrightarrow \frac{d}{ds} X(s)$

$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, d\tau \leftrightarrow \frac{1}{s} X(s)$

$x(t-t_o) \leftrightarrow e^{-st_o} X(s)$

$e^{s_o t} x(t) \leftrightarrow X(s-s_o)$

$x(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} X(\frac{s}{a})$

$x^*(t) \leftrightarrow X^*(s^*)$

$x(t)*y(t) \leftrightarrow X(s)Y(s)$

Ζεύγη:

$\delta(t) \leftrightarrow 1$ $\qquad$ $\frac{d^n}{dt^n}\delta(t) \leftrightarrow s^n$ $\qquad$ $\delta(t-T) \leftrightarrow e^{-sT}$

$u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s},\ \Re\{s\}>0$ $\qquad$ $-\,u(-t) \leftrightarrow \frac{1}{s},\ \Re\{s\}<0$

$e^{-at}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s+a},\ \Re\{s+a\}>0$ $\qquad$ $-\,e^{-at}u(-t) \leftrightarrow \frac{1}{s+a},\ \Re\{s+a\}<0$

$te^{-at}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{(s+a)^2},\ \Re\{s+a\}>0$ $\qquad$ $-\,te^{-at}u(-t) \leftrightarrow \frac{1}{(s+a)^2},\ \Re\{s+a\}<0$

$t^{n-1}e^{-at}u(t) \leftrightarrow \frac{(n-1)!}{(s+a)^n},\ \Re\{s+a\}>0$ $\qquad$ $-\,t^{n-1}e^{-at}u(-t) \leftrightarrow \frac{(n-1)!}{(s+a)^n},\ \Re\{s+a\}<0$

$[\cos(\Omega_o t)]\,u(t) \leftrightarrow \frac{s}{s^2+\Omega_o^2},\ \Re\{s\}>0$ $\qquad$ $[e^{-at}\cos(\Omega_o t)]\,u(t) \leftrightarrow \frac{s+a}{(s+a)^2+\Omega_o^2},\ \Re\{s+a\}>0$

$[\sin(\Omega_o t)]\,u(t) \leftrightarrow \frac{\Omega_o}{s^2+\Omega_o^2},\ \Re\{s\}>0$ $\qquad$ $[e^{-at}\sin(\Omega_o t)]\,u(t) \leftrightarrow \frac{\Omega_o}{(s+a)^2+\Omega_o^2},\ \Re\{s+a\}>0$

9.5. Ανάλυση Γ.Χ.Α. Συστημάτων με Μ/Σ Laplace (I)

ΣΗΜΑΝΤΙΚΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ: (Γ.Χ.Α. ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ)

- $x(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t) = x(t) * h(t)$

  $X(s) \qquad H(s) \qquad Y(s) = X(s) . H(s)$

  ΠΡΟΣΟΧΗ ΣΤΙΣ ΠΕΡΙΟΧΕΣ ΣΥΓΚΛΙΣΗΣ ⚠

  $H(s)$ → ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ / SYSTEM FUNCTION — ή — TRANSFER FUNCTION

- $e^{s_0 t} \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow H(s_0) . e^{s_0 t}$

  → {Το s_0 πρέπει να ανήκει στην περιοχή σύγκλισης του $H(s)$}

9.5. Ανάλυση Γ.Χ.Α. Συστημάτων με Μ/Σ Laplace (II)

ΑΙΤΙΑΤΟΤΗΤΑ: (Γ.Χ.Α. ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ)

$\boxed{\text{ΑΙΤΙΑΤΟΤΗΤΑ}} \Longleftrightarrow h(t)=0,\ \forall t<0 \Rightarrow h(t)$ ΕΙΝΑΙ "ΔΕΞΙΟ" ΣΗΜΑ $\Longleftrightarrow$ $\boxed{\text{Π.Σ. είναι δεξιό ημι-επίπεδο}}$

$\not\Leftarrow$ ΔΕΝ ΙΣΧΥΕΙ ΓΕΝΙΚΑ

OK για ΡΗΤΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ!

