ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ

Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών

•ΘΕΩΡΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ & ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

•

•*Γεράσιμος Ποταμιάνος*

•

•**Αναπλ. Καθηγητής,**

•**Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών**

•

•**Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας**

•

•http://www.inf.uth.gr/~gpotamianos

- *ΘΕΩΡΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ & ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ*
- *Ενότητα 4:* **ΣΥΝΕΧΗΣ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ FOURIER**

•4.0. Εισαγωγή

▪Μάθαμε για την αναπαράσταση **περιοδικών** σημάτων σε **σειρές Fourier**.

▪Επίσης, πώς αυτή η αναπαράσταση είναι χρήσιμη όταν **περιοδικά** σήματα εφαρμόζονται σε **Γ.Χ.Α.** συστήματα.

▪Στο κεφάλαιο αυτό θα επεκτείνουμε τα παραπάνω και για **μη-περιοδικά** σήματα (πεπερασμένης ενέργειας), στον **συνεχή χρόνο**.

- ✓Δημιουργείται έτσι μία «συνέχεια» αρμονικών στο πεδίο της συχνότητας.
- ✓Το άθροισμα (σειρά) Fourier γίνεται ολοκλήρωμα.
- ✓Καταλήγουμε έτσι στον μετασχηματισμό Fourier.
- ✓Επεκτείνουμε τον φορμαλισμό αυτό για να περιγράφει και τα περιοδικά σήματα.

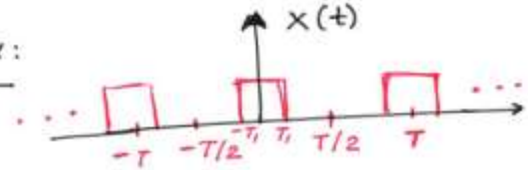
▪Δίνουμε μεγάλη σημασία στις **ιδιότητες** μετασχηματισμού Fourier.

- ✓Π.χ., Δυικότητα, συνέλιξη, γινόμενο.

▪Εφαρμογή σε Γ.Χ.Α. συστήματα που περιγράφονται με **διαφορικές εξισώσεις**.

•4.1. Μ/Σ Fourier για απεριοδικά σήματα συνεχούς χρόνου – Ανάπτυξη (Ι)

Παράδειγμα:



$$x(t) = \begin{cases} 1, & |t| < T_1 \\ 0, & T_1 < |t| < T/2 \end{cases}$$

(επανάληψη κάθε T)

Σειρά Fourier με

$$a_k = \frac{2\sin(k\Omega_0 T_1)}{k\Omega_0 T}$$

$2\pi/T$

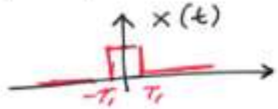
Εναλλακτικά:

$$Ta_k = \frac{2\sin(\Omega T_1)}{\Omega}\Bigg|_{\Omega = k\Omega_0}$$

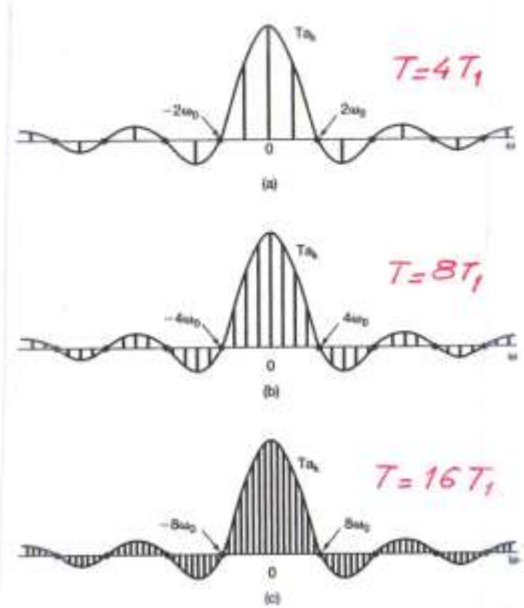
ENVELOPE FUNCTION ("φάκελος")

$T \uparrow \Rightarrow$ φάκελος δειγματοληπτείται πιο συχνά

$T \rightarrow \infty \Rightarrow$



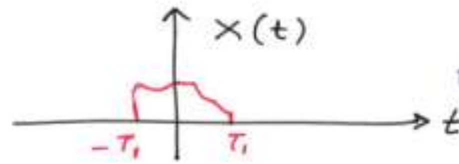
συνεχές φάσμα



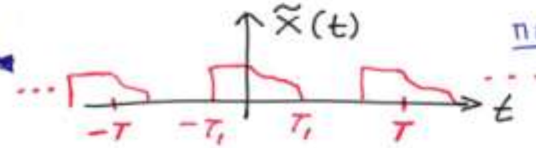
•Σχ. 4.2 από βιβλίο Oppenheim-Willsky

•4.1. Μ/Σ Fourier – Ανάπτυξη (ΙΙ)

Αρχικό σήμα $x(t)$



ΜΗ ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ



ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ

ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΣΕ ΣΕΙΡΑ FOURIER

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\Omega_0 t} \quad (1)$$

$\tilde{x}(t)$ in $[-T/2, T/2]$

$$a_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-jk\Omega_0 t} dt = \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-jk\Omega_0 t} dt \Rightarrow$$

ΟΡΙΖΟΥΜΕ:

$$X(j\Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\Omega t} dt$$

$$\Rightarrow a_k = \frac{1}{T} X(jk\Omega_0) \quad (2)$$

$$(1),(2) \rightarrow \tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T} X(jk\Omega_0) e^{jk\Omega_0 t} = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(jk\Omega_0) e^{jk\Omega_0 t}\Omega_0$$

$T \leftrightarrow 2\pi/\Omega_0$

$$T \rightarrow \infty \Leftrightarrow \Omega_0 \rightarrow 0, \quad \tilde{x}(t) \rightarrow x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(j\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega$$

•4.1. Μ/Σ Fourier – Ανάπτυξη (III)

$$\boxed{x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(j\Omega)e^{j\Omega t}\,d\Omega}$$

ΣΥΝΘΕΣΗ
ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΣ Μ/Σ FOURIER

$$\boxed{X(j\Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,e^{-j\Omega t}\,dt}$$

ΑΝΑΛΥΣΗ
Μ/Σ FOURIER

$$x(t) = \mathcal{F}^{-1}\{X(j\Omega)\}$$

$$X(j\Omega) = \mathcal{F}\{x(t)\}$$

$$\boxed{x(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(j\Omega)}$$

Φάσμα / Πυκνότητα Φάσματος
"SPECTRUM"

• Για το περιοδικό $\tilde{x}(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(t-mT)$

$$a_k = \frac{1}{T}X(j\Omega)\Big|_{\Omega = k\Omega_0 = k\frac{2\pi}{T}}$$

ΔΕΙΓΜΑΤΑ
ΤΟΥ ΦΑΣΜΑΤΟΣ

•4.1. Μ/Σ Fourier – Σύγκλιση

ΣΥΓΚΛΙΣΗ ΑΝ ΤΟ ΣΗΜΑ ΕΧΕΙ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 \, dt < \infty$$

ΕΝΑΛΛΑΚΤΙΚΑ (ΣΥΝΘΗΚΕΣ DIRICHLET):

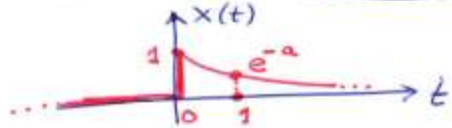
- ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΙΜΟ ΚΑΤΑ ΑΠΟΛΥΤΗ ΤΙΜΗ $\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| \, dt < \infty$
- ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΟΣ ΑΡΙΘΜΟΣ ΜΕΓΙΣΤΩΝ / ΕΛΑΧΙΣΤΩΝ ΣΕ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΟ ΔΙΑΣΤΗΜΑ
- ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΟΣ ΑΡΙΘΜΟΣ ΑΣΥΝΕΧΕΙΩΝ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΟΥ ΜΕΓΕΘΟΥΣ ΣΕ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΟ ΔΙΑΣΤΗΜΑ

ΦΑΙΝΟΜΕΝΟ GIBBS...

