



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ



Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών



ΘΕΩΡΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ & ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

Γεράσιμος Ποταμιάνος

*Αναπλ. Καθηγητής,
Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
και Μηχανικών Υπολογιστών*

Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

<http://www.inf.uth.gr/~gpotamianos>



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ



Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών



ΘΕΩΡΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ & ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

Ενότητα 2: ΣΥΝΕΛΙΞΗ, Γ.Χ.Α. ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

2.0. Εισαγωγή

2.1. Συνέλιξη διακριτού χρόνου

2.2. Συνέλιξη συνεχούς χρόνου

2.3. Ιδιότητες συνέλιξης και Γ.Χ.Α. Συστημάτων

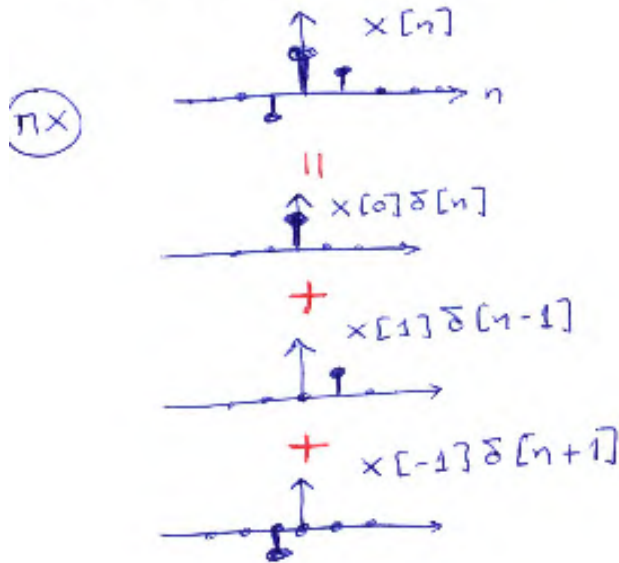
2.5. Περιγραφή Αιτιατών Γ.Χ.Α. Συστημάτων με Διαφορικές Εξισώσεις και Εξισώσεις Διαφορών



2.1. Συνέλιξη – Διακριτός Χρόνος – Ορισμός (I)

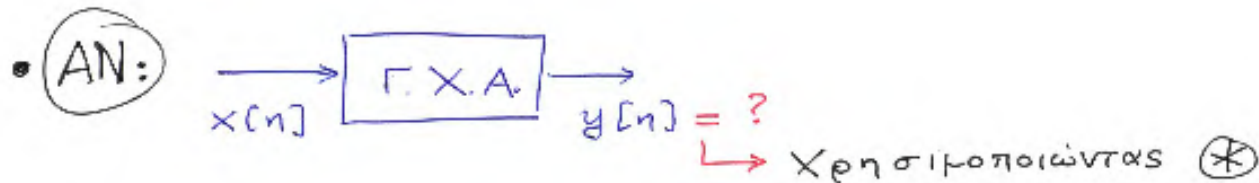
ΓΡΑΜΜΙΚΟΣ ΣΥΝΔΥΑΣΜΟΣ
ΣΗΜΑΤΩΝ ΜΕΣΩ
ΔΕΙΓΜΑΤΟΛΗΨΙΑΣ

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] \delta[n-k]$$



(π x)

$$u[n] = \sum_{k=0}^{+\infty} \delta[n-k]$$





2.1. Συνέλιξη – Διακριτός Χρόνος – Ορισμός (II)

- Γραμμικότητα:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] h_k[n] \quad (1)$$

\hookrightarrow ΕΞΟΔΟΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ
 ΣΕ ΕΙΣΟΔΟ
 $\delta[n-k]$

- Χρονική Αμεταβλητότητα:

$$h_k[n] = h_0[n-k] \quad (2)$$

$\hookrightarrow h_0[n]$: ΕΞΟΔΟΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ
 ΣΕ ΕΙΣΟΔΟ $\delta[n]$

Drop "0": $h[n]$ Κρουστική Απόκριση
 Συστήματος

(IMPULSE RESPONSE)

- ΣΥΝΔΥΑΣΜΟΣ (1)+(2):

(Γ.Χ.Α / L.T.I.)