ΓΙΑ ΡΗΤΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ:

$\boxed{\text{ΑΙΤΙΑΤΟΤΗΤΑ}} \Longleftrightarrow$ $\boxed{\text{Π.Σ. ΕΙΝΑΙ ΔΕΞΙΟ ΗΜΙΕΠΙΠΕΔΟ ΣΤΑ ΔΕΞΙΑ ΤΟΥ ΠΙΟ ΔΕΞΙΟΥ ΠΟΛΟΥ}}$

Αντίστοιχα ισχύουν για αντι-αιτιατά (anti-causal) συστήματα:

$\boxed{\text{ΑΝΤΙ-ΑΙΤΙΑΤΟΤΗΤΑ}} \Longleftrightarrow h(t)=0,\ \forall t>0 \Rightarrow h(t)$ ΕΙΝΑΙ "ΑΡΙΣΤΕΡΟ" ΣΗΜΑ $\Longleftrightarrow$ $\boxed{\text{Π.Σ. είναι ΑΡΙΣΤΕΡΟ ημιεπίπεδο}}$

ΓΙΑ ΡΗΤΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ

9.5. Ανάλυση Γ.Χ.Α. Συστημάτων με Μ/Σ Laplace (III)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ:

- $h(t)=e^{-t}u(t)$ → ΠΡΟΦΑΝΩΣ ΑΙΤΙΑΤΟ, αφού $h(t)=0$, για $t<0$
  - → $H(s)=\frac{1}{s+1}$, $\mathrm{Re}\{s\}>-1$
    - → "ΔΕΞΙΑ" ΠΕΡΙΟΧΗ ΣΥΓΚΛΙΣΗΣ

- $h(t)=e^{-|t|}$ → ΠΡΟΦΑΝΩΣ ΜΗ ΑΙΤΙΑΤΟ, αφού $h(t)\neq 0$, για $t<0$
  - → $H(s)=-\frac{2}{s^2-1}$, $-1<\mathrm{Re}\{s\}<+1$
    - → ΜΗ "ΔΕΞΙΑ" Π.Σ.

- $H(s)=\frac{e^s}{s+1}$, $\mathrm{Re}\{s\}>-1$
  - → Μή ΡΗΤΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ, άρα "ΔΕΞΙΑ" Π.Σ. $\not\Rightarrow$ ΑΙΤΙΑΤΟΤΗΤΑ

Πράγματι: $e^{-t}u(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{s+1}$, $\mathrm{Re}\{s\}>-1$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{e^{-(t+1)}u(t+1)} \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} \frac{e^s}{s+1}$, $\mathrm{Re}\{s\}>-1$

→ $h(t)$, μή μηδενική για $\boxed{-1<t<0}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\text{ΜΗ ΑΙΤΙΑΤΟ}}$

9.5. Ανάλυση Γ.Χ.Α. Συστημάτων με Μ/Σ Laplace (IV)

ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ: (Γ.Χ.Α.)

ΣΥΣΤΗΜΑ ΕΥΣΤΑΘΕΣ $\Longleftrightarrow$ Π.Σ. της συνάρτησης μεταφοράς περιέχει τον άξονα $j\Omega$ $(Re\{s\}=0)$

ΓΙΑ: ΑΙΤΙΑΤΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΜΕ ΡΗΤΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ $H(s)$: ΕΥΣΤΑΘΕΣ $\Longleftrightarrow$ ΟΛΟΙ ΟΙ ΠΟΛΟΙ ΕΙΝΑΙ ΣΤΟ ΑΡΙΣΤΕΡΟ ΗΜΙΕΠΙΠΕΔΟ $Re\{s_i\}<0$
↳ πολοι

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ:

- $H(s)=\dfrac{s-1}{(s+1)(s-2)}$ → πολοι: $\{-1, 2\}$, ΜΗΔΕΝΙΚΑ: $\{1, \infty\}$

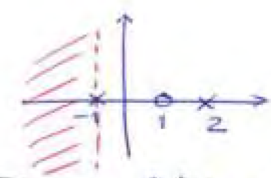
ΠΙΘΑΝΕΣ ΠΕΡΙΟΧΕΣ ΣΥΓΚΛΙΣΗΣ:

$h(t)=\left[\frac{2}{3}e^{-t}+\frac{1}{3}e^{2t}\right]u(t)$

αιτιατό + ασταθές

$h(t)=\frac{2}{3}e^{-t}u(t)-\frac{1}{3}e^{2t}u(-t)$

μη αιτιατό, αλλά ευσταθές



$h(t)=-\frac{2}{3}e^{-t}u(-t)-\frac{1}{3}e^{2t}u(-t)$

αντι-αιτιατό + ασταθές

9.5. Ανάλυση Γ.Χ.Α. Συστημάτων με Μ/Σ Laplace (V)