- ΣΥΓΚΛΙΣΗ ΔΕΝ ΣΗΜΑΙΝΕΙ $x(t) = \mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{F}\{x(t)\}\}, \forall t$

•4.1. Μ/Σ Fourier – Παραδείγματα (I)

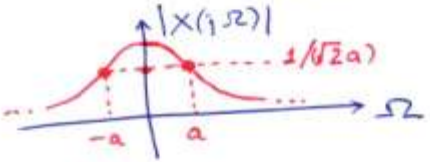
$\boxed{x(t)=e^{-at}u(t)}$, $a>0$ $\left[\mathrm{Re}\{a\}>0\right]$

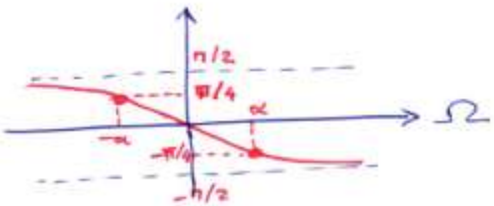


$a>0$

$$X(j\Omega)=\int_0^{+\infty} e^{-at}e^{-j\Omega t}\,dt = -\frac{1}{a+j\Omega}e^{-(a+j\Omega)t}\Big|_0^{\infty} = \frac{1}{a+j\Omega}$$

$$|X(j\Omega)| = \frac{1}{\sqrt{a^2+\Omega^2}}, \quad \measuredangle X(j\Omega) = -\tan^{-1}\left(\frac{\Omega}{a}\right)$$

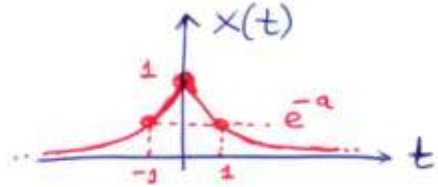




$$X(j\Omega)=\frac{1}{\alpha+j\Omega}$$ και για $\alpha\in\mathbb{Z}$: $\mathrm{Re}\{a\}>0$

•4.1. Μ/Σ Fourier – Παραδείγματα (ΙΙ)

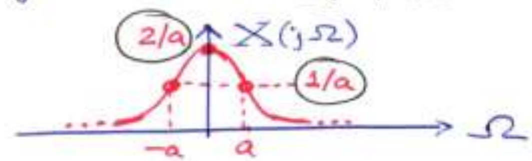
$$\boxed{x(t) = e^{-a|t|}, \quad a > 0}$$



$$X(j\Omega) = \int_{-\infty}^{0} e^{at} e^{-j\Omega t} dt + \int_{0}^{+\infty} e^{-at} e^{-j\Omega t} dt$$

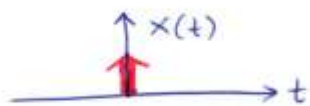
$$= \frac{1}{a - j\Omega} + \frac{1}{a + j\Omega} = \frac{2a}{a^2 + \Omega^2}$$

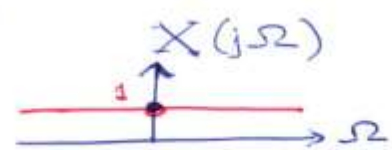
$\alpha > 0$



$$\boxed{x(t) = \delta(t)}$$

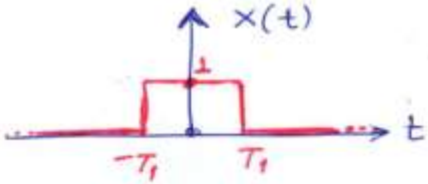
$$X(j\Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) e^{-j\Omega t} dt = 1$$





•4.1. Μ/Σ Fourier – Παραδείγματα (III)

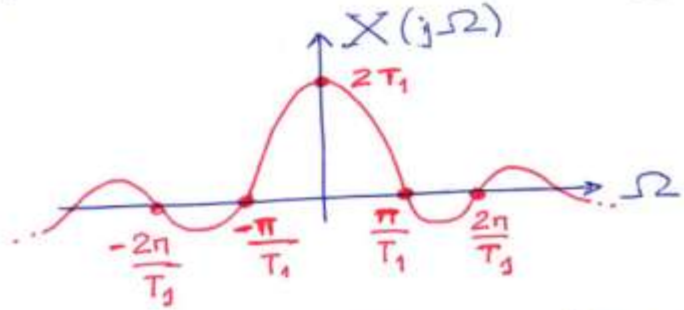
$$\boxed{x(t) = \begin{cases} 1, & |t| < T_1 \\ 0, & |t| > T_1 \end{cases}}$$



$$X(j\Omega) = \int_{-T_1}^{T_1} e^{-j\Omega t}\,dt = -\frac{1}{j\Omega}\, e^{-j\Omega t}\Big|_{-T_1}^{T_1} =$$

$$= \frac{2}{\Omega}\,\frac{1}{2j}\left(e^{j\Omega T_1} - e^{-j\Omega T_1}\right) = \frac{2\sin(\Omega T_1)}{\Omega}$$

sinc function

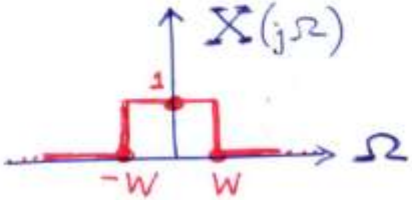


$$\text{sinc}(\theta) = \frac{\sin \pi\theta}{\pi\theta}$$

Άρα: $X(j\Omega) = 2T_1 \,\text{sinc}\left(\frac{\Omega T_1}{\pi}\right)$

•4.1. Μ/Σ Fourier – Παραδείγματα (IV)

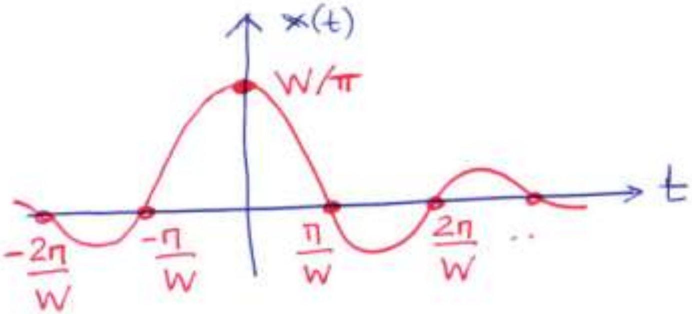
$$\boxed{X(j\Omega) = \begin{cases} 1 & , \ |\Omega| < W \\ 0 & , \ |\Omega| > 0 \end{cases}}$$



$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-W}^{+W} e^{j\Omega t}\, d\Omega = \frac{1}{2j\,t\,\pi} e^{j\Omega t}\Big|_{-W}^{W}$$

$$= \frac{1}{\pi t}\,\frac{1}{2j}\left(e^{jWt} - e^{-jWt}\right) = \frac{\sin(Wt)}{\pi t}$$

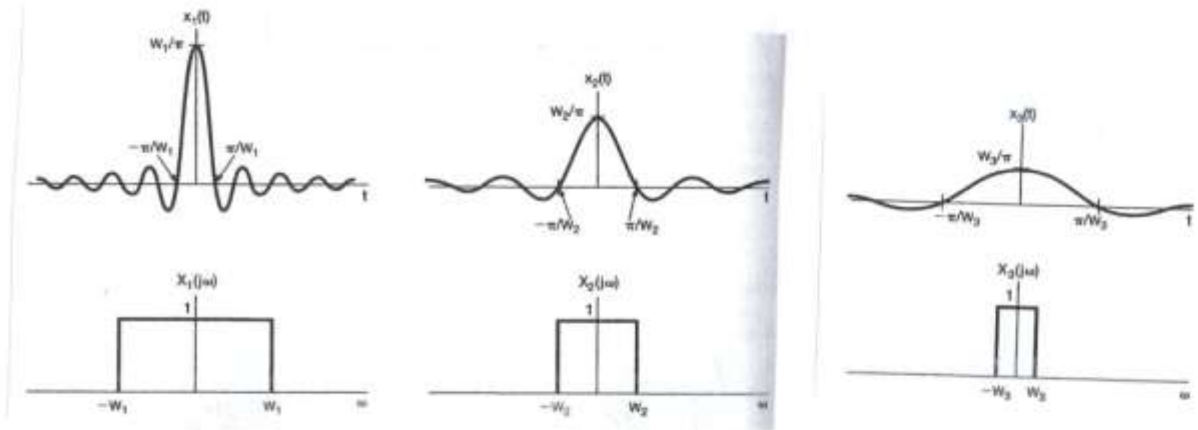
$$= \frac{W}{\pi}\,\mathrm{sinc}\left(\frac{Wt}{\pi}\right)$$



DUALITY !

•4.1. Μ/Σ Fourier – Παραδείγματα (V)

Ενδιαφέρον να παρακολουθήσουμε /κατανοήσουμε σχέση χρόνου /συχνότητας ....



•Σχ. 4.11 από βιβλίο Oppenheim-Willsky

$W_1 > W_2 > W_3$

•4.2. Μ/Σ Fourier Περιοδικών Σημάτων (Ι)

- Θα θέλαμε να έχουμε το ίδιο πλαίσιο (Μ/Σ FOURIER) και για τα περιοδικά σήματα...