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] h[n-k]$$



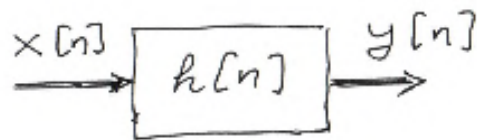
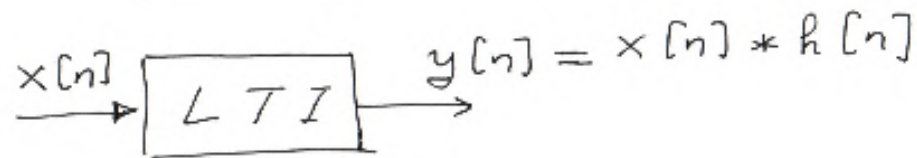
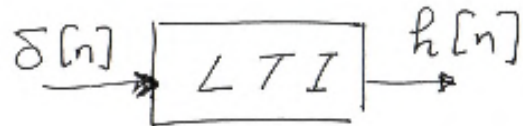


2.1. Συνέλιξη – Διακριτός Χρόνος – Ορισμός (III)

- ΣΥΝΕΛΙΞΗ :
(CONVOLUTION (SUM))

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] h[n-k]$$

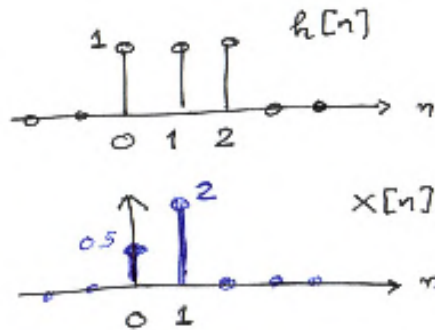
$$= x[n] * h[n]$$



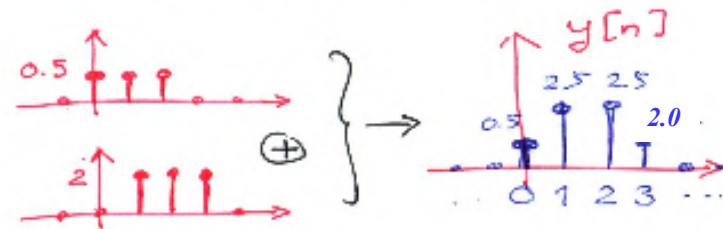


2.1. Συνέλιξη – Διακριτός Χρόνος – Παραδείγματα (I)

Από τον τύπο:



$$\Rightarrow y[n] = x[0] \cdot h[n] + x[1] \cdot h[n-1] \\ = 0.5 h[n] + 2 h[n-1]$$

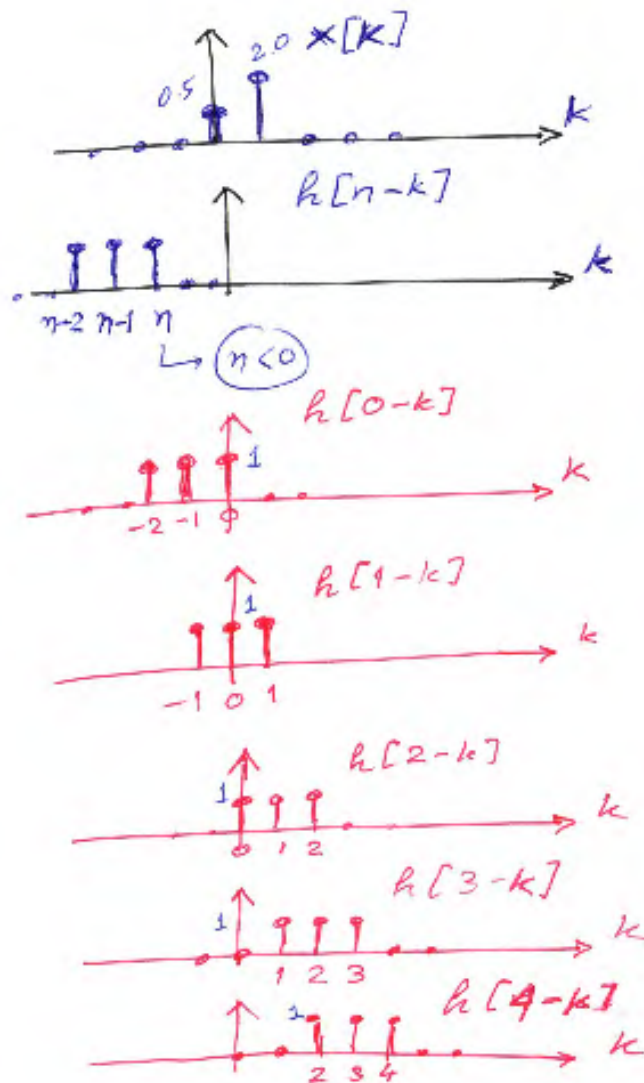


Ας το ξαναδούμε ...





