Κατή Σοφία

20 Δεκ Δευ 6-9

Congestion games

$N = \{1, 2, \ldots, n\}$ υπάρχουν n παίκτες

E: facilities (resources)

Σ_i σύνολο στρατηγικών $\Sigma_i \subseteq 2^E$ δυναμοσύνολο resources

Υπάρχει ένα κόστος ~~$c_e(k)$~~ =

$c(k) = \alpha k + b$ γραμμικό κόστος

$c_e(k) = a_e k + b_e$ κόστος χρησιμοποίησης το resource e

k αριθμό χρηστών που χρησιμοποιούν το συγκεκριμένο resource π.χ. link server

a_e, b_e σταθερές

A

Χωρίς βλάβη της γενικότητας $c_e(k) = k$

$C_i(A)$ στρατηγική, A υποσύνολο resources

$\in \Sigma_i$ όλο το strategy

$A_i \in \Sigma_i$ $\quad C_i(A) = \sum_{e \in A_i} c_e(n_e(A))$ → αριθμό παικτών που χρησιμοποιούν το resource e σε strategy A

$$C_i(A) \sum_{e A_i} c_e(n_e(A)) = \sum_{e \in A_i} n_e(A)$$

Μια στρατηγική ~~α~~ $A = (A_1, A_2, \ldots A_N)$ λέγεται N.E όταν για κάθε παίκτη $\forall i \in N$ $\forall s \in \Sigma_i$

$$c_i(A_i\, A_{-i}) \leq c_i(s_i, A_{-i})$$

Υπάρχει το social cost

$$\sum_{i=1}^{M} c_i(A)$$

άλλο κόστος $\max_{i=1,\ldots,N} C_i(A)$

Αν $\Sigma_i = \Sigma$ $\forall i$ τότε λέμε το παίγνιο συμμετρικό

Εδώ social cost $\sum_{i=1}^{N} C_i(A)$

Κουτσουπιάς είναι από άρθρο του έχει ~~@~~ στο site

$$c_i(A) = \sum_{e \in A_i} n_e(A)$$

Θεώρημα: $PoA = \sup_{A:NE} \frac{\text{social cost}(A)}{opt}$

αν έχω 3 N.E θα ~~είναι~~ επιλέγω το μεγαλύτερο

Θα αποδείξω

~~PoA~~ $PoA \le \frac{5}{2}$

Χρειαζόμαστε το λήμμα

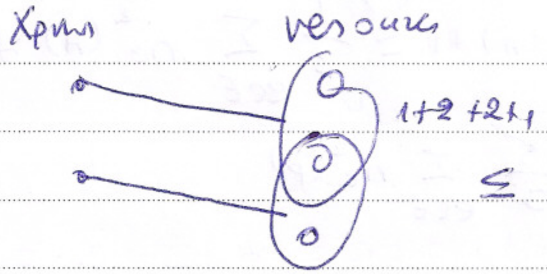
$a, b \in Z_+ \quad b(a+1) \le \frac{a^2+5b^2}{3}$

Έστω A: NE, P: opt

social cost (A) ως NE $\equiv sum(A) = \sum_i c_i(A)$

$$c_i(A) = \sum_{e \in A_i} n_e(A) \underset{N.E}{\le} \sum_{p \in P_i} n_e(A_{-i}, P_i)$$

↑ βέλτιστη στρατηγική



$$\le \sum_{p \in P_i} \left(n_e(A)+1\right)$$

$$sum(A) = \sum_i c_i(A) = \sum_i \sum_{e \in A_i} n_e(A) =$$

$$= \sum_{e \in E} \sum_{i: A \ni e} n_e(A) = \sum_{e \in E} n_e(A)\, n_e(A)$$

$$= \sum_{e \in E} n_e^2(A) \quad (2)$$

$$sum(A) = \sum_i c_i(A) \overset{*}{\le} \sum_i \sum_{e \in P_i} \left(n_e(A)+1\right) \quad (1)$$

$$= \sum_{e\in E} \sum_{i: P_i \ni e} (n_e(A)+1) = \sum_{e\in E} n_e(P)(n_e(A)+1) \quad (1)$$