- Έστω: $X(j\Omega) = 2\pi\delta(\Omega - \Omega_0)$

(ΚΡΟΥΣΤΙΚΗ ΣΤΟ Ω_0 ΠΟΛ/ΣΜΕΝΗ ΜΕ 2π)

$$\Rightarrow x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} 2\pi\delta(\Omega - \Omega_0)\, e^{j\Omega t}\, d\Omega = e^{j\Omega_0 t}$$

- Γενικότερα:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\Omega_0 t} \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow}$$

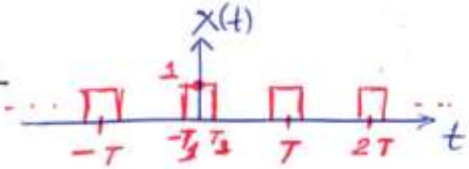
$$\boxed{X(j\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi a_k\, \delta(\Omega - k\Omega_0)}$$

Απευθείας από σειρά FOURIER

•4.2. Μ/Σ Fourier Περιοδικών Σημάτων (ΙΙ)

$$x(t)=\begin{cases}1, & |t|<T_1\\ 0, & T_1<|t|<T/2\end{cases}$$

→ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ ΚΑΘΕ T



F.S.
(Fourier Series)

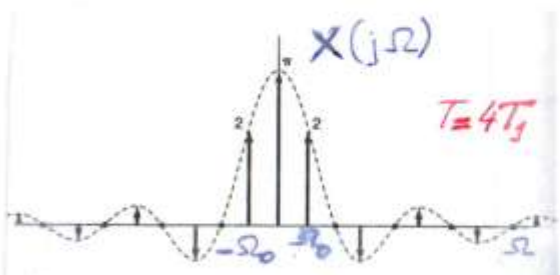
$2\pi/T$

$$a_k = \frac{\sin(k\Omega_0 T_1)}{k\pi}$$

C.F.T.
(Continuous Fourier Trasform)

$$X(j\Omega)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{2\sin(k\Omega_0 T_1)}{k}\cdot\delta(\Omega-\Omega_0 k)$$

$2\pi a_k$



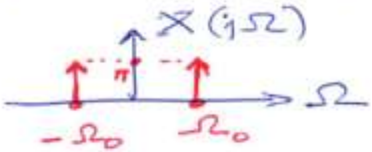
•Σχ. 4.12 από βιβλίο Oppenheim-Willsky

•4.2. Μ/Σ Fourier Περιοδικών Σημάτων (III)

$$\boxed{x(t) = \cos(\Omega_0 t)}$$

F.S.: $a_1 = a_{-1} = 1/2$, $a_k = 0$, $k \neq \pm 1$

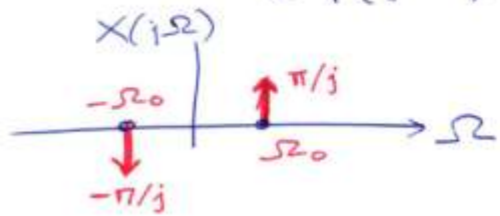
C.F.T.: $X(j\Omega) = \pi\left[\delta(\Omega - \Omega_0) + \delta(\Omega + \Omega_0)\right]$



$$\boxed{x(t) = \sin(\Omega_0 t)}$$

F.S.: $a_1 = \frac{1}{2j}$, $a_{-1} = -\frac{1}{2j}$, $a_k = 0$, $k \neq \pm 1$

C.F.T.: $X(j\Omega) = \frac{\pi}{j}\left[\delta(\Omega - \Omega_0) - \delta(\Omega + \Omega_0)\right]$



•4.2. Μ/Σ Fourier Περιοδικών Σημάτων (IV)

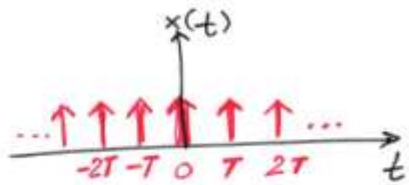
$$\boxed{x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t-kT)}$$

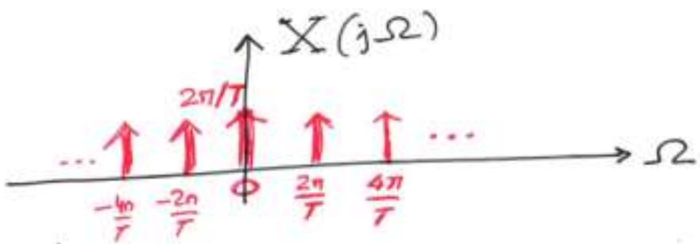
IMPULSE TRAIN

F.S.: $a_k = \frac{1}{T}, \quad \forall k$

C.F.T.: $X(j\Omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\Omega - k\frac{2\pi}{T}\right)$

Ω_0





$T\uparrow \Rightarrow \frac{2\pi}{T}\downarrow$

•4.3. Ιδιότητες Μ/Σ Fourier (I)

Συμβολισμός: $x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(j\Omega)$

πχ $e^{-at}u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{a+j\Omega}$ [Re{a}>0]

ΙΔΙΟΤΗΤΑ 1: Γραμμικότητα / Linearity

$x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(j\Omega)$

$y(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} Y(j\Omega)$

$\Longrightarrow$

$$\boxed{a x(t) + \beta y(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} a X(j\Omega) + \beta Y(j\Omega)}$$

•4.3. Ιδιότητες Μ/Σ Fourier (II)

ΙΔΙΟΤΗΤΑ 2: Χρονική Μετατόπιση / Time Shift

$$x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(j\Omega) \Rightarrow \boxed{x(t-t_0) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} e^{-j\Omega t_0} X(j\Omega)}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(j\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(t-t_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(j\Omega) e^{j\Omega(t-t_0)} d\Omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\left(X(j\Omega) e^{-j\Omega t_0}\right)}_{\text{Μ/Σ Fourier}} e^{j\Omega t} d\Omega$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:

Το μέτρο/πλάτος δεν αλλάζει

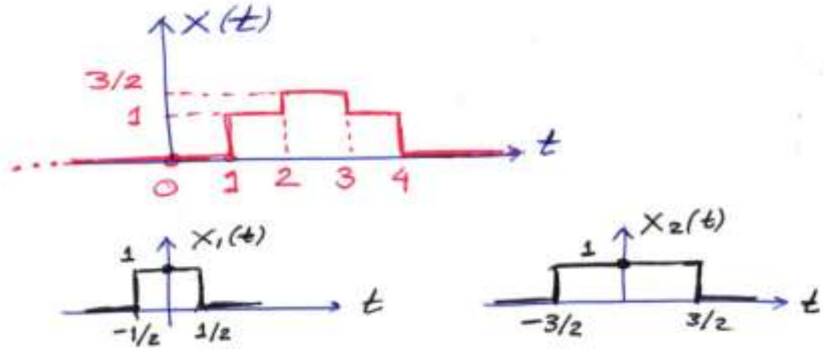
$$\mathcal{F}\{x(t-t_0)\} = |X(j\Omega)| e^{j(\measuredangle X(j\Omega) - \Omega t_0)}$$

Η φάση αλλάζει

Το πλάτος του Μ/Σ Fourier δεν αλλάζει με χρονική μετατόπιση!

•4.3. Ιδιότητες Μ/Σ Fourier (ΙΙΙ)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:



$$x(t) = \frac{1}{2}\cdot x_1(t-2.5) + x_2(t-2.5)$$

$$x_1(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{2\sin(\Omega/2)}{\Omega}$$

$$x_2(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{2\sin(3\Omega/2)}{\Omega}$$

$$\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow X(j\Omega) = e^{-j\frac{5\Omega}{2}}\left\{\frac{\sin(\Omega/2) + 2\sin(3\Omega/2)}{\Omega}\right\}$$

•4.3. Ιδιότητες Μ/Σ Fourier (IV)

ΙΔΙΟΤΗΤΑ 3 : ΣΥΖΥΓΙΑ / ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ / CONJUGATION {CONJUGATE SYMMETRY}

$$x(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(j\Omega) \Rightarrow \boxed{x^*(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X^*(-j\Omega)}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ :

$$X^*(j\Omega) = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\Omega t} dt\right]^* = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t) e^{j\Omega t} dt$$

$$\xRightarrow{\Omega \to -\Omega} X^*(-j\Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t) e^{-j\Omega t} dt = \mathcal{F}\{x^*(t)\}$$

ΕΠΙΠΛΕΟΝ :

$x(t)$ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟ ΣΗΜΑ $\Rightarrow \boxed{X(-j\Omega) = X^*(j\Omega)}$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ :

$$x(t) = e^{-at}u(t), \quad a>0 \Rightarrow X(j\Omega) = \frac{1}{a+j\Omega} \to X(-j\Omega) = \frac{1}{a-j\Omega} = X^*(j\Omega)$$

•4.3. Ιδιότητες Μ/Σ Fourier (V)

ΕΠΙΠΛΕΟΝ: $x(t) \in \mathbb{R} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{Re}\{X(j\Omega)\} = \mathrm{Re}\{X(-j\Omega)\} & \text{ΑΡΤΙΟ} \\ \mathrm{Im}\{X(j\Omega)\} = -\mathrm{Im}\{X(-j\Omega)\} & \text{ΠΕΡΙΤΤΟ} \\ |X(j\Omega)| = |X(-j\Omega)| & \text{ΑΡΤΙΟ} \\ \measuredangle X(j\Omega) = -\measuredangle X(-j\Omega) & \text{ΠΕΡΙΤΤΟ} \end{cases}$

