

2^η ΣΕΙΡΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ
Στοχαστικές Διεργασίες, Γκαουσιανή Διεργασία,
Αναλογική Διαμόρφωση

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1 [Στοχαστικές Διεργασίες: Αυτοσυσχέτιση, ισχύς]
 Η στοχαστική διεργασία $X(t)$ ορίζεται ως:

$$X(t) = X \cos 2\pi f_0 t + Y \sin 2\pi f_0 t$$

όπου X, Y είναι δυο ανεξάρτητες Γκαουσιανές τυχαίες μεταβλητές με μηδενική μέση τιμή, και διασπορά σ^2 .

- (α) Βρείτε τη μέση τιμή της διεργασίας $X(t)$, $m_X(t)$.
- (β) Βρείτε την αυτο-συσχέτιση $R_X(t + \tau, t)$. Είναι η $X(t)$ στάσιμη με την ευρεία έννοια;
- (γ) Βρείτε την ισχύ της $X(t)$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2 [Διέλευση Στοχαστικής Διεργασίας μέσα από φίλτρο]

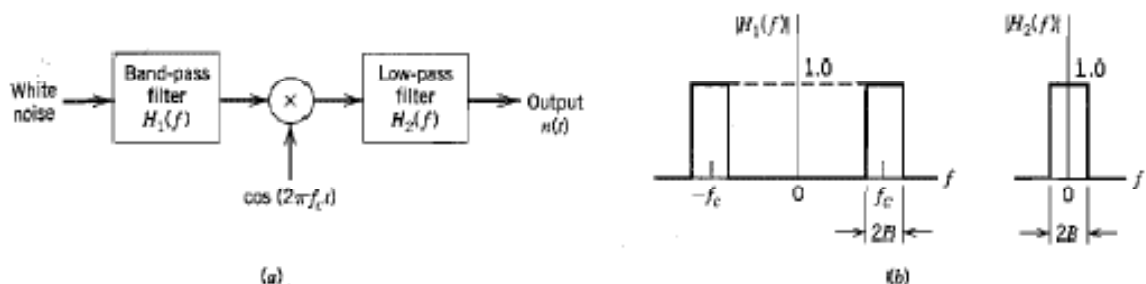
Δίνεται η WSS στοχαστική διεργασία $X(t)$ με μέση τιμή m_X και αυτό-συσχέτιση $R_X(\tau)$. Αυτή διέρχεται μέσα από ένα φίλτρο με κρουστική απόκριση $h(t)$ και έχει ως αποτέλεσμα την στοχαστική διεργασία $Y(t)$ στην έξοδο του φίλτρου. Να δειχτεί ότι

- (α) $m_Y = m_X \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) dt$
- (β) Η ετεροσυσχέτιση των $X(t), Y(t)$, $R_{XY}(\tau) = R_X(\tau) * h(-\tau)$
- (γ) Η αυτοσυσχέτιση $R_Y(\tau) = R_X(\tau) * h(\tau) * h(-\tau)$
- (δ) Η φασματική πυκνότητα ισχύος της $Y(t)$, είναι $G_Y(f) = G_X(f) |H(f)|^2$, όπου $H(f)$ είναι η απόκριση του φίλτρου στο πεδίο της συχνότητας.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3 [Γκαουσιανή Διεργασία]

Στοχαστική διεργασία Λευκού Γκαουσιανού Θορύβου με μέση τιμή μηδέν και φασματική πυκνότητα ισχύος $N_0/2$ εφαρμόζεται στην είσοδο του συστήματος που εικονίζεται στο παρακάτω σχήμα (α). Οι αποκρίσεις συχνότητας των δυο φίλτρων φαίνονται στο σχήμα (β). Έστω $n(t)$ η στοχαστική διεργασία θορύβου στην έξοδο του συστήματος.

- (α) Βρείτε την φασματική πυκνότητα ισχύος και την αυτό-συσχέτιση της $n(t)$
- (β) Βρείτε την μέση τιμή και τη διασπορά της $n(t)$.



ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4 [Φασματική πυκνότητα ισχύος μέσα από φίλτρο]

$X(t)$ is a stationary random process with autocorrelation function $R_X(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}$, $\alpha > 0$. This process is applied to an LTI system with $h(t) = e^{-\beta t}u(t)$, where $\beta > 0$. Find the power-spectral density of the output process $Y(t)$. Treat the cases $\alpha \neq \beta$ and $\alpha = \beta$ separately.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 5 [Αναλογική Διαμόρφωση AM: Ισχύς]

Ένα διαμορφωμένο σήμα AM DSB $u(t) = Am(t)\cos 2\pi f_c t$ πολλαπλασιάζεται με ένα τοπικό φέρον $x(t) = \cos(2\pi f_c t + \theta)$ και η έξοδος περνάει από βαθυπερατό φίλτρο (LPF) με εύρος ζώνης ίσο με το εύρος ζώνης του σήματος $m(t)$. Έστω P_{out} η ισχύς του σήματος στην έξοδο του βαθυπερατού φίλτρου και P_U η ισχύς του διαμορφωμένου σήματος. Να σχεδιαστεί ο λόγος P_{out}/P_U σε συνάρτηση του θ για $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 6 [Αναλογική Διαμόρφωση AM: Φασματικό περιεχόμενο και Ισχύς]

Ένα σήμα AM έχει τη μορφή

$$u(t) = [20 + 2\cos 3000\pi t + 10\cos 6000\pi t]\cos 2\pi f_c t$$

με $f_c = 10^5 \text{ Hz}$.

α) Να σχεδιαστεί το φάσμα (τάσης) του $u(t)$.

β) Να καθοριστεί η ισχύς καθεμιάς από τις συνιστώσες συχνότητας.

γ) Να βρεθούν η ισχύς των πλευρικών ζωνών, η συνολική ισχύς, και ο λόγος της ισχύος των πλευρικών ζωνών προς τη συνολική ισχύ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 7 [Αναλογική Διαμόρφωση Angle Modulation (PM, FM)]

(Σημ: Τυπογραφικό λάθος: Στο ερώτημα 2 αντί για f_d είναι k_f)

Signal $m(t)$ is shown in Figure P-3.25. This signal is used once to frequency modulate a carrier and once to phase modulate the same carrier.

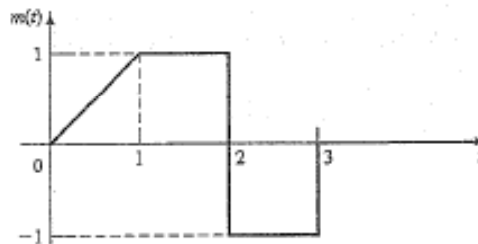


Figure P-3.25

1. Find a relation between k_p and k_f such that the maximum phase of the modulated signals in both cases are equal.
2. If $k_p = f_d = 1$, what is the maximum instantaneous frequency in each case?