2.1. Συνέλιξη – Διακριτός Χρόνος – Παραδείγματα (II)



$$\Rightarrow \begin{aligned} y[n] &= 0, \quad n < 0 \\ y[0] &= 0.5 \\ y[1] &= 2.5 \\ y[2] &= 2.5 \\ y[3] &= 2.0 \\ y[n] &= 0, \quad n \geq 4 \end{aligned}$$

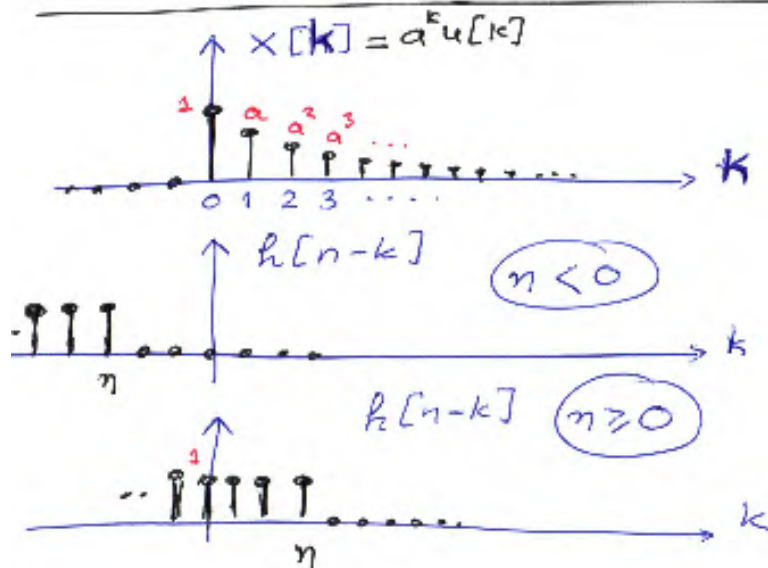




2.1. Συνέλιξη – Διακριτός Χρόνος – Παραδείγματα (III)

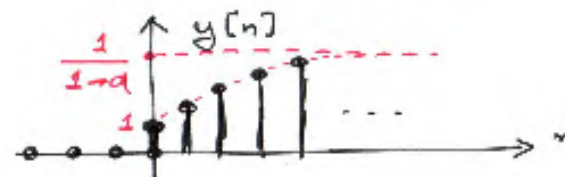
$$x[n] = a^n u[n], \quad 0 < a < 1$$

$$h[n] = u[n]$$



$$y[n] = \begin{cases} 0, & n < 0 \\ \sum_{k=0}^n a^k, & n \geq 0 \end{cases}$$

$$= \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a} \cdot u[n]$$

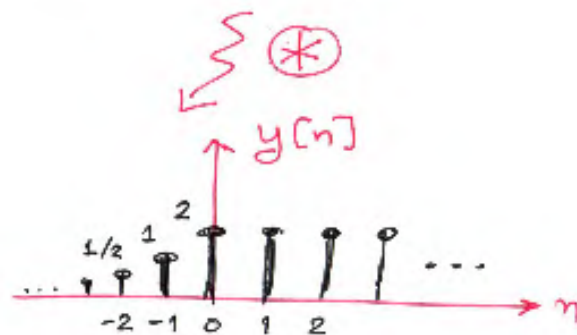
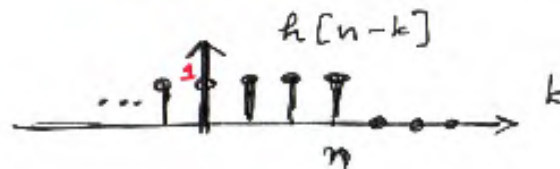
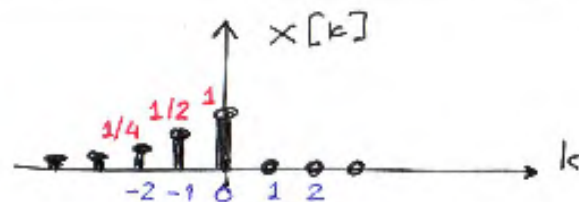




2.1. Συνέλιξη – Διακριτός Χρόνος – Παραδείγματα (IV)

$$x[n] = 2^n u[-n]$$

$$h[n] = u[n]$$



$n \leq 0$:

$$\begin{aligned}
 y[n] &= \sum_{k=-\infty}^n 2^k = \sum_{l=-n}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^l \\
 &= \sum_{m=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{m-n} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-n} \sum_{m=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^m \\
 &= 2^n \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2^n \cdot 2 = 2^{n+1}
 \end{aligned}$$

$n \geq 0$:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^0 2^k = \sum_{l=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^l = 2$$





2.1. Συνέλιξη – Διακριτός Χρόνος – Υπολογισμός

Για υπολογισμό: Ανάκλαση, μετάθεση στον χρόνο,
Πολ/σμός, πρόσθεση

*ITERATE για τα η: x[k] & h[n-k]
έχουν επικάλυψη*

Για ηχηροσφαιρα σήματα:

x[n] διάρκεια N
h[n] διάρκεια M

⇒ y[n] → διάρκεια N+M-1

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΩΣ ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΠΙΝΑΚΑ ΕΠΙ ΔΙΑΝΥΣΜΑ:

(NX)

x[0], x[1], ..., x[N-1] N = 3
h[0], h[1], ..., h[M-1] M = 5

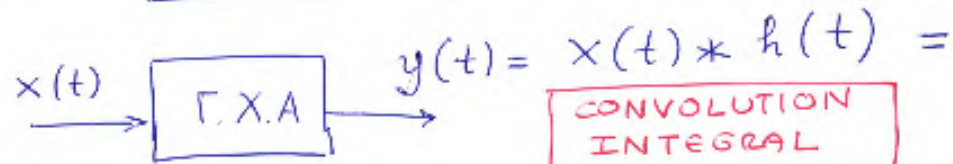
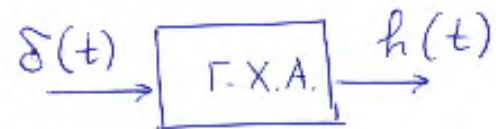
N < M

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] h[n-k], \quad n \in [0, N+M-2]$$





2.2. Συνέλιξη – Συνεχής Χρόνος – Ορισμός



CONVOLUTION
INTEGRAL

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau$$

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ :

- ΑΝΑΚΛΑΣΗ
- ΜΕΤΑΘΕΣΗ ΣΤΟΝ ΧΡΟΝΟ
- ΠΟΛ/ΣΜΟΣ
- ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ

ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ
ΣΕ
ΠΕΡΙΟΧΕΣ
ΕΠΙΚΑΛΥΨΗΣ

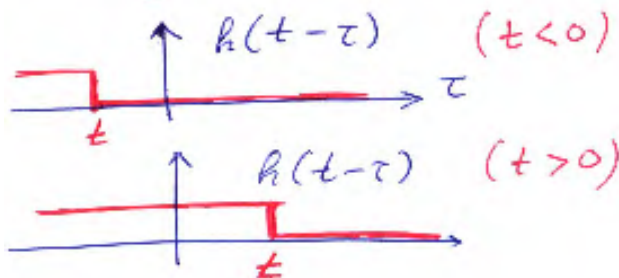
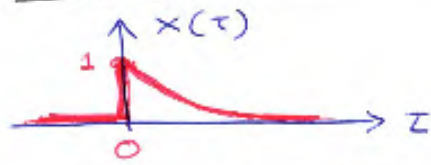




2.2. Συνέλιξη – Συνεχής Χρόνος – Παραδείγματα (I)

$$x(t) = e^{-at} u(t), \quad a > 0$$

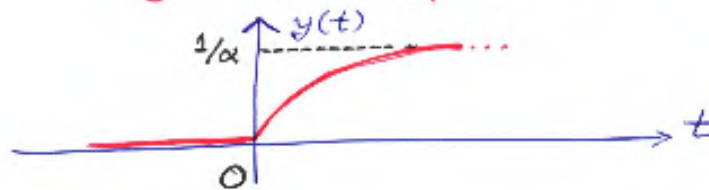
$$h(t) = u(t)$$



$$y(t) = 0, \quad t < 0$$

$$y(t) = \int_0^t e^{-a\tau} d\tau = -\frac{1}{a} e^{-a\tau} \Big|_0^t = \frac{1}{a} (1 - e^{-at})$$

$$y(t) = \frac{1}{a} (1 - e^{-at}) u(t)$$

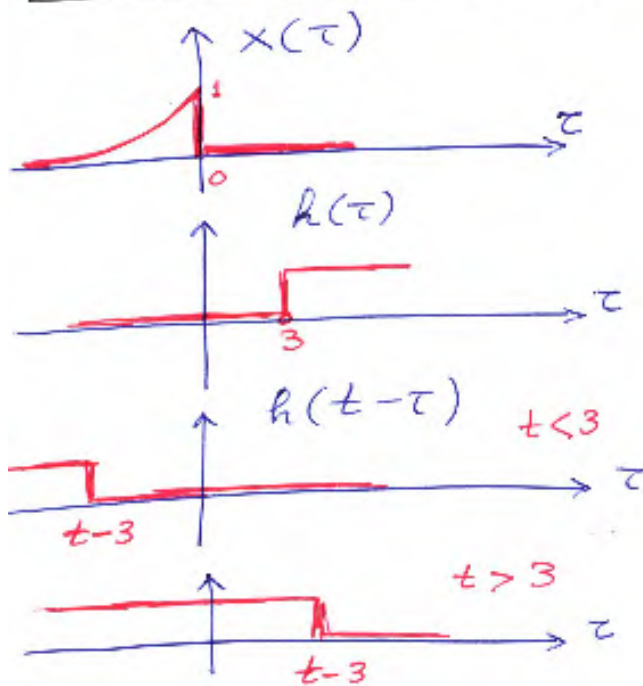




2.2. Συνέλιξη – Συνεχής Χρόνος – Παραδείγματα (II)