$x(t) \in \mathbb{R}$ and EVEN (ΑΡΤΙΟ) $\Rightarrow$ $X(j\Omega) \in \mathbb{R}$ and EVEN

i.e. $X(j\Omega) = X(-j\Omega)$
$= X^*(j\Omega)$

$x(t) \in \mathbb{R}$ and ODD [ΠΕΡΙΤΤΟ] $\Rightarrow$ $X(j\Omega)$ imaginary and odd

•4.3. Ιδιότητες Μ/Σ Fourier (VI)

ΕΠΙΠΛΕΟΝ :

$$x(t) \text{ REAL } \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(j\Omega)$$

$$= x_e(t) + x_o(t)$$

$$x_e(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} Re\{X(j\Omega)\} \qquad x_o(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} j\,Im\{X(j\Omega)\}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ :

$$x(t) = e^{-a|t|}, \quad a>0$$

$$= 2\,\mathcal{E}v\{e^{-at}u(t)\} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} 2\,Re\left\{\frac{1}{a+j\Omega}\right\} = \frac{2a}{a^2+\Omega^2}$$

$$e^{-at}u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{a+j\Omega}$$

γιατί: $e^{-a|t|} = e^{-at}u(t) + e^{at}u(-t)$

$$= 2\left[\frac{e^{-at}u(t) + e^{at}u(-t)}{2}\right]$$

•4.3. Ιδιότητες Μ/Σ Fourier (VII)

ΙΔΙΟΤΗΤΑ 4: ΔΙΑΦΟΡΙΣΗ / DIFFERENTIATION
ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ / INTEGRATION

$$x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(j\Omega) \Rightarrow \boxed{\frac{dx(t)}{dt} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} j\Omega X(j\Omega)}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{j\Omega X(j\Omega)}_{\mathcal{F}\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\}} e^{j\Omega t} d\Omega$$

ΠΟΛΥ ΣΗΜΑΝΤΙΚΗ ΙΔΙΟΤΗΤΑ ΓΙΑ ΤΗΝ ΑΝΑΛΥΣΗ Γ.Χ.Α. ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΠΟΥ ΠΕΡΙΓΡΑΦΟΝΤΑΙ ΜΕ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΕΙΣΟΔΟΥ/ΕΞΟΔΟΥ

ΕΠΙΠΛΕΟΝ:

$$x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(j\Omega) \Rightarrow \boxed{\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{j\Omega} X(j\Omega) + \pi X(0)\delta(\Omega)}$$

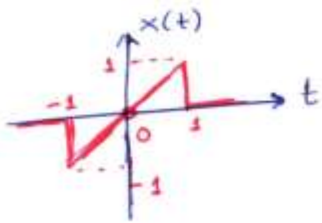
"DC VALUE"

•4.3. Ιδιότητες Μ/Σ Fourier (VIII)

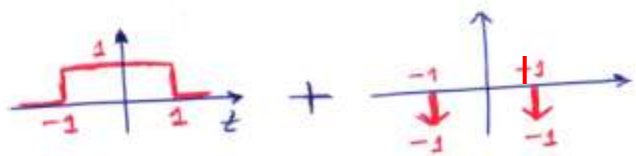
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ :

• $x(t)=u(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)\,d\tau \Rightarrow \boxed{X(j\Omega)=\frac{1}{j\Omega}+\pi\delta(\Omega)}$

$$\delta(t)=\frac{du(t)}{dt} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} j\Omega\left[\frac{1}{j\Omega}+\pi\delta(\Omega)\right]=1$$

• 

$\rightsquigarrow X(j\Omega)=?$

$g(t)=\frac{dx(t)}{dt}=$ 

$$\xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{2\sin\Omega}{\Omega}-e^{j\Omega}-e^{-j\Omega}=G(j\Omega)$$

$$\Rightarrow X(j\Omega)=\frac{2\sin\Omega}{j\Omega^2}-\frac{2\cos\Omega}{j\Omega}+\pi\cancelto{0}{G(0)}\delta(\Omega)$$

•4.3. Ιδιότητες Μ/Σ Fourier (IX)

ΙΔΙΟΤΗΤΑ (5) : ΧΡΟΝΙΚΗ ΚΑΙ ΣΥΧΝΟΤΙΚΗ ΚΛΙΜΑΚΩΣΗ / TIME AND FREQUENCY SCALING

$$x(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(j\Omega) \Rightarrow \boxed{x(at) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{|a|} X\left(j\frac{\Omega}{a}\right)}$$

a: ΜΗ ΜΗΔΕΝΙΚΟΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΣ

ΑΠΟΔΕΙΞΗ :

$$\mathcal{F}\{x(at)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(at) e^{-j\Omega t} dt =$$

$\tau = at$

$$= \begin{cases} \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) e^{-j\frac{\Omega}{a}\tau} d\tau \\ -\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) e^{-j\frac{\Omega}{a}\tau} d\tau \end{cases} = \frac{1}{|a|} X\left(j\frac{\Omega}{a}\right)$$

ΕΙΔΙΚΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ :

$$a = -1 \rightsquigarrow x(-t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(-j\Omega)$$

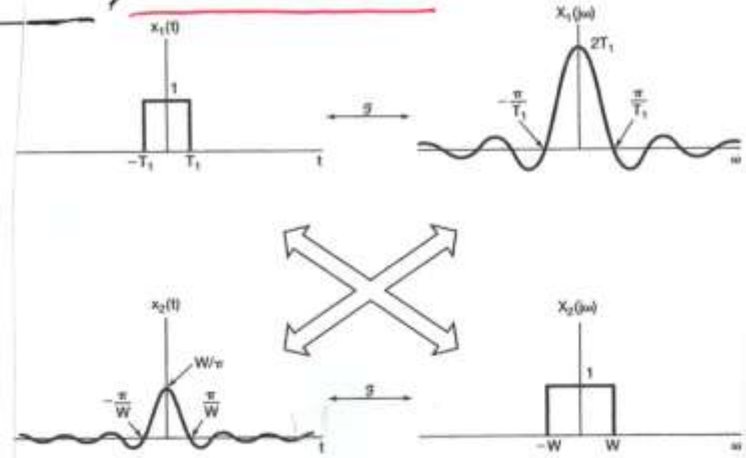
ΑΝΑΚΛΑΣΗ ΣΤΟΝ ΧΡΟΝΟ — ΑΝΑΚΛΑΣΗ ΣΤΗΝ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ

•4.3. Ιδιότητες Μ/Σ Fourier (X)

ΙΔΙΟΤΗΤΑ 6: ΔΥΙΣΜΟΣ / DUALITY

$$x(t) \xleftrightarrow{F} X(j\Omega)$$

$$\Rightarrow \boxed{X(t) \xleftrightarrow{F} 2\pi x(-j\Omega)}$$



•Σχ. 4.17 από βιβλίο Oppenheim-Willsky

ΕΧΟΥΜΕ ΔΕΙ:

$$x_1(t) = \begin{cases} 1, & |t| < T_1 \\ 0, & |t| > T_1 \end{cases} \xleftrightarrow{F} X_1(j\Omega) = \frac{2\sin(\Omega T_1)}{\Omega}$$

$$x_2(t) = \frac{\sin Wt}{\pi t} \xleftrightarrow{F} X_2(j\Omega) = \begin{cases} 1, & |\Omega| < W \\ 0, & |\Omega| > W \end{cases}$$

•4.3. Ιδιότητες Μ/Σ Fourier (XI)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ :

$$g(t) = \frac{2}{1+t^2} \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} ?$$

Θυμόμαστε:

$$x(t) = e^{-|t|} \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(j\Omega) = \frac{2}{1+\Omega^2}$$

Άρα:

$$\frac{2}{1+t^2} \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \boxed{2\pi e^{-|\Omega|}}$$

(λόγω δυϊκότητας)

ΖΗΤΟΥΜΕΝΟΣ Μ/Σ FOURIER $G(j\Omega)$

•4.3. Ιδιότητες Μ/Σ Fourier (XII)

ΠΑΡΑΓΩΓΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ
ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΠΡΟΗΓΟΥΜΕΝΩΝ
ΙΔΙΟΤΗΤΩΝ & ΔΥΪΚΟΤΗΤΑΣ:

$$\boxed{-jt\,x(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \frac{dX(j\Omega)}{d\Omega}}$$

$$\boxed{e^{j\Omega_0 t}x(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(j(\Omega-\Omega_0))}$$

$$\boxed{-\frac{1}{jt}x(t) + \pi x(0)\delta(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \int_{-\infty}^{\Omega} X(j\theta)\,d\theta}$$

•4.3. Ιδιότητες Μ/Σ Fourier (XIII)

Σχέση PARSEVAL:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |X(j\Omega)|^2 d\Omega$$

ΟΛΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ ΣΗΜΑΤΟΣ (ΓΙΑ ΣΗΜΑΤΑ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ)