Γ.Χ.Α. ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΠΕΡΙΓΡΑΦΟΜΕΝΑ ΜΕ ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΜΕ ΣΤΑΘΕΡΟΥΣ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΕΣ:

$$\boxed{\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}}$$

$$\xrightarrow{\mathcal{L}\{\}} \left(\sum_{k=0}^{N} a_k s^k\right) Y(s) = \left(\sum_{k=0}^{M} b_k s^k\right) X(s)$$

$$\Rightarrow \boxed{H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k s^k}{\sum_{k=0}^{N} a_k s^k}}$$

ΠΕΡΙΟΧΗ ΣΥΓΚΛΙΣΗΣ ?

Χρειαζόμαστε περισσότερες πληροφορίες, π.χ. για ευστάθεια / αιτιατότητα

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ:

- $\frac{dy(t)}{dt} + 3y(t) = x(t)$

$$\Rightarrow H(s) = \frac{1}{s+3}$$

Π.Σ. $Re\{s\} > -3 \Rightarrow \boxed{h(t) = e^{-3t} u(t)}$

ΣΥΣΤΗΜΑ ΑΙΤΙΑΤΟ

9.5. Ανάλυση Γ.Χ.Α. Συστημάτων με Μ/Σ Laplace (VI)

ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ:

Γ.Χ.Α. ΣΥΣΤΗΜΑ

- $x(t) = e^{-3t}u(t)$ ΕΙΣΟΔΟΣ
- $y(t) = [e^{-t} - e^{-2t}]u(t)$ ΕΞΟΔΟΣ

$$x(t) = e^{-3t}u(t) \Longrightarrow X(s) = \frac{1}{s+3}, \quad Re\{s\} > -3$$

$$y(t) = [e^{-t} - e^{-2t}]u(t) \Longrightarrow Y(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2} = \frac{1}{(s+1)(s+2)}, \quad Re\{s\} > -1$$

ΣΥΝΕΠΩΣ:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} = \frac{s+3}{s^2+3s+2}, \quad Re\{s\} > -1$$

Η ΜΟΝΗ ΣΥΝΕΠΗΣ ΕΠΙΛΟΓΗ ΜΕ ΤΙΣ Π.Σ. ΤΩΝ $X(s), Y(s)$

ΣΥΝΕΠΩΣ:

σύστημα αιτιατό + ευσταθές

ΣΧΕΣΗ ΕΙΣΟΔΟΥ-ΕΞΟΔΟΥ:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 3\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + 3x(t)$$

ΚΡΟΥΣΤΙΚΗ ΑΠΟΚΡΙΣΗ: $h(t) = [2e^{-t} - e^{-2t}]u(t)$

9.5. Ανάλυση Γ.Χ.Α. Συστημάτων με Μ/Σ Laplace (VII)

① Γ.ΧΑ. ΣΥΣΤΗΜΑ, ΑΙΤΙΑΤΟ
② ΡΗΤΗ $H(s)$
③ ΔΥΟ ΠΟΛΟΥΣ ΜΟΝΟ: $\{-2, 4\}$
④ $x(t)=1 \Rightarrow y(t)=0$
⑤ $h(0^+)=4$

$\Rightarrow H(s)=?$

②,③ $\Rightarrow H(s)=\dfrac{p(s)}{(s+2)(s-4)}=\dfrac{p(s)}{s^2-2s-8}$ (*)

①-③ $\Rightarrow$ ΣΥΣΤΗΜΑ ΑΣΤΑΘΕΣ

④: $x(t)=1=e^{0t} \Rightarrow y(t)=H(0)\cdot x(t) \Rightarrow H(0)=0$ ↳ ΜΗΔΕΝΙΚΟ

$\Rightarrow p(s)=s\,q(s)$ (**)

⑤: $\Rightarrow \lim_{s\to\infty} sH(s) \overset{(*)}{\underset{(**)}{=}} \lim_{s\to\infty}\dfrac{s^2 q(s)}{s^2-2s-8}=h(0^+)=4$

$\Rightarrow \boxed{q(s)=4}$ (***)

(*),(**),(***) $\Rightarrow \boxed{H(s)=\dfrac{4s}{s^2-2s-8}=\dfrac{4s}{(s+2)(s-4)}, \quad Re\{s\}>4}$

9.5. Ανάλυση Γ.Χ.Α. Συστημάτων με Μ/Σ Laplace (VIII)

Γ.Χ.Α. ΣΥΣΤΗΜΑ
- ΕΥΣΤΑΘΕΣ & ΑΙΤΙΑΤΟ
- $H(s)$ ΡΗΤΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ
- ΕΧΕΙ ΠΟΛΟ ΣΤΟ -2
- ΔΕΝ ΕΧΕΙ ΜΗΔΕΝΙΚΟ ΣΤΟ 0

ΠΟΙΑ ΑΠΟ ΤΑ ΠΑΡΑΚΑΤΩ ΑΛΗΘΕΥΟΥΝ ?