$$x(t) = e^{2t} u(-t)$$

$$h(t) = u(t-3)$$

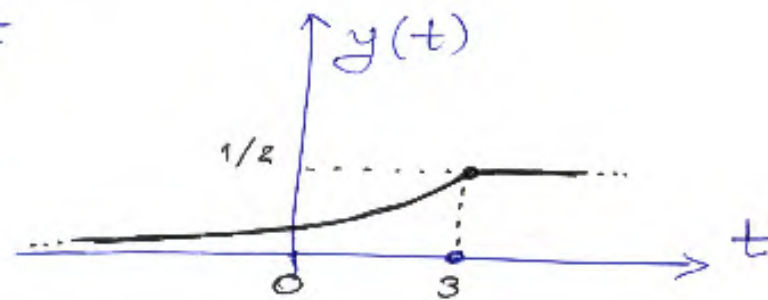


$t < 3$:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t-3} e^{2\tau} d\tau = \frac{1}{2} e^{2(t-3)}$$

$t > 3$:

$$y(t) = \int_{-\infty}^0 e^{2\tau} d\tau = \frac{1}{2}$$

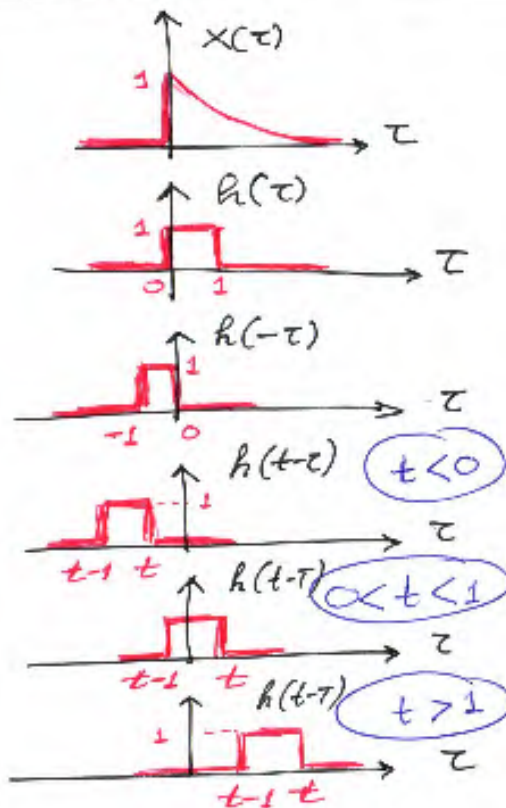




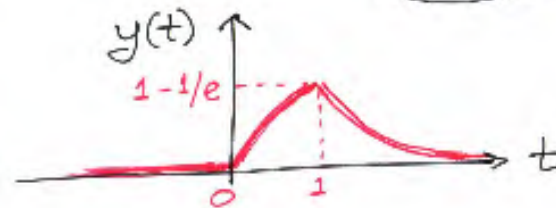
2.2. Συνέλιξη – Συνεχής Χρόνος – Παραδείγματα (III)

$$x(t) = e^{-t} u(t)$$

$$h(t) = u(t) - u(t-1)$$



$$y(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \int_0^t e^{-\tau} d\tau = -e^{-\tau} \Big|_0^t = 1 - e^{-t} & 0 < t < 1 \\ \int_{t-1}^t e^{-\tau} d\tau = -e^{-\tau} \Big|_{t-1}^t = e^{-t}(e-1) & t > 1 \end{cases}$$



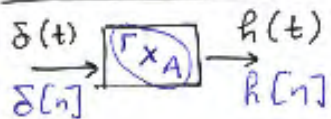


2.3. Συνέλιξη, Ιδιότητες, και Γ.Χ.Α. Συστήματα

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] h[n-k] = x[n] * h[n]$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(t-\tau) = x(t) * h(t)$$

ΚΡΟΥΣΤΙΚΗ ΑΠΟΚΡΙΣΗ χαρακτηρίζει πλήρως την συμπεριφορά Γ.Χ.Α. συστημάτων



Προσοχή: Το σύστημα πρέπει να είναι Γ.Χ.Α.