ENERGY DENSITY SPECTRUM

• Για περιοδικά σήματα, χρησιμοποιούμε την αντίστοιχη σχέση / ιδιότητα των σειρών FOURIER.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,x^*(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X^*(j\Omega)e^{-j\Omega t}d\Omega\right]dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X^*(j\Omega)\left[\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,e^{-j\Omega t}dt\right]d\Omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X^*(j\Omega)\,X(j\Omega)\,d\Omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |X(j\Omega)|^2 d\Omega$$

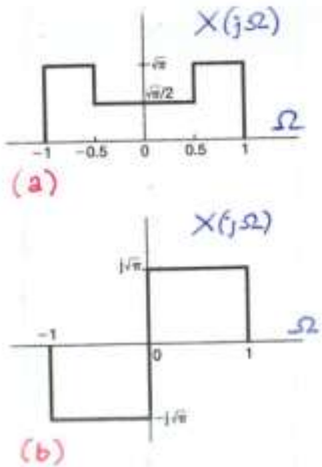
•4.3. Ιδιότητες Μ/Σ Fourier (XIV)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

Υπολογίστε τα

$$E=\int_{-\infty}^{+\infty}|x(t)|^2dt \;, \quad D=\left.\frac{d}{dt}x(t)\right|_{t=0}$$

για τα σήματα x(t) που έχουν Μ/Σ FOURIER που δίνονται στα σχήματα (a) & (b)



•Σχ. 4.18 από βιβλίο Oppenheim-Willsky

Από τη σχέση Parseval:

$$E=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|X(j\Omega)|^2 d\Omega = \begin{cases} 5/8 & (a)\\ 1 & (b)\end{cases}$$

Από ιδιότητα παραγώγισης: $\underbrace{\frac{d}{dt}x(t)}_{g(t)} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \underbrace{j\Omega X(j\Omega)}_{G(j\Omega)}$

$$D = \boxed{g(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} G(j\Omega)\,d\Omega}$$

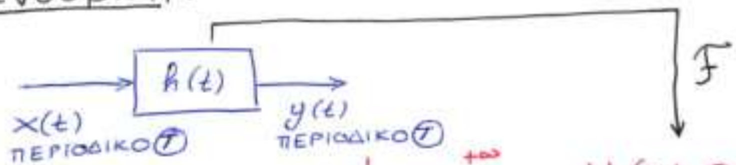
$$\Rightarrow D=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} j\Omega X(j\Omega)\,d\Omega$$

(a) 0

(b) $-1/(2\sqrt{\pi})$

•4.4. Ιδιότητα Συνέλιξης Μ/Σ Fourier (I)

Υπενθύμιση:



$\hookrightarrow \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\Omega_0 t}$ $\quad\quad$ $\hookrightarrow \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k H(jk\Omega_0) e^{jk\Omega_0 t}$

ΙΔΙΟΤΗΤΑ ΣΥΝΕΛΙΞΗΣ / CONVOLUTION PROPERTY

$$y(t) = h(t) * x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \boxed{Y(j\Omega) = H(j\Omega) X(j\Omega)}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

$$Y(j\Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} [\overbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau}^{h(t)*x(t)}] e^{-j\Omega t} dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \underbrace{[\int_{-\infty}^{+\infty} h(t-\tau) e^{-j\Omega t} dt]}\, d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \boxed{e^{-j\Omega\tau} H(j\Omega)} d\tau =$$

$$= H(j\Omega) \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) e^{-j\Omega\tau} d\tau = H(j\Omega) X(j\Omega)$$

•4.4. Ιδιότητα Συνέλιξης Μ/Σ Fourier (ΙΙ)

Μεγάλη σημασία για ανάλυση Γ.Χ.Α. συστημάτων:

$x(t) \rightarrow \boxed{h(t)} \rightarrow y(t)$ ΙΣΟΔΥΝΑΜΑ: $x(t) \rightarrow \boxed{H(j\Omega)} \rightarrow y(t)$

Αν υπάρχει, βέβαια....

Για ευσταθή συστήματα, OK!

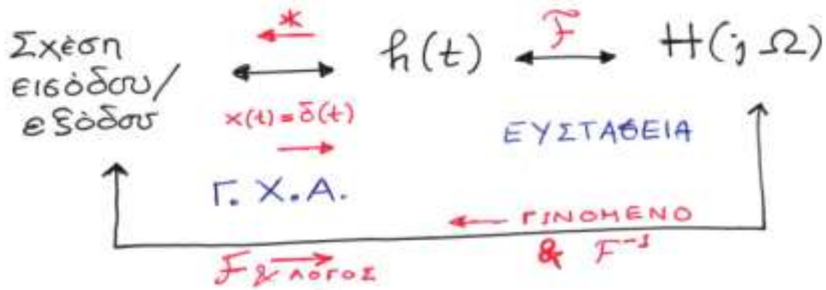
$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|\,dt < \infty$$

Αλλιώς, απαιτείται χρήση μετασχηματισμού LAPLACE

ΣΥΝΔΕΣΜΟΛΟΓΙΕΣ Γ.Χ.Α. ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ:

- ΕΝ ΣΕΙΡΑ: (cascade)
  $x(t) \rightarrow \boxed{H_1(j\Omega)} \rightarrow \boxed{H_2(j\Omega)} \rightarrow y(t)$ $\quad x(t) \rightarrow \boxed{H_1(j\Omega) H_2(j\Omega)} \rightarrow y(t)$
- ΕΝ ΠΑΡΑΛΛΗΛΩ: (parallel)
  $x(t) \rightarrow \boxed{H_1(j\Omega)}, \boxed{H_2(j\Omega)} \rightarrow \oplus \rightarrow y(t)$ $\quad x(t) \rightarrow \boxed{H_1(j\Omega) + H_2(j\Omega)} \rightarrow y(t)$

•4.4. Ιδιότητα Συνέλιξης Μ/Σ Fourier (III)



- $h(t) = \delta(t - t_0)$

  $\hookrightarrow H(j\Omega) = e^{-j\Omega t_0}$

  $\Rightarrow Y(j\Omega) = H(j\Omega)X(j\Omega) = e^{-j\Omega t_0} X(j\Omega)$

  $\Rightarrow y(t) = x(t - t_0)$

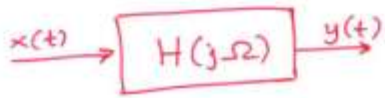
- $y(t) = \dfrac{dx(t)}{dt} \Rightarrow Y(j\Omega) = j\Omega X(j\Omega)$

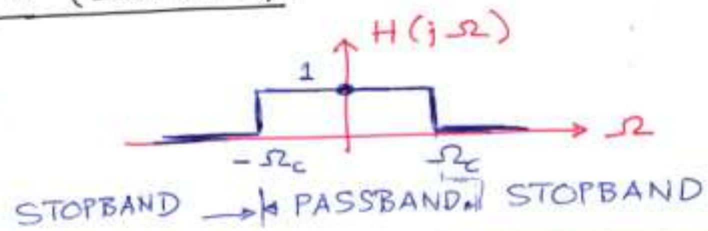
  $\Rightarrow H(j\Omega) = \dfrac{Y(j\Omega)}{X(j\Omega)} = j\Omega$

  $\Rightarrow h(t) = \dfrac{d\delta(t)}{dt}$

•4.4. Ιδιότητα Συνέλιξης Μ/Σ Fourier (IV)

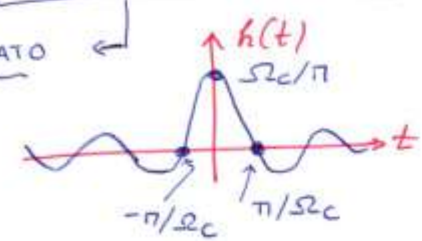
• ΚΑΤΩΠΕΡΑΤΟ ΦΙΛΤΡΟ (ΙΔΑΝΙΚΟ):





$$H(j\Omega) = \begin{cases} 1, & |\Omega| < \Omega_c \\ 0, & |\Omega| > \Omega_c \end{cases} \Longleftrightarrow \boxed{h(t) = \frac{\sin(\Omega_c t)}{\pi t}}$$