$\mathcal{F}\{h(t)e^{3t}\}$ ΥΠΑΡΧΕΙ ?

$$F\{h(t)e^{3t}\} = H(s)\Big|_{s=-3}$$

Αλλά αφού $H(s)$ είναι συνάρτηση μεταφοράς αιτιατού συστήματος, η περιοχή σύγκλισης είναι στα δεξιά των πόλων, άρα το -3 δεν ανήκει στην Π.Σ. Συνεπώς

ΟΧΙ

$\int_{-\infty}^{+\infty} h(t)dt = 0$?

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(t)dt = H(0) \neq 0$$

Συνεπώς: ΟΧΙ

$t h(t)$ αντιστοιχεί σε ΑΙΤΙΑΤΟ & ΕΥΣΤΑΘΕΣ ΣΥΣΤΗΜΑ ?

$h(t)$ ΑΙΤΙΑΤΗ $\Rightarrow$ $t h(t)$ ΑΙΤΙΑΤΗ

$ROC\{\mathcal{L}\{t h(t)\}\} = ROC\{H(s)\}$ $\Rightarrow$ ΕΥΣΤΑΘΕΣ

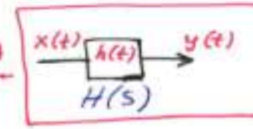
ΝΑΙ

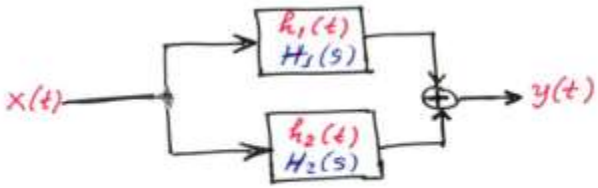
9.6. Διαγράμματα Υλοποίησης Γ.Χ.Α. Συστημάτων (I)

ΣΥΝΔΕΣΜΟΛΟΓΙΕΣ Γ.Χ.Α. ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

(1) ΕΝ ΠΑΡΑΛΛΗΛΩ [PARALLEL]

ΙΣΟΔΥΝΑΜΑ

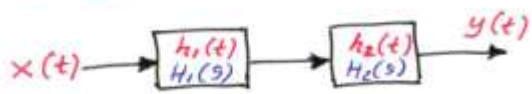




$$h(t) = h_1(t) + h_2(t)$$

$$H(s) = H_1(s) + H_2(s)$$

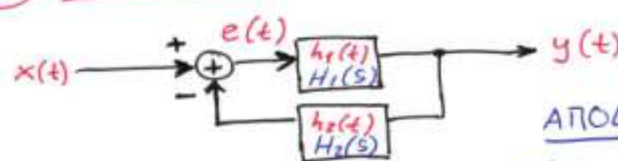
(2) ΕΝ ΣΕΙΡΑ [CASCADE]



$$h(t) = h_1(t) * h_2(t)$$

$$H(s) = H_1(s) \cdot H_2(s)$$

(3) ΜΕ ΑΝΑΤΡΟΦΟΔΟΤΗΣΗ [FEEDBACK]



$$H(s) = \frac{H_1(s)}{1 + H_1(s)H_2(s)}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

$$\left.\begin{array}{l} E(s) = X(s) - H_2(s)Y(s) \\ Y(s) = E(s)H_1(s) \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

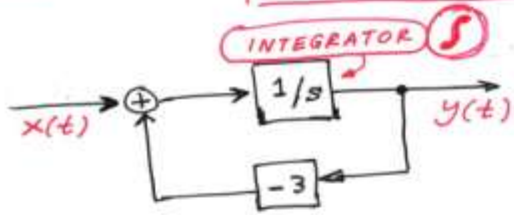
$$\Longrightarrow \frac{Y(s)}{H_1(s)} = X(s) - H_2(s)Y(s) \Rightarrow \underbrace{\frac{Y(s)}{X(s)}}_{H(s)} \cdot \frac{1}{H_1(s)} = 1 - H_2(s)\underbrace{\frac{Y(s)}{X(s)}}_{H(s)}$$