⊗ 3 συστήματα:

$$y[n] = x[n] + x[n-1] \leftarrow \text{Γ.Χ.Α.}$$

$$y[n] = (x[n] + x[n-1])^2 \leftarrow \text{ΟΧΙ!}$$

$$y[n] = \max\{x[n], x[n-1]\} \leftarrow \text{ΟΧΙ!}$$

$$x[n] = \delta[n] \leftarrow \uparrow$$

$$y[n] = \begin{cases} 1, & n=0, 1 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

ΙΔΙΑ ΑΠΟΚΡΙΣΗ ΚΑΙ ΓΙΑ ΤΑ ΤΡΙΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ





2.3.A. Ιδιότητες Συνέλιξης

- Αντιμεταθετικότητα (cumulative property)
- Επιμεριστικότητα (distributive property)
- Προσεταιριστικότητα (associative property)
- Γραμμικότητα (linearity)
- Ταυτοτικό στοιχείο (identity element)

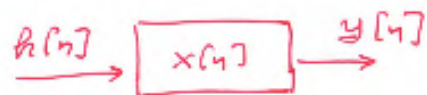
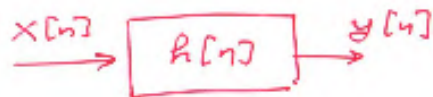




2.3.A.α. Ιδιότητες – Αντιμεταθετικότητα

$$x[n] * h[n] = h[n] * x[n]$$

$$x(t) * h(t) = h(t) * x(t)$$



ΧΡΗΣΙΜΟ ΓΙΑ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟ
ΣΥΝΕΛΙΞΗΣ

ΑΠΟΔΕΙΞΗ :

$$x[n] * h[n] = \sum_k x[k] h[n-k] =$$

$$= \sum_l x[n-l] h[l]$$

$$= \sum_l h[l] x[n-l]$$

$$= h[n] * x[n]$$



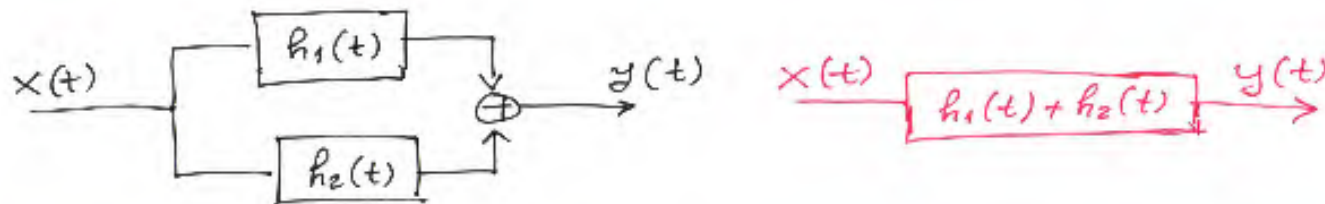


2.3.A.β. Ιδιότητες – Επιμεριστικότητα

$$x[n] * (h_1[n] + h_2[n]) = x[n] * h_1[n] + x[n] * h_2[n]$$

$$x(t) * (h_1(t) + h_2(t)) = x(t) * h_1(t) + x(t) * h_2(t)$$

ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΣ ΣΥΝΔΥΑΣΜΟΣ Γ.Χ.Α. ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ
ΜΠΟΡΕΙ ΝΑ ΑΝΤΙΚΑΤΑΣΤΑΘΕΙ ΑΠΟ ΕΝΑ Γ.Χ.Α. ΣΥΣΤΗΜΑ.



Συνδυασμός αντιστροφικότητας
& επιμεριστικότητας:

$$(x_1[n] + x_2[n]) * h[n] = x_1[n] * h[n] + x_2[n] * h[n]$$

ΧΡΗΣΙΜΟ ΣΤΟΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟ ΣΥΝΕΛΙΞΗΣ



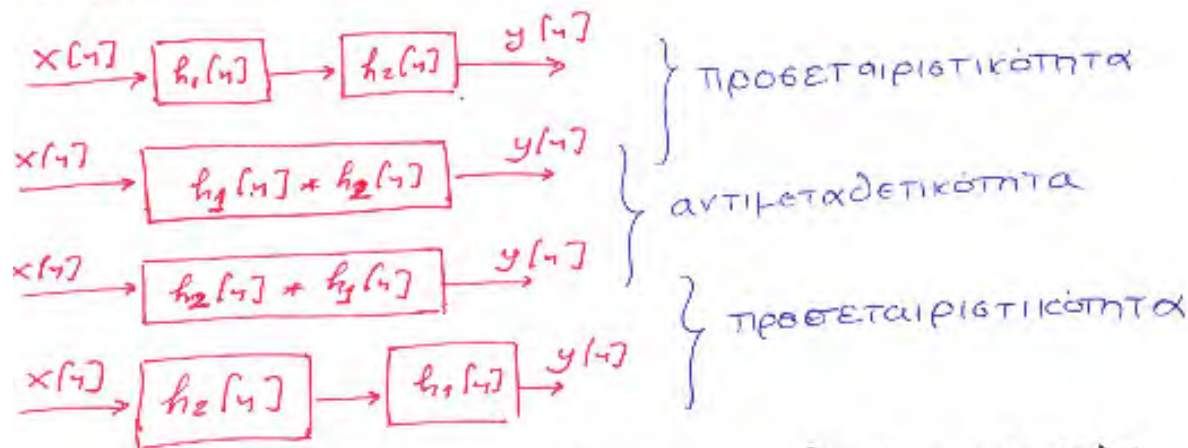


2.3.A.γ. Ιδιότητες – Προσεταιριστικότητα

$$x[n] * (h_1[n] * h_2[n]) = (x[n] * h_1[n]) * h_2[n]$$

$$x(t) * (h_1(t) * h_2(t)) = (x(t) * h_1(t)) * h_2(t)$$

Οι παρενθέσεις δηλαδή δεν χρειάζονται...