Υπάρχει το συνολικό σε optimal point

$$sum(P) = \sum_i c_i(P) = \sum_{e\in E} n_e^2(P) \quad (3)$$

Χρησιμοποιώ το λήμμα για $a = n_e(A)$ και $b = n_e(P)$

$$n_e(P)\left[n_e(A)+1\right] \le \frac{1}{3} n_e^2(A) + \frac{5}{3} n_e^2(P) \quad (4)$$

$$\overset{(1)}{\Rightarrow} sum(A) \le \sum_{e\in E} n_e(P)\left[n_e(A)+1\right] \overset{(4)}{\le} \frac{1}{3} \sum_{e\in E} n_e^2(A) + \frac{5}{3} \sum_{e\in E} n_e^2(P)$$

$$sum(A) \underset{(3)}{\overset{(2)}{\le}} \frac{1}{3} sum(A) + \frac{5}{3} sum(P) \Rightarrow \frac{sum}{sumP} \le \frac{5}{2}$$

(assymetric περίπτωση)

Μπορεί να αποδειχθεί ότι PoA για symmetric είναι $PoA \le \frac{5N-2}{2N+1}$

Όπου $MAX(A) = \max_i c_i(A)$ $\quad PoA = O(\sqrt{N})$
Τάξη μεγέθους

Έστω A : NE και P social optimum

Ο χρήστης i είναι αυτός που έχει το μέγιστο κόστος

$MAX(A) = C_1(A)$

$max(P) = \max_i c_i(p)$

$$A.NE \Rightarrow C_1(A) \leq \sum_{e \in P_1} (n_e(A)+1) \leq$$

$$\leq \sum_{e \in P_1} n_e(A) + C_1(p)$$

$$C_1(P) = \sum_{e \in P_1} n_e(P) \geq \sum_{e \in P_1} 1$$

$$n_e(P) \geq 1$$

Έστω ~~I⊆N~~ $I \subseteq N$ παίκτες στο N.E A που χρησιμοποιούν resources του συνόλου P_1

$$\sum_{i \in I} c_i(A) = \sum_{i \in I} \sum_{e \in A_i} n_e(A) = \sum_{e \in E} \sum_{\substack{i \in I \\ e \in A_i}} n_e(A)$$

$$= \sum_{e \in E} n_e^2(A) \geq \sum_{e \in P_1} n_e^2(A) \quad (1)$$

$$\left[\sum_{e\in P_1} n_e(A)\right]^2 \le |P_1| \sum_{e\in P_1} n_e^2(A) \quad (2)$$

Χρησιμοποιώ αυτούσια δείξεις [illegible]

$$E[X^2] \geq E^2(X)$$

$$E[f(X)] \geq f(E[X])$$

κυρτή $\quad$ f convex

$$f(x)=x^2$$

$$\left[\sum_{e\in P_1} n_e(A)\right]^2 \le \sum_{e\in P_1} n_e^2(A)$$

$$\left(\frac{\sum_{e\in P_1} n_e(A)}{|P_1|}\right)^2 \le \frac{1}{P_1} \sum_{e\in P_1} n_e^2(A) \iff$$

ισχύει

Άρα (1) και (2)

$$\sum_{i\in I} C_i(A) \overset{(1)}{\geq} \sum_{e\in P_1} n_e^2(A) \overset{(2)}{\geq} \frac{1}{|P_1|}\left(\sum_{e\in P_1} n_e(A)\right)^2$$

Προηγούμενο θεώρημα $\quad \sum_{i\in N} C_i(A) \le \frac{5}{2} \sum_{i\in A} C_i(P) \quad (3)$

$$\left(\sum_{e\in P_1} n_e(A)\right)^2 \le |P_1| \sum_{j\in \Sigma} c_1(A) \le |P_1| \sum_{i\in N} c_i(A)$$

$$\overset{(3)}{\le} |P_1| \frac{5}{2} \sum_{i\in N} c_i(P)$$

$$c_1(A) \le \sum_{e\in P_1} n_e(A) + c_1(P)$$

$$c_1(A) \le c_1(P) + \sqrt{|P_1| \frac{5}{2} \sum_{i\in N} c_i(P)}$$

- $|P_1| \le c_1(P)$

$c_1(P) \le MAX(P)$

$$c_1(A) \le c_1(P) + \sqrt{c_1(P) \frac{5}{2} MAX(P)}$$

$$\le MAX(P) + \sqrt{\frac{5N}{2} MAX^2(P)} \Rightarrow$$

$$c_1(A) \le MAX(P)\left(1 + \sqrt{\frac{5N}{2}}\right)$$

$$\frac{c_1(P)}{MAX(P)} = 1 + \sqrt{\frac{5N}{2}}$$