ΜΗ ΑΙΤΙΑΤΟ

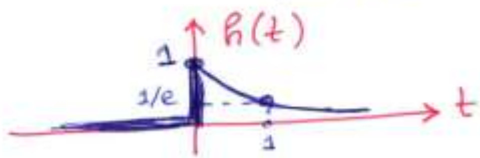


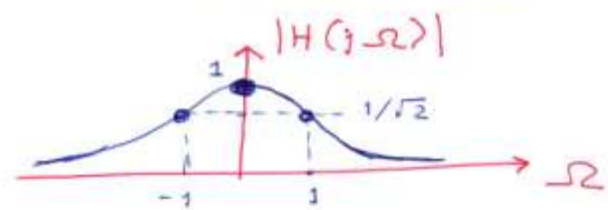
• ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΤΟΥ:

$$h(t) = e^{-t}u(t)$$

$$\Updownarrow$$

$$H(j\Omega) = \frac{1}{j\Omega + 1}$$





•4.4. Ιδιότητα Συνέλιξης Μ/Σ Fourier (V)

$$h(t) = e^{-at} u(t), \quad a > 0$$

$$x(t) = e^{-bt} u(t), \quad b > 0$$

$$x(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t) = ?$$

$$\left. \begin{aligned} X(j\Omega) &= \frac{1}{b + j\Omega} \\ H(j\Omega) &= \frac{1}{a + j\Omega} \end{aligned} \right\} \Rightarrow Y(j\Omega) = \frac{1}{(a + j\Omega)(b + j\Omega)}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{b-a}\left[\frac{1}{a+j\Omega} - \frac{1}{b+j\Omega}\right] \Rightarrow \boxed{y(t) = \frac{1}{b-a}\left[e^{-at} - e^{-bt}\right]u(t)} & b \neq a \\ \frac{1}{(a+j\Omega)^2} = j\frac{d}{d\Omega}\left[\frac{1}{a+j\Omega}\right] \Rightarrow \boxed{y(t) = t e^{-at} u(t)} & b = a \end{cases}$$

•4.4. Ιδιότητα Συνέλιξης Μ/Σ Fourier (VI)

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= \frac{\sin(\Omega_i t)}{\pi t} \\ h(t) &= \frac{\sin(\Omega_c t)}{\pi t} \end{aligned}\right\} \Rightarrow y(t) = ?$$

$$x(t) \rightarrow \boxed{h(t)} \rightarrow y(t)$$

(ΙΔΑΝΙΚΟ ΚΑΤΩΠΕΡΑΤΟ ΦΙΛΤΡΟ)

$$X(j\Omega) = \begin{cases} 1, & |\Omega| \leq \Omega_i \\ 0, & \text{ΑΛΛΟΥ} \end{cases}$$

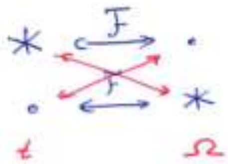
$$H(j\Omega) = \begin{cases} 1, & |\Omega| \leq \Omega_c \\ 0, & \text{ΑΛΛΟΥ} \end{cases}$$

$$\Rightarrow Y(j\Omega) = \begin{cases} 1, & |\Omega| \leq \min\{\Omega_i, \Omega_c\} \\ 0, & \text{ΑΛΛΟΥ} \end{cases}$$

$$\Rightarrow y(t) = \begin{cases} \dfrac{\sin(\Omega_c t)}{\pi t}, & \text{εάν} \quad \Omega_c \leq \Omega_i \\ \dfrac{\sin(\Omega_i t)}{\pi t}, & \text{εάν} \quad \Omega_i \leq \Omega_c \end{cases}$$

•4.5. Ιδιότητα Πολλαπλασιασμού Μ/Σ Fourier (I)

Υπενθύμιση .... Δυϊκότητα



$$s(t)\,p(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} S(j\theta)\,P(j(\Omega-\theta))\,d\theta$$

$$\frac{1}{2\pi}\,S(j\Omega) * P(j\Omega)$$

ΧΡΗΣΙΜΟΤΗΤΑ:

- ΔΙΑΜΟΡΦΩΣΗ ΠΛΑΤΟΥΣ (AMPLITUDE MODULATION)

[MODULATION PROPERTY]

•4.5. Ιδιότητα Πολλαπλασιασμού Μ/Σ Fourier (II)

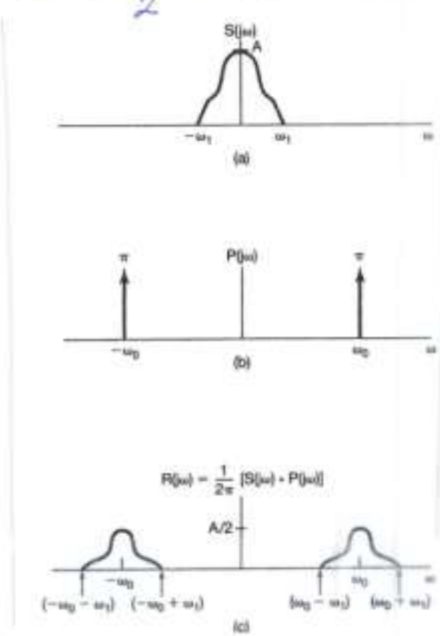
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ:

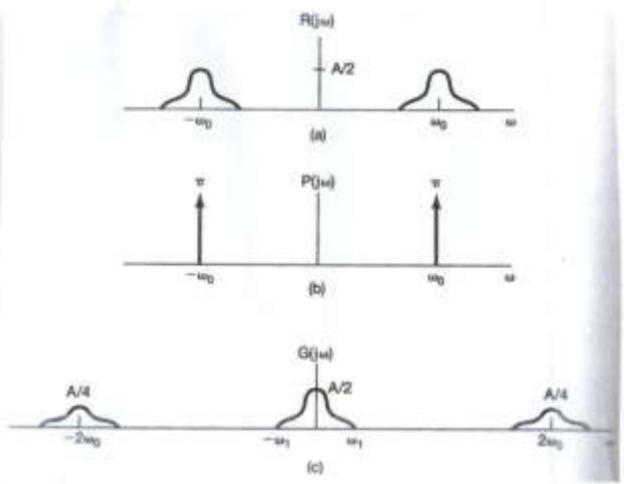
$$p(t) = \cos(\Omega_0 t)$$

$$P(j\Omega) = \pi\,\delta(\Omega-\Omega_0) + \pi\,\delta(\Omega+\Omega_0)$$

$$r(t) = p(t)\,s(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{2} S(j(\Omega-\Omega_0)) + \frac{1}{2} S(j(\Omega+\Omega_0))$$

$$g(t) = r(t)\,p(t)$$





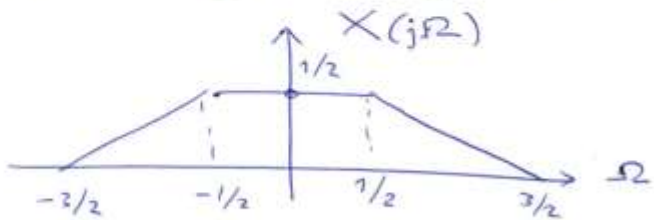
•Σχ. 4.23, 4.24 από βιβλίο Oppenheim-Willsky

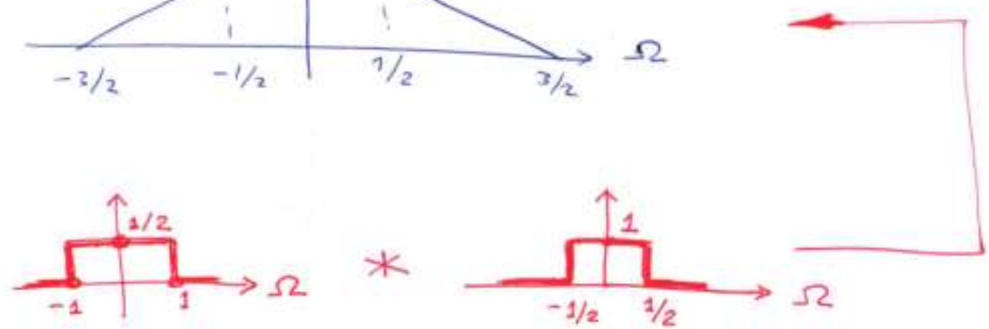
•4.5. Ιδιότητα Πολλαπλασιασμού Μ/Σ Fourier (III)

$$x(t) = \frac{\sin(t)\,\sin\left(\frac{t}{2}\right)}{\pi t^2} \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} ?$$

$$x(t) = \pi\left(\frac{\sin(t)}{\pi t}\right)\cdot\left(\frac{\sin(t/2)}{\pi t}\right)$$

$$X(j\Omega) = \frac{1}{2}\,\mathcal{F}\left\{\frac{\sin(t)}{\pi t}\right\} * \mathcal{F}\left\{\frac{\sin(t/2)}{\pi t}\right\}$$