Η σειρά δηλαδή των υποσυστημάτων δεν έχει σημασία

Φυσικά, πρέπει να είναι Γ.Χ.Α. (πχ)

SYS1: $y(t) = 2x(t)$	$1 \rightarrow 2$: $y(t) = 4x^2(t)$
SYS2: $y(t) = x^2(t)$	$2 \rightarrow 1$: $y(t) = 2x^2(t)$

↳ ΟΧΙ ΓΧΑ





2.3.A.δ. Ιδιότητες – Γραμμικότητα, κ.α.

Γραμμική ιδιότητα :

$$\begin{aligned} x[n] * [c_1 h_1[n] + c_2 h_2[n]] &= \\ &= c_1 x[n] * h_1[n] + c_2 x[n] * h_2[n] \end{aligned}$$

Ταυτοτικό στοιχείο : $\delta[n], \delta(t)$

$$\begin{aligned} x[n] * \delta[n] &= x[n] \\ x(t) * \delta(t) &= x(t) \end{aligned}$$

Μετατόπιση :

$$\begin{aligned} x[n] * \delta[n - n_0] &= x[n - n_0] \\ x(t) * \delta(t - t_0) &= x(t - t_0) \end{aligned}$$





2.3.B. Κρουστική Απόκριση και Ιδιότητες Γ.Χ.Α. Συστημάτων

- Συστήματα χωρίς μνήμη (memory-less systems)
- Αιτιατά συστήματα (causal systems)
- Αντιστρέψιμα συστήματα (invertible systems)
- Ευσταθή συστήματα (stable systems)

Τι σημαίνουν οι παραπάνω ιδιότητες για την κρουστική απόκριση του συστήματος;





2.3.B.α. Γ.Χ.Α. Ιδιότητες – Συστήματα Χωρίς Μνήμη

Υπενθύμιση: Χωρίς μνήμη, αν σε κάθε χρονική στιγμή, η έξοδος εξαρτάται από την είσοδο την ίδια χρονική στιγμή.

Εφικτό μόνο αν $h[n] = 0, \forall n \neq 0$ δηλ. $h[n] = K \delta[n]$

$h(t) = 0, \forall t \neq 0$ δηλ. $h(t) = K \delta(t)$

$h(0) \rightarrow$

Δηλαδή τα συστήματα έχουν εξίσωση

Είσοδου/Εξόδου:

$$y[n] = h[0] \cdot x[n]$$

$$y(t) = h(0) \cdot x(t)$$





2.3.B.β. Γ.Χ.Α. Ιδιότητες – Αιτιατά Συστήματα (I)

Υπενθύμιση: Η έξοδος σε κάθε χρονική στιγμή εξαρτάται μόνο από την είσοδο στο παρόν ή παρελθόν
 — όχι στο μέλλον.

Κατά συνέπεια: $y[n]$ δεν εξαρτάται από $x[k]$ για $k > n$
 δηλαδή τα $h[n-k] = 0, \forall k > n$

δηλ: $h[n] = 0 \quad \forall n < 0$

Λογικό... η χρονική απόκριση είναι μόνον πριν εφαρμοστεί το $\delta[n]$ στο σύστημα.

Άρα, για αιτιατά συστήματα:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k] h[n-k] = \sum_{k=0}^{+\infty} h[k] x[n-k]$$

Για συνεχή χρόνο:
ΑΙΤΙΑΤΟΤΗΤΑ \rightarrow $h(t) = 0 \quad \forall t < 0$, $y(t) = \int_0^{+\infty} h(\tau) x(t-\tau) d\tau$





2.3.B.β. Γ.Χ.Α. Ιδιότητες – Αιτιατά Συστήματα (II)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ :

$$h(t) = \delta(t - t_0) \quad \text{για } \underline{t_0 < 0}$$

ΜΗ ΑΙΤΙΑΤΟ

$$h[n] = \begin{cases} n+3, & -2 \leq n \leq 2 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