9.6. Διαγράμματα Υλοποίησης Γ.Χ.Α. Συστημάτων (ΙΙ)

ΑΙΤΙΑΤΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΠΕΡΙΓΡΑΦΟΜΕΝΑ ΜΕ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ / ΡΗΤΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ

- $H(s) = \dfrac{1}{s+3} = \dfrac{\frac{1}{s}}{1+3\cdot\frac{1}{s}}$

$$\frac{dy(t)}{dt} + 3y(t) = x(t)$$

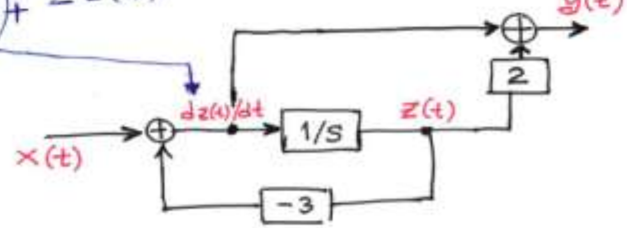


- $H(s) = \dfrac{s+2}{s+3} = \dfrac{1}{s+3}\cdot(s+2)$

$\hookrightarrow \dfrac{Z(s)}{X(s)}$ $\quad \dfrac{Y(s)}{Z(s)}$

$$y(t) = \frac{dz(t)}{dt} + 2z(t)$$

ΔΙΑΘΕΣΙΜΟ

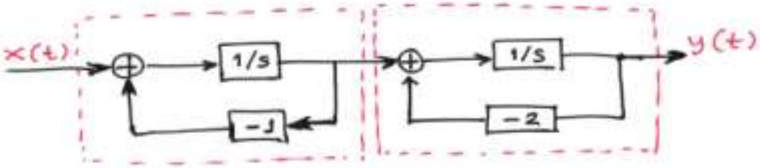


9.6. Διαγράμματα Υλοποίησης Γ.Χ.Α. Συστημάτων (III)

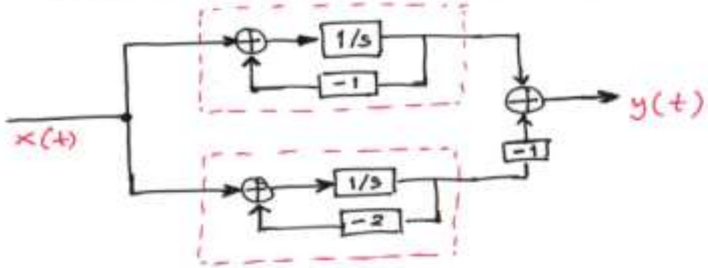
- $H(s) = \dfrac{1}{(s+1)(s+2)} = \dfrac{1}{s^2+3s+2} = \dfrac{1}{s+1} - \dfrac{1}{s+2}$

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 3\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = x(t)$$

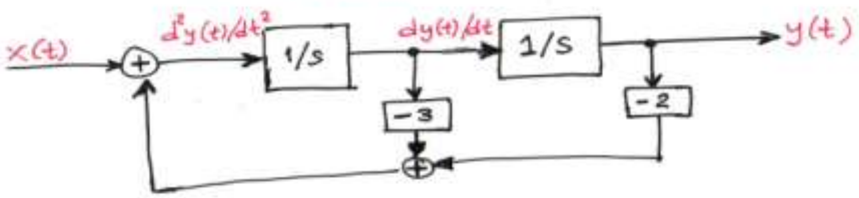
ΕΝ ΣΕΙΡΑ :



ΕΝ ΠΑΡΑΛΛΗΛΩ :



ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΜΟΡΦΗ :
(DIRECT FORM)



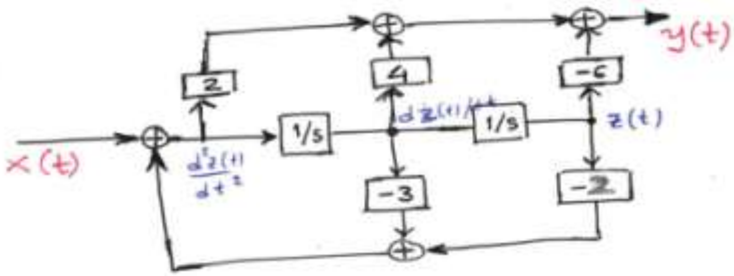
9.6. Διαγράμματα Υλοποίησης Γ.Χ.Α. Συστημάτων (IV)