•4.6. Πίνακας Ιδιοτήτων / Ζευγών Μ/Σ Fourier [Τυπολόγιο]

$$a\,x(t) + b\,y(t) \leftrightarrow a\,X(\Omega) + b\,Y(\Omega)$$

$$x(t-t_o) \leftrightarrow e^{-j\Omega t_o} X(\Omega)$$

$$e^{j\Omega_o t} x(t) \leftrightarrow X(\Omega - \Omega_o)$$

$$x^*(t) \leftrightarrow X^*(-\Omega)$$

$$x(-t) \leftrightarrow X(-\Omega)$$

$$x(a\,t) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} X\left(\frac{\Omega}{a}\right)$$

$$X(t) \leftrightarrow 2\pi\, x(-\Omega) \quad \text{(δυϊκότητα)}$$

$$x(t) * y(t) \leftrightarrow X(\Omega)\, Y(\Omega)$$

$$x(t)\, y(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} \int_{\theta=-\infty}^{+\infty} X(\theta)\, Y(\Omega - \theta)\, d\theta$$

$$\frac{d}{dt} x(t) \leftrightarrow j\,\Omega\, X(\Omega)$$

$$t\, x(t) \leftrightarrow j \frac{d}{d\Omega} X(\Omega)$$

$$\int_{\tau=-\infty}^{t} x(\tau)\, d\tau \leftrightarrow \frac{1}{j\,\Omega} X(\Omega) + \pi\, X(0)\, \delta(\Omega)$$

$$\int_{t=-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega=-\infty}^{+\infty} |X(\Omega)|^2 d\Omega$$
(για μη περιοδικό $x(t)$).

$$\delta(t) \leftrightarrow 1 \qquad \delta(t-t_o) \leftrightarrow e^{-j\Omega t_o}$$

$$u(t) \leftrightarrow \frac{1}{j\,\Omega} + \pi\,\delta(\Omega)$$

$$1 \leftrightarrow 2\pi\,\delta(\Omega) \qquad e^{j\Omega_o t} \leftrightarrow 2\pi\,\delta(\Omega - \Omega_o)$$

$$\cos(\Omega_o t) \leftrightarrow \pi\left[\delta(\Omega - \Omega_o) + \delta(\Omega + \Omega_o)\right]$$

$$\sin(\Omega_o t) \leftrightarrow \frac{\pi}{j}\left[\delta(\Omega - \Omega_o) - \delta(\Omega + \Omega_o)\right]$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT) \leftrightarrow \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\Omega - \frac{2\pi k}{T}\right)$$

$$e^{-at} u(t) \leftrightarrow \frac{1}{a + j\Omega}, \qquad Re\{a\} > 0$$

$$e^{-a|t|} \leftrightarrow \frac{2a}{a^2 + \Omega^2}, \qquad Re\{a\} > 0$$

$$t\, e^{-at} u(t) \leftrightarrow \frac{1}{(a + j\Omega)^2}, \qquad Re\{a\} > 0$$

$$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-at} u(t) \leftrightarrow \frac{1}{(a + j\Omega)^n}, \quad Re\{a\} > 0$$

$$\frac{\sin(\Omega_1 t)}{\pi t} \leftrightarrow X(\Omega) = \begin{cases} 1, & |\Omega| < \Omega_1 \\ 0, & |\Omega| > \Omega_1 \end{cases}$$

$$x(t) = \begin{cases} 1, & |t| < T_1 \\ 0, & |t| > T_1 \end{cases} \leftrightarrow \frac{2\sin(\Omega T_1)}{\Omega}$$

•4.7. Ανάλυση Γ.Χ.Α. Συστημάτων Περιγραφόμενων με Διαφορικές Εξισώσεις

ΣΧΕΣΗ ΕΙΣΟΔΟΥ/ΕΞΟΔΟΥ:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

ΕΥΡΕΣΗ $H(j\Omega)$:

$$\mathcal{F}\{\quad\} = \mathcal{F}\{\quad\}$$

ΓΡΑΜΜΙΚΟΤΗΤΑ $\Rightarrow$ $$\sum_{k=0}^{N} a_k \mathcal{F}\left\{\frac{d^k y(t)}{dt^k}\right\} = \sum_{k=0}^{M} b_k \mathcal{F}\left\{\frac{d^k x(t)}{dt^k}\right\}$$

ΙΔΙΟΤΗΤΑ ΔΙΑΦΟΡΙΣΗΣ $\Rightarrow$ $$\sum_{k=0}^{N} a_k (j\Omega)^k Y(j\Omega) = \sum_{k=0}^{M} b_k (j\Omega)^k X(j\Omega)$$

$$\Rightarrow Y(j\Omega)\left[\sum_{k=0}^{N} a_k (j\Omega)^k\right] = X(j\Omega)\left[\sum_{k=0}^{M} b_k (j\Omega)^k\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{H(j\Omega) = \frac{Y(j\Omega)}{X(j\Omega)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k (j\Omega)^k}{\sum_{k=0}^{N} a_k (j\Omega)^k}}$$

•4.7. Γ.Χ.Α. Συστηματα με Διαφορικές Εξισώσεις – Παραδείγματα (I)

① $$\boxed{\frac{dy(t)}{dt} + ay(t) = x(t)}$$

ΣΧΕΣΗ ΕΙΣΟΔΟΥ/ΕΞΟΔΟΥ ΕΥΣΤΑΘΟΥΣ Γ.Χ.Α. ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ $(a>0)$

$$\Rightarrow H(j\Omega) = \frac{1}{j\Omega + a}$$

$$\Rightarrow \boxed{h(t) = e^{-at}u(t)}$$

② $$\boxed{\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 4\frac{dy(t)}{dt} + 3y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + 2x(t)}$$

$$\Rightarrow H(j\Omega) = \frac{(j\Omega)+2}{(j\Omega)^2 + 4(j\Omega) + 3}$$

$$= \frac{j\Omega + 2}{(j\Omega+1)(j\Omega+3)} = \frac{1/2}{j\Omega+1} + \frac{1/2}{j\Omega+3}$$

$$\Rightarrow \boxed{h(t) = \frac{1}{2}e^{-t}u(t) + \frac{1}{2}e^{-3t}u(t)}$$

•4.7. Γ.Χ.Α. Συστηματα με Διαφορικές Εξισώσεις – Παραδείνματα (ΙΙ)

③ Έστω $\boxed{x(t) = e^{-t}u(t)}$ είσοδος στο προηγούμενο σύστημα $\Big\} \longrightarrow$ έξοδος = ?

$$x(t) = e^{-t}u(t) \Rightarrow X(j\Omega) = \frac{1}{j\Omega+1}$$

Από ②: $H(j\Omega) = \dfrac{j\Omega+2}{(j\Omega+1)(j\Omega+3)}$

$\Longrightarrow$ ΙΔΙΟΤΗΤΑ ΣΥΝΕΛΙΞΗΣ

$$\Rightarrow Y(j\Omega) = H(j\Omega)X(j\Omega) = \frac{j\Omega+2}{(j\Omega+1)^2(j\Omega+3)}$$

$$= \frac{1/4}{(j\Omega+1)} + \frac{1/2}{(j\Omega+1)^2} + \frac{(-1/4)}{(j\Omega+3)}$$

$$\Rightarrow \boxed{y(t) = \left[\frac{1}{4}e^{-t} + \frac{1}{2}te^{-t} - \frac{1}{4}e^{-3t}\right]u(t)}$$

•A1. Ανάλυση Ρητής Συνάρτησης σε Μερικά Κλάσματα (I)

ΡΗΤΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ:

$$H(\upsilon) = \frac{\beta_m \upsilon^m + \beta_{m-1}\upsilon^{m-1} + \dots + \beta_1 \upsilon + \beta_0}{a_n \upsilon^n + a_{n-1}\upsilon^{n-1} + \dots + a_1 \upsilon + a_0}$$

$\upsilon = j\Omega$

$$= \frac{\gamma_m \upsilon^m + \gamma_{m-1}\upsilon^{m-1} + \dots + \gamma_1 \upsilon + \gamma_0}{\upsilon^n + \delta_{n-1}\upsilon^{n-1} + \dots + \delta_1 \upsilon + \delta_0} \qquad (\gamma_k = \beta_k / a_n) \quad (\delta_k = a_k / a_n)$$

$= \rightarrow m < n$ ok!