ΜΗ ΑΙΤΙΑΤΟ

$$h[n] = u[n]$$

ΑΙΤΙΑΤΟ

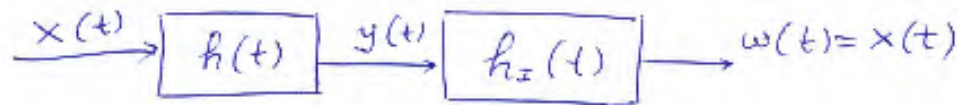
$$h[n] = \delta[n] - \delta[n-1]$$

ΑΙΤΙΑΤΟ





2.3.Β.γ. Γ.Χ.Α. Ιδιότητες – Αντιστρέψιμα Συστήματα



Αν ένα Γ.Χ.Α. σύστημα είναι αντιστρέψιμο, τότε και το αντίστροφό του είναι Γ.Χ.Α.!

Προφανώς:

$$h(t) * h_I(t) = \delta(t)$$

$$h[n] * h_I[n] = \delta[n]$$

• Παραδείγματα:

(1) $y(t) = x(t - t_0) \rightsquigarrow h_I(t) = \delta(t + t_0)$
 $h(t) = \delta(t - t_0)$

(2) $h[n] = u[n] \rightsquigarrow y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] u[n-k] = \sum_{k=-\infty}^n x[k]$

$$h_I(t) = \delta[n] - \delta[n+1]$$





2.3.B.δ. Γ.Χ.Α. Ιδιότητες – Ευσταθή Συστήματα (I)

Υπενθύμιση: $\Phi \in \Phi$ ευσταδία όταν
 $|x[n]| < B, \forall n \Rightarrow |y[n]| < C \forall n$

ABSOLUTE SUMMABILITY

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h[k]| < \infty \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\text{BIBO STABILITY}}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ $[\Rightarrow]$

$$|y[n]| = \left| \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k] x[n-k] \right| \leq \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h[k]| |x[n-k]| \leq B \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h[k]|$$

$[\Leftarrow]$

$x[n] = \text{sgn}(h[-n]) \rightsquigarrow |x[n]| \leq 1$ φραγμένη είσοδος

$$y[0] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] h[-k] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \text{sgn}(h[-k]) h[-k] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h[-k]| = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h[k]|$$

Αν δεν ισχύει η \oplus , τότε φραγμένη είσοδος δημιουργεί \nexists φραγμένη έξοδο





2.3.Β.δ. Γ.Χ.Α. Ιδιότητες – Ευσταθή Συστήματα (II)

ABSOLUTE INTEGRABILITY :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| dt < \infty$$

BIBO STABLE

$$|y(t)| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) x(t-\tau) d\tau \right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)| |x(t-\tau)| d\tau$$

↪ φραγμένη είσοδος

$$\leq B \int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)| d\tau \rightarrow \text{φραγμένη έξοδος}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ :

DELAY

$$h[n] = \delta[n-n_0]$$

$$h(t) = \delta(t-t_0)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h[n]| = 1 < \infty$$

ΕΥΣΤΑΘΕΣ

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |\delta(t-t_0)| dt = 1 < \infty$$

ΕΥΣΤΑΘΕΣ

ACCUMULATOR

$$h[n] = u[n]$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h[n]| = \sum_{n=0}^{+\infty} 1 = +\infty$$

ΑΕΣΤΑΘΕΣ

INTEGRATOR

$$h(t) = u(t)$$

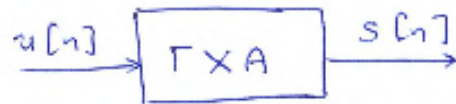
$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| dt = \int_0^{+\infty} dt = +\infty$$

ΑΕΣΤΑΘΕΣ



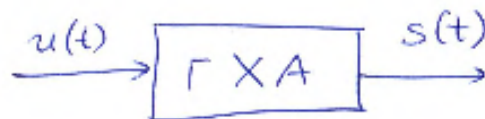


2.3.Γ. Βηματική Απόκριση – Unit Step Response



$$s[n] = u[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^n A[k]$$

$$h[n] = s[n] - s[n-1]$$



$$s(t) = u(t) * h(t) = \int_{-\infty}^t h(\tau) d\tau$$

$$h(t) = \frac{ds(t)}{dt}$$





2.4. Διαφορικές Εξισώσεις και Εξισώσεις Διαφορών για Περιγραφή Αιτιατών Γ.Χ.Α. Συστημάτων

ΣΥΝΕΧΗΣ
ΧΡΟΝΟΣ :

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^M b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

Συνθήκες αρχικής ηρεμίας (initial rest):

$$y(t_0) = \frac{dy(t_0)}{dt} = \dots = \frac{d^{N-1} y(t_0)}{dt^{N-1}} = 0$$

ΔΙΑΚΡΙΤΟΣ
ΧΡΟΝΟΣ :

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k]$$