- $H(s) = \dfrac{2s^2+4s-6}{s^2+3s+2} = \dfrac{1}{(s^2+3s+2)} \cdot (2s^2+4s-6)$

(για υλοποίηση σε κανονική μορφή)

$= \left[\dfrac{2(s-1)}{s+2}\right]\left(\dfrac{s+3}{s+1}\right)$ σε σειρά

$= 2 + \dfrac{6}{s+2} - \dfrac{8}{s+1}$ εν παραλλήλω



9.7. Μονόπλευρος Μ/Σ Laplace – Ορισμός

$$\boxed{X(s) = \int_{0^-}^{+\infty} x(t) e^{-st} dt}$$

ΜΟΝΟΠΛΕΥΡΟΣ Μ/Σ LAPLACE

UNILATERAL LAPLACE TRANSFORM

- $x(t) \xleftrightarrow{u\mathcal{L}} X(s) = u\mathcal{L}\{x(t)\}$
- ROC: Περιοχή σύγκλισης είναι δεξιό ημιεπίπεδο (τουλάχιστον)
- $u\mathcal{L}\{x(t)\} = \mathcal{L}\{x(t)\}$ για αιτιατά σήματα.

9.7. Μονόπλευρος Μ/Σ Laplace – Παραδείγματα (I)

- $x(t) = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-at} u(t)$

Επειδή $x(t) = 0 \quad \forall t<0$

$\mathcal{UL}\{x(t)\} = \mathcal{L}\{x(t)\} =$

$= \frac{1}{(s+a)^n}$, **ROC:** $Re\{s\} > -a$

- $x(t) = e^{-a(t+1)} u(t+1) \underset{\text{ΔΙΠΛΕΥΡΟΣ Μ/Σ LAPLACE}}{\overset{\mathcal{L}}{\Longrightarrow}} \boxed{X(s) = \frac{e^{s}}{s+a}}$, $Re\{s\} > -a$

$\xrightarrow[\text{ΜΟΝΟΠΛΕΥΡΟΣ Μ/Σ LAPLACE}]{\mathcal{UL}}$

$$X(s) = \int_{0^-}^{+\infty} e^{-a(t+1)} u(t+1) e^{-st} dt$$

$$= \int_{0^-}^{+\infty} e^{-a} e^{-t(s+a)} dt = \boxed{\frac{e^{-a}}{s+a}} \quad Re\{s\} > -a$$

- $x(t) = \delta(t) + 2\frac{d\delta(t)}{dt} + e^{t} u(t)$

$\mathcal{UL}\{x(t)\} = \mathcal{L}\{x(t)\} = 1 + 2s + \frac{1}{s-1}$

$x(t) = 0, \; t<0$
SINGULARITIES AT 0

$Re\{s\} > -1$

9.7. Μονόπλευρος Μ/Σ Laplace – Παραδείγματα (II)

- $X(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)} \xrightarrow{\mathcal{UL}^{-1}} \boxed{x(t) = [e^{-t} - e^{-2t}]u(t)}$, $t > 0^-$

  ↳ ROC προς τα δεξιά

- $X(s) = \frac{s^2-3}{s+2} = A + Bs + \frac{C}{s+2}$

  $s^2 - 3 = (A+Bs)(s+2) + C \Leftrightarrow A = -2,\ B = 1,\ C = 1$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow X(s) = -2 + s + \frac{1}{s+2}$ ROC: $Re\{s\} > -2$

$\xrightarrow{\mathcal{UL}^{-1}} \boxed{x(t) = -2\delta(t) + \frac{d\delta(t)}{dt} + e^{-2t}u(t)}$ για $t > 0^-$

9.7. Μονόπλευρος Μ/Σ Laplace – Ιδιότητες (Ι)

- Μερικές ιδιότητες του ΔΙΠΛΕΥΡΟΥ Μ/Σ LAPLACE διαφοροποιούνται στην περίπτωση του ΜΟΝΟΠΛΕΥΡΟΥ Μ/Σ.