$\rightarrow m \geq n \quad \left[C_{m-n}\upsilon^{m-n} + C_{m-n-1}\upsilon^{m-n-1} + \dots + C_1 \upsilon + C_0\right]$

$$+ \frac{b_{n-1}\upsilon^{n-1} + b_{n-2}\upsilon^{n-2} + \dots + b_1 \upsilon + b_0}{\upsilon^n + \delta_{n-1}\upsilon^{n-1} + \dots + \delta_1 \upsilon + \delta_0}$$

συντελεστές βρίσκονται με πράξεις:

$$(\gamma_m \upsilon^m + \dots + \gamma_0) = (b_{n-1}\upsilon^{n-1} + \dots b_0) + (C_{m-n}\upsilon^{m-n} + \dots + C_0)(\upsilon^n + \dots + \delta_0)$$

•A1. Ανάλυση Ρητής Συνάρτησης σε Μερικά Κλάσματα (II)

ΣΤΗ ΣΥΝΕΧΕΙΑ .... : Βρίσκουμε τις ρίζες των πολυωνύμων του παρονομαστή (ΑΠΛΕΣ ή ΚΑΙ ΠΟΛΛΑΠΛΕΣ)

$(m<n)$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ – ΑΠΛΕΣ ΡΙΖΕΣ :

$$G(\upsilon)=\frac{b_2\upsilon^2+b_1\upsilon+b_0}{[\upsilon^3+\delta_2\upsilon^2+\delta_1\upsilon+\delta_0]}=\frac{A_1}{\upsilon-\rho_1}+\frac{A_2}{\upsilon-\rho_2}+\frac{A_3}{\upsilon-\rho_3}$$

$$[\upsilon^3+\delta_2\upsilon^2+\delta_1\upsilon+\delta_0] \rightarrow (\upsilon-\rho_1)(\upsilon-\rho_2)(\upsilon-\rho_3)$$

$$\Longrightarrow (\upsilon-\rho_1)\,G(\upsilon)=A_1+\frac{A_2(\upsilon-\rho_1)}{\upsilon-\rho_2}+\frac{A_3(\upsilon-\rho_1)}{\upsilon-\rho_3}$$

(αντίστοιχα για ρ_2, ρ_3)

$\upsilon=\rho_1 \Longrightarrow$
$$A_1=[(\upsilon-\rho_1)\,G(\upsilon)]\Big|_{\upsilon=\rho_1}=\frac{b_2\upsilon^2+b_1\upsilon+b_0}{(\upsilon-\rho_2)(\upsilon-\rho_3)}\Bigg|_{\upsilon=\rho_1}=\frac{b_2\rho_1^2+b_1\rho+b_0}{(\rho_1-\rho_2)(\rho_1-\rho_3)}$$

$\upsilon=\rho_2 \Longrightarrow$
$$A_2=[(\upsilon-\rho_2)\,G(\upsilon)]\Big|_{\upsilon=\rho_2}$$

$\upsilon=\rho_3 \Longrightarrow$
$$A_3=[(\upsilon-\rho_3)\,G(\upsilon)]\Big|_{\upsilon=\rho_3}$$

•Α1. Ανάλυση Ρητής Συνάρτησης σε Μερικά Κλάσματα (ΙΙΙ)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ – ΔΙΠΛΗ ΡΙΖΑ :

$$G(\upsilon) = \frac{b_2 \upsilon^2 + b_1 \upsilon + b_0}{(\upsilon - \rho_1)^2 (\upsilon - \rho_2)} = \frac{A_{11}}{\upsilon - \rho_1} + \frac{A_{12}}{(\upsilon - \rho_1)^2} + \frac{A_{21}}{(\upsilon - \rho_2)}$$

↳ χρειάζεται (γενικά) ώστε # αγνώστων = = # εξισώσεων/συντελεστών b_i

- A_{21} : όπως πριν

  ↳ $\boxed{= [(\upsilon - \rho_2) G(\upsilon)] \big|_{\upsilon = \rho_2}}$

- A_{12} : παρόμοια με πριν

  ↳ $(\upsilon - \rho_1)^2 G(\upsilon) = A_{11} (\upsilon - \rho_1) + A_{12} + \frac{A_{21} (\upsilon - \rho_1)^2}{(\upsilon - \rho_2)}$

  $\overset{\upsilon = \rho_1}{\Longrightarrow}$ $\boxed{A_{12} = [(\upsilon - \rho_1)^2 G(\upsilon)] \big|_{\upsilon = \rho_1}} = \frac{b_2 \rho_1^2 + b_1 \rho_1 + b_0}{\rho_1 - \rho_2}$

ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗ

- A_{11} : $\frac{d}{d\upsilon} [(\upsilon - \rho_1)^2 G(\upsilon)] = A_{11} + A_{21} \left[\frac{2(\upsilon - \rho_1)}{\upsilon - \rho_2} - \frac{(\upsilon - \rho_1)^2}{(\upsilon - \rho_2)^2} \right]$

  $\overset{\upsilon = \rho_1}{\Longrightarrow}$ $\boxed{A_{11} = \left[\frac{d}{d\upsilon} [(\upsilon - \rho_1)^2 G(\upsilon)] \right]_{\upsilon = \rho_1}} = \frac{2 b_2 \rho_1 + b_1}{\rho_1 - \rho_2} - \frac{b_2 \rho_1^2 + b_1 \rho_1 + b_0}{(\rho_1 - \rho_2)^2}$

•Α1. Ανάλυση Ρητής Συνάρτησης σε Μερικά Κλάσματα (IV)

ΓΕΝΙΚΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ:

$$G(u) = \frac{b_{n-1}u^{n-1} + \dots + b_1 u + b_0}{(u-\rho_1)^{\sigma_1}(u-\rho_2)^{\sigma_2}\dots(u-\rho_r)^{\sigma_r}} \qquad \left(\sum_{i=1}^{r}\sigma_i = n\right) \quad \rho_i \neq \rho_j$$

$$= \left[\frac{A_{11}}{u-\rho_1} + \frac{A_{12}}{(u-\rho_1)^2} + \dots + \frac{A_{1\sigma_1}}{(u-\rho_1)^{\sigma_1}}\right]$$

$$+ \left[\frac{A_{21}}{u-\rho_2} + \dots + \frac{A_{2\sigma_2}}{(u-\rho_2)^{\sigma_2}}\right]$$

$$+ \dots + \left[\frac{A_{r1}}{u-\rho_1} + \dots + \frac{A_{r\sigma_r}}{(u-\rho_r)^{\sigma_r}}\right]$$

όπου:

$$\boxed{A_{ik} = \frac{1}{(\sigma_i - k)!}\left[\frac{d^{\sigma_i-k}}{du^{\sigma_i-k}}\left[(u-\rho_i)^{\sigma_i}G(u)\right]\right]\Bigg|_{u=\sigma_i}}$$

$k = 1, \dots, \sigma_i$

$i = 1, \dots, r$

•A1. Παραδείγματα Ανάλυσης σε Μερικά Κλάσματα (I)

(1) $$\boxed{\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 4\frac{dy(t)}{dt} + 3y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + 2x(t)}$$

ΕΥΣΤΑΘΕΣ
Γ.Χ.Α.
$\Rightarrow \boxed{h(t) = ?}$

$$\Rightarrow H(j\Omega) = \frac{j\Omega + 2}{(j\Omega)^2 + 4(j\Omega) + 3}$$

$$\xRightarrow{v=j\Omega} H(v) = \frac{v+2}{v^2+4v+3} = \frac{v+2}{(v+1)(v+3)} = \frac{A_{11}}{v+1} + \frac{A_{21}}{v+3}$$

$$A_{11} = \left[(v+1)H(v)\right]\Big|_{v=-1} = \frac{v+2}{v+3}\Big|_{v=-1} = \frac{1}{2}$$

$$A_{21} = \left[(v+3)H(v)\right]\Big|_{v=-3} = \frac{v+2}{v+1}\Big|_{v=-3} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow H(j\Omega) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{j\Omega+1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{j\Omega+3}$$

$$\Rightarrow \boxed{h(t) = \frac{1}{2}e^{-t}u(t) + \frac{1}{2}e^{-3t}u(t)}$$

•A1. Παραδείγματα Ανάλυσης σε Μερικά Κλάσματα (II)

2

$$x(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t) = ?$$

$x(t) = e^{-t}u(t)$

$h(t)$: ΑΠΟ ΠΡΟΗΓΟΥΜΕΝΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

$$Y(j\Omega) = \frac{j\Omega + 2}{(j\Omega+1)^2(j\Omega+3)}$$

$$\xRightarrow{v=j\Omega} Y(v) = \frac{v+2}{(v+1)^2(v+3)} = \frac{A_{11}}{v+1} + \frac{A_{12}}{(v+1)^2} + \frac{A_{21}}{v+3}$$

$$A_{21} = \left[(v+3)Y(v)\right]\Big|_{v=-3} = \frac{v+2}{(v+1)^2}\Big|_{v=-3} = -\frac{1}{4}$$

$$A_{12} = \left[(v+1)^2Y(v)\right]\Big|_{v=-1} = \frac{v+2}{v+3}\Big|_{v=-1} = \frac{1}{2}$$

$$A_{11} = \frac{1}{(2-1)!}\left[\frac{d}{dv}\left[(v+1)^2Y(v)\right]\right]\Bigg|_{v=-1} = \left[\frac{d}{dv}\left[\frac{v+2}{v+3}\right]\right]\Bigg|_{v=-1} = \frac{(v+3)-(v+2)}{(v+3)^2}\Big|_{v=-1} = \frac{1}{4}$$

•A1. Παραδείγματα Ανάλυσης σε Μερικά Κλάσματα (III)

$$\xRightarrow[A_{21}]{A_{11},A_{12}} \quad Y(j\Omega) = \frac{1}{4}\frac{1}{(j\Omega+1)} + \frac{1}{2}\frac{1}{(j\Omega+1)^2} - \frac{1}{4}\frac{1}{(j\Omega+3)}$$

$$\Longrightarrow \boxed{y(t) = \left[\frac{1}{4}e^{-t} + \frac{1}{2}te^{-t} - \frac{1}{4}e^{-3t}\right]u(t)}$$