- ΣΥΝΕΛΙΞΗ:

Απαιτεί: $x_1(t) = x_2(t) = 0, \ \forall t<0$

Τότε: $x_1(t) * x_2(t) \xleftrightarrow{UL} \mathcal{X}_1(s)\mathcal{X}_2(s)$

- ΔΙΑΦΟΡΙΣΗ:

$$\frac{dx(t)}{dt} \xleftrightarrow{UL} s\mathcal{X}(s) - x(0^-)$$

$$\frac{d^2x(t)}{dt} \xleftrightarrow{UL} s^2\mathcal{X}(s) - sx(0^-) - x'(0^-)$$

$$\vdots$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: $\displaystyle\int_{0^-}^{+\infty} \frac{dx(t)}{dt} e^{-st} dt = \underbrace{x(t)e^{-st}\Big|_{0^-}^{+\infty}}_{-x(0^-)} + \underbrace{s\int_{0^-}^{+\infty} x(t)e^{-st} dt}_{s\mathcal{X}(s)}$

9.7. Μονόπλευρος Μ/Σ Laplace – Ιδιότητες (ΙΙ)

- Η τελευταία ιδιότητα επιτρέπει την επίλυση γραμμικών διαφορικών εξισώσεων με σταθερούς συντελεστές και ΜΗ ΜΗΔΕΝΙΚΕΣ ΑΡΧΙΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{d^2y(t)}{dt^2} + 3\dfrac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = x(t) \quad (*) \\ y(0^-) = \beta, \quad y'(0^-) = \gamma \end{array}\right\} \Longrightarrow \boxed{y(t) = ?}$$

$$\boxed{x(t) = a u(t)}$$

$$(*) \overset{UL}{\Longrightarrow} s^2 Y(s) - \beta s - \gamma + 3sY(s) - 3\beta + 2Y(s) = \frac{a}{s}$$

$$\Longrightarrow Y(s) = \frac{\beta(s+3)}{(s+1)(s+2)} + \frac{\gamma}{(s+1)(s+2)} + \frac{a}{s(s+1)(s+2)}$$

έστω $a=2$, $\beta=3, \gamma=-5$

$$\Longrightarrow Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} + \frac{3}{s+2} \Longrightarrow \boxed{y(t) = [1 - e^{-t} + 3e^{-2t}]\,u(t) \quad t > 0^-}$$

9.7. Μονόπλευρος Μ/Σ Laplace – Ιδιότητες (III)

$$x(t) \leftrightarrow \mathcal{X}(s) = \int_{t=0}^{+\infty} x(t)\, e^{-st}\, \mathrm{d}t$$

Μονόπλευροι μετασχηματισμοί Laplace:

Ιδιότητες (ισχύουν και για μη αιτιατά σήματα):

$$e^{s_o t} x(t) \leftrightarrow \mathcal{X}(s - s_o)$$

$$\text{Για } a > 0: \; x(at) \leftrightarrow \frac{1}{a} \mathcal{X}(\frac{s}{a})$$

$$\frac{x(t)}{t} \leftrightarrow \int_s^{+\infty} \mathcal{X}(u)\, \mathrm{d}u$$

$$\int_{0^-}^{t} x(\tau)\, \mathrm{d}\tau \leftrightarrow \frac{1}{s} \mathcal{X}(s)$$

$$-t\, x(t) \leftrightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} \mathcal{X}(s)$$

$$(-t)^n x(t) \leftrightarrow \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}s^n} \mathcal{X}(s)$$

Για ΑΙΤΙΑΤΑ σήματα:

$$\mathcal{X}(s) = X(s)$$

$$\text{Για } t_o > 0: \; x(t - t_o) \leftrightarrow e^{-s t_o} \mathcal{X}(s)$$

$$x_1(t) * x_2(t) \leftrightarrow \mathcal{X}_1(s)\, \mathcal{X}_2(s)$$

Θεωρήματα αρχικής & τελικής τιμής (για σήματα $x(t)$ που πληρούν συγκεκριμένες συνθήκες στο $t = 0$):

$$\lim_{s \to \infty} s\, \mathcal{X}(s) = x(0^+)$$

$$\lim_{t \to \infty} x(t) = \lim_{s \to 0} s\, \mathcal{X}(s)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} x(t) \leftrightarrow s\, \mathcal{X}(s) - x(0^-)$$

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n} x(t) \leftrightarrow s^n \mathcal{X}(s) - s^{n-1} x(0^-) - s^{n-2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} x(t)|_{t=0^-} - \dots - \frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}t^{n-1}} x(t)|_{t=0^-